4° Phys
04
-1

Th. Sander

Handbuch der Mechanik

von

Franz Joseph Ritter von Gerstner,

k. k. Gubernialrath, Ritter des k. k. österreichischen Leopoldordens, Direktor des technischen Institutes zu Prag, Professor der Mechanik, emeritirtem Direktor der physischen und mathematischen Studien an der Universität, em. k. k. Landeswasserbaudirektor, und emeritirtem Professor der höhern Mathematik und Astronomie, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften,

aufgesetzt, mit Beiträgen von neuern englischen Konstrukzionen vermehrt und herausgegeben

von

Franz Anton Ritter von Gerstner.

Erster Band.

Mechanik fester Körper.

Mit 40 Kupfertafeln,
die in einem besondern Hefte beiliegen.

Prag.

Gedruckt bei *Johann Spurny,* Buchdrucker und Schriftgiesser.

1831.

Vorrede.

Die grossen Fortschritte, welche die Mechanik des Himmels im vorigen Jahrhunderte mit Hülfe der höhern Analysis machte, haben bereits in den Studienjahren meines Vaters den lebhaften Wunsch erregt, dass auch den mechanischen Gewerben eine gleiche Aufklärung zu Theil werden möchte, um sie bei dem Fortschreiten der Industrie mit gleicher Sicherheit zu leiten und vor denjenigen Klippen zu bewahren, woran schon so viele hoffnungsvolle Unternehmungen ihren Untergang gefunden haben. Bei Besichtigung mehrerer mechanischer Werkstätte, grösserer Landesfabriken und ausgeführter Bauwerke fand derselbe Gelegenheit, durch eigenes Nachdenken mehrere Aufsätze über solche Gegenstände zu entwerfen und bald nach dem Antritte seines Lehramtes der höhern Mathematik im Jahre 1788 einige kleinere Schriften aus dem Gebiethe der Baukunst und Hydrodynamik in der Absicht herauszugeben*), um dadurch die Vorsteher landwirthschaftlicher und bürgerlicher Gewerbe auf die Vortheile mathe-

*) Die bisher erschienenen Schriften meines Vaters sind:

1. Uiber die Bestimmung der geographischen Längen: Berichtigung der Längen von Marseille, Padua, Kremsmünster, Dresden, Berlin und Danzig. Abhand. der böh. Gesellsch. der Wissenschaften auf das Jahr 1785. Prag 1785. 4to.
2. Vorübergang des Merkur vor der Sonne, beobachtet am 4. May 1786. Prag und Dresden 1786. 4to.
3. Beobachtung der Sonnenfinsterniss am 4. Juny 1788 auf der königl. Sternwarte zu Prag. Prag und Dresden 1788. 4to.
4. Eine leichte und genaue Methode für die Berechnung der geographischen Länge aus Sonnenfinsternissen. Prag und Dresden 1788. 4to.
5. Einleitung in die statische Baukunst. Prag 1789. 8vo.
6. Merkur vor der Sonne zu Prag den 5. November 1789. Prag 1790. 4to.
7. Vergleichung der Kraft und Last beim Räderwerk mit Rücksicht auf Reibung. Prag 1799. 4to.
8. Beobachtungen über den Gebrauch des Barometers bei Höhenmessungen. Dresden 1791. 4to.

matischer Studien aufmerksam zu machen und für ihre Zöglinge und Nachfolger insbesondere das Studium der höhern Mathematik zu empfehlen. Eben diese Schriften waren die Veranlassung, dass derselbe über grössere Industrial-Anstalten, Verbesserungen der vorzüglichsten böhmischen Eisenwerke, und anderer Landesfabriken häufig zu Rathe gezogen und ihm dadurch die Gelegenheit verschafft wurde, nicht bloss mit den Vortheilen und Mängeln dieser Anstalten, sondern auch mit den Ursachen der Aufnahme und des Verfalles anderer ähnlicher Fabriken in genaue Kenntniss zu kommen.

Durch die Allerhöchste Entschliessung vom 12ten November 1795 wurde mein Vater zum Beisitzer der k. k. Studien-Revisionshofkommission ernannt, und ihm das Referat über die physisch-mathematischen Studien übertragen. In dieser Eigenschaft fand er

9. Beweise zu den Formeln, welche im astronom. Jahrbuch von Berlin 1791 zur Berechnung der geographischen Längen aus Sonnenfinsternissen gebraucht worden (böhm. Abhandlung 1788. Prag und Dresden. 4to.) nebst einigen Zusätzen. Berliner astron. Jahrbuch auf 1792.
10. Uiber die, der wechselseitigen Anziehung des Saturns und Jupiters wegen erforderlichen Verbesserungen der Beobachtungen des Uranus, zur richtigen Erfindung der Elemente seiner wahren elyptischen Bahn. Berlin. Jahrbuch 1792.
11. Theorie des Wasserstosses in Schussgerinnen mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung. Prag 1795. 4to.
12. Versuche über die Flüssigkeit des Wassers bei verschiedenen Temperaturen. Prag 1798. 4to.
13. Theorie der Wellen sammt einer daraus abgeleiteten Theorie der Teichprofile. Prag 1804. 8vo.
14. Mechanische Theorie der oberschlächtigen Räder. Prag. 1809. 8vo.
15. Zwei Abhandlungen über Frachtwägen und Strassen und über die Frage, ob und in welchen Fällen der Bau schiffbarer Kanäle, Eisenwege oder gemachter Strassen vorzuziehen sey. Nach einer Untersuchung, ob die Moldau mit der Donau durch einen Schiffahrtskanal zu vereinigen sey. Prag 1813. 8vo.

Diese Abhandlung erschien später in französischer und ungarischer Sprache unter folgenden Titeln:

Mémoire sur les grandes routes, les chemins de fer et les canaux de navigation; traduit de l'Allemand, de M. F. de *Gerstner*, Chevalier etc. et précédé d'une introduction par M. P. S. *Girard*, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l' Institut, (Académie royale des Sciences). Paris, Bachelier, 1827.

Két-Ertekezés a' terh-Szekerekröl, Utakról és azon Kérdésröl, valljon a' hajókázó csatornák, vas-és töltöttútak közül, mellyiknek és micsoda esetben kelljen az elsöséget adni? annak megvizsgálása utan: a' Moldva-vizét lehessen-e a' Dunaval hajókázó csatornával egyesiteni? Ki dolgozta: *Vitéz Gerstner Ferencz*, magyarázta, hasznos jegyzésekkel és egy toldalékkal „a' vas-útakról" megbövitette *Vargha János*, Pesten, 1828.

16. Abhandlung über die Spirrallinie der Treibmaschinen. Prag 1816. 8vo.
17. Bemerkungen über das hydrometrische Pendel und über das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten des Wassers von der Oberfläche bis auf das Grundbett der Flüsse sich ändern. Prag 1819. 8vo.

Nebst vielen andern Aufsätzen und Beobachtungen, die theils in den Berliner astronom. Jahrbüchern, theils in den Wiener Ephemeriden enthalten sind.

sich verpflichtet, die Wichtigkeit technischer Studien als einen Gegenstand des öffentlichen Unterrichtes der höhern Aufmerksamkeit zu empfehlen, und diesen Antrag durch das kurz vorher errichtete polytechnische Institut in Paris und durch mehrere im Auslande schon früher bestandene Gewerbsschulen zu unterstützen. In den hierüber eingeleiteten Verhandlungen wurde festgesetzt, dass dieser Lehranstalt der Unterricht in den Haupt- und Realschulen vorangehen, und die technischen Berufsstudien sich an die philosophischen Lehranstalten eben so anschliessen sollten, wie es bei den Berufsstudien der Jurisprudenz und Medizin der Fall ist.

Da bei der grossen Zahl der Gewerbsleute und Mannigfaltigkeit ihrer Geschäfte ein gemeinschaftlicher Schulunterricht derselben kaum gedenkbar und auch aus dem Grunde überflüssig ist, weil der grösste Theil dieser Arbeitsleute nur den Anordnungen ihrer Vorsteher und der für jedes Geschäft aufgestellten Meister folgen muss, so ergibt sich von selbst, dass eine technische Lehranstalt hauptsächlich nur für die Bildung der Vorsteher und Beamten sorgen, diese aber auch so weit unterrichten müsse, als nöthig ist, um den gegenwärtigen Stand jeder Unternehmung, die Gründe, Vortheile und Mängel des bestehenden Verfahrens genau zu kennen, neue Erfindungen gehörig zu prüfen und zu würdigen, für ihre Einführung die nöthigen Einleitungen zu treffen, und überhaupt für alle dergleichen nöthige Werksverbesserungen, genaue Voranschläge über den hiezu erforderlichen Aufwand, und den zu erwartenden Nutzen verfassen zu können.

Aus diesen Gründen wurde bei dem ersten Antrage angenommen, dass der Zweck des technischen Institutes vorzüglich nur in der Bildung brauchbarer Beamten und Vorsteher für das Bauwesen, die Land- und Forstwirthschaft, das Berg- und Hüttenwesen etc. zu bestehen habe, um auf diese Art die Emporbringung der vaterländischen Gewerbe durch wissenschaftlichen Unterricht zu bewirken.

Mit dem Hofdekrete vom 25ten November 1801 wurde meinem Vater bei Gelegenheit der erledigten böhm. ständ. Ingenieurschule der Auftrag ertheilt, ein solches technisches Institut in Prag zu errichten, welches jedoch nur als ein erster Versuch angesehen, die Auslagen wegen der damaligen Zeitverhältnisse möglichst beschränkt und die nöthigen Erweiterungen erst in der Zukunft bei eintretenden günstigen Zeitverhältnissen bewilligt werden sollten. Die für den ersten Antrag bewilligten Auslagen wurden von den böhmischen Herren Ständen übernommen, meinem Vater nebst dem Direktorate und der an der Universität bisher versehenen, an das Institut gezogenen Professur der höhern Mathematik auch der Lehrgegenstand der Mechanik übertragen und das Institut im November 1806 eröffnet.

In allen Verhandlungen über die Errichtung des Institutes waren **Mechanik** und **Chemie** als die Hauptfächer des technischen Unterrichtes anerkannt und angeordnet worden. Da nun bei dem Gegenstande der höhern Mathematik nebst der höhern Analysis auch die höhere Mechanik und Astronomie vorgetragen wurde, so bemühte sich mein Vater in seinem 2^ten^ für ein grösseres Publikum über Mechanik gehaltenem Collegium seine Vorträge so einzurichten, dass selbst diejenigen Fortschritte, welche mit Hülfe der höhern Analysis gemacht wurden, den hierortigen Schülern des Institutes, bei denen nur Kenntniss der Elementarmathematik vorausgesetzt werden konnte, überzeugend vorgetragen, und diese Schüler überhaupt dahin geführt werden, um alle Arbeiten, die durch was immer für Kräfte der Menschen und Thiere, des Wassers, Windes, der Wasserdämpfe etc. bewirkt werden, gehörig zu würdigen und im Stande zu seyn, für jede mechanische Unternehmung bestimmte Anschläge machen zu können. Diese Vorlesungen der Mechanik wurden seit 24 Jahren von mehr als 2000 Zuhörern besucht und da über die Dienste, welche viele derselben zur Emporbringung unserer Landesindustrie und im Baufache leisteten, sich bereits die öffentliche Stimme ausgesprochen hat, auch später andere technische Institute im Inn- und Auslande errichtet wurden, so dürfte hierin der beste Beweis liegen, dass nicht nur die Wünsche des Publikums befriedigt, sondern auch die Regierungen veranlasst wurden, für die Beförderung technischer Studien kräftig einzuwirken.

Obgleich nun in neuern Zeiten sehr viele vortreffliche Schriften über technische Gegenstände erschienen sind, so mangelt es dennoch für das Fach der Mechanik an solchen Grundsätzen, welche für ihren Erfolg vollkommene Bürgschaft leisten, und wodurch diejenigen Kosten vermieden werden, über deren Aufwand man die Unternehmer grösserer Industrial-Anstalten noch immer häufig klagen hört. Die Ursache hievon liegt wohl grösstentheils darin, dass sehr viele Individuen nicht die Gelegenheit haben, technische Institute zu besuchen, und dass der grösste Theil der bisher erschienenen mechanischen Schriften bloss die allgemeine Theorie dieser Wissenschaft enthält, ohne sich auf die besondern Fälle der praktischen Anwendung hinreichend auszudehnen, und ausserdem die Kenntniss der höhern Analysis voraussetzt, welche nur dem kleinsten Theile jener Personen bekannt ist, die gerade mit mechanischen Gewerben zu thun haben; endlich kommen in solchen Schriften die wenigsten Beispiele in der Art vor, wie sie derjenige wünschen muss, der sich mit solchen Unternehmungen beschäftigt.

Aus diesen Gründen war es schon längst ein gefühltes Bedürfniss, die Vorträge meines Vaters über Mechanik, welche immer mehr und mehr Ausdehnung erhielten, durch den Druck bekannt zu machen, um sowohl das Studium dieser Wissenschaft

zu erleichtern, als auch dem grossen Publikum, welches an industriellen Unternehmungen Theil nimmt, ein Handbuch zu liefern, worin die meisten vorkommenden Fälle praktisch behandelt sind und Jedermann, der Rath bedarf, sich hierin Raths erholen könne. Mein Vater hätte diesem Bedürfnisse schon lange entsprochen, wenn ihm nicht seine vielen Dienstesgeschäfte die nöthige Zeit entzogen hätten, die zur Redakzion eines solchen grössern Werkes erfordert wird.

Nachdem ich den Gegenstand im J. 1815 am Institute gehört hatte, verwendete ich das Jahr 1817 ausschliessig auf die Redakzion der damaligen Lehrvorträge in der Absicht, sie öffentlich herauszugeben. Meine Anstellung im Jänner 1818 am k. k. polytechnischen Institute zu Wien und die Begleitung der Professur der prakt. Geometrie bis zum Oktober 1824, so wie die hierauf erfolgte Unternehmung des Baues der Eisenbahn zwischen der Moldau und Donau verhinderten diesen Vorsatz, bis er nach meiner Trennung von dieser Unternehmung wieder realisirt werden konnte. Um jedoch das Werk mit den neuesten und wichtigsten, durch die Erfahrung bewährten Konstrukzionen zu versehen, brachte ich vorerst den grössten Theil des Jahres 1829 in England zu, nachdem ich schon 1822 und 1827 zu gleichem Zwecke dahin gereist war. Seit meiner Rückkehr im November 1829 ist die Bearbeitung dieses Werkes meine Hauptbeschäftigung und wird es auch so lange bleiben, bis das Werk ganz beendigt ist. Bei der Redakzion war mein Hauptzweck, das Ganze auf eine vollkommen deutliche und fassliche Art abzuhandeln, damit es nicht bloss ein Hülfsbuch für jene, welche die Kollegien hören, sey, sondern auch diejenigen, welche Kenntnisse der Elementar-Mathematik besitzen, jedoch keine Vorlesungen besuchen können, in die Lage setze, das Werk zum Selbststudium zu benützen. Aus dieser Ursache ist in der Darstellung der Gang des Lehrvortrages, wobei nach jedem theoretischen Satze sogleich die Anwendungen folgen, beibehalten worden, obgleich dieser Gang von den meisten Lehrbüchern abweicht; ferner sind alle Beispiele und Aufgaben, die in dem Werke aufgelösst erscheinen, aus den in der Prax sich ergebenden Fällen entnommen, und so behandelt, damit man von denselben bei der Ausübung Gebrauch machen könne; um es endlich dem Werke an Vollständigkeit nicht fehlen zu lassen, hat man für jene, welche der höhern Analysis kundig sind, die weitere Ausführung der Rechnungen in besondern Noten unter dem Texte beigefügt.

Das ganze Werk erscheint in drei Bänden, wovon der 1te Band gegenwärtig ausgegeben wird, der 2te Ende 1831 und der 3te Band im Jahre 1832 bestimmt erscheint. Der 1te Band war mit 50 bis 60 Druckbogen angekündigt, erhielt jedoch 83 Bogen Text und 3 Bogen Vorrede, Verzeichniss der Herren Pränumeranten und Inhalt, nebst

40 Kupfertafeln, ohne dass desshalb der ohnehin geringe Pränumerationsbetrag erhöht wurde. Der Zweck des ganzen Werkes ist die Verbreitung nützlicher Kenntnisse, keineswegs aber pekuniärer Gewinn. Aus dieser Ursache wird der Umfang aller 3 Bände vorläufig auf 200 Druckbogen und 100 Kupfertafeln von gleicher Grösse wie die bisher erschienenen 40 festgesetzt; sollte jedoch diess Werk eine hinreichende Theilnahme finden, um die sehr bedeutenden, durch die bisherige Pränumeration von beiläufig 1400 Exemplaren noch keineswegs gedeckten Auslagen zu sichern, so wird auch der Umfang abermal erweitert, ohne den am Titel bemerkten Pränumerationspreiss zu überschreiten.

Prag den 20ten April 1831.

Franz A. R. v. Gerstner.

Inhalt des ersten Bandes.

Einleitung.

§. 1. Gegenstand der technischen Mechanik. — §. 2. Begriff von Kraft überhaupt; Muskelkraft, Cohaesionskraft, etc. — §. 3 bis 5. Gegenstände, welche bei jeder Arbeit zu betrachten sind. — §. 6. Eintheilung der technischen Mechanik. — §. 7. Begriff vom Widerstande oder Last. — §. 8. Begriff von Bewegung, Raum, Zeit und Geschwindigkeit. — 9. Erklärung der gleichförmigen Bewegung. — §. 10 und 11. Gleichung zwischen Raum, Zeit und Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Bewegung. — §. 12, 13 und 14. Beispiele hierüber.

I. Kapitel.

Thierische Kräfte und allgemeine Regeln über ihre Verwendung bei Arbeiten aus freier Hand.

§. 15 und 16. Umstände, welche auf die Bestimmung der thierischen Kräfte Einfluss nehmen. — §. 17 und 18. Aufstellung einer Formel für das Maass der Kraft der Arbeitsleute mit Rücksicht auf die Geschwindigkeit, welche bei der Arbeit ausgeübt wird. — §. 19. Dasselbe mit Rücksicht auf die tägliche Arbeitszeit. — §. 20. Bestätigung der gefundenen Kraftformel bei ihrer Anwendung in verschiedenen Fällen. — §. 21 bis 23. Dasselbe durch die Leistungen des Militärs bei Märschen und bei landwirthschaftlichen Verrichtungen. — §. 24 und 25. Bestätigung der gefundenen Kraftformel durch die Leistungen, welche *Walcher, Bernoully, de la Hire, Coulomb, Desaguliers, Nordwall, Vauban* u. a. über die Kräfte der Menschen bei verschiedenen Arbeiten anführen. — §. 26. Rücksicht auf die Gewohnheit bei thierischen Kräften. — §. 27. Rücksicht auf das Geschlecht der Arbeitsleute. — §. 28. Kraft der Pferde nach den Leistungen, welche *Poda, Nordwall, Belidor, Walcher, Desaguliers*, u. a. hierüber anführen. — §. 29 und 30. Dasselbe nach den Leistungen der Cavallerie. — §. 31. Ausserordentliche Leistungen der Pferde. — §. 32. Kraft der Menschen und Pferde im Vergleiche mit ihrem Gewichte. — §. 33. Kraft anderer Thiere. — §. 34. Begriff von der Wirkung oder dem Effekte der Arbeiter.

§. 35. Einrichtung der Arbeit in Hinsicht auf den grösstmöglichen Effekt. Erster Fall, wenn theilbare Lasten auf eine unbestimmte Entfernung zu tragen sind und der Taglohn der Arbeiter gegeben ist. — §. 36. Beispiel hierüber. — §. 37. Zweiter Fall, wenn die Tragungskosten für den Zentner und die Meile gegeben sind, und nach dem grösstmöglichen Verdienste der Arbeiter gefragt wird. — §. 38. Vergleichung der Arbeiten der Menschen mit jenen der Pferde und anderer Thiere. — §. 39. Dritter Fall. Ein Arbeiter erhält eine bestimmte Last zu tragen, es fragt sich, welches ist die grösste Entfernung, auf welche er die Last in einem Tage zu tragen im Stande ist. — §. 40. Beispiele hierüber. — §. 41 bis 43. Vierter Fall. Auflösung der Aufgabe §. 35 und 37. für den Fall, wenn die Last in einem Traggefässe fortgebracht wird. Beispiel hierüber. — §. 44. Fünfter Fall. Wenn Lasten auf kurze Entfernungen getragen, und in einem Tage mehrere Gänge gemacht werden, worauf der Arbeiter jedesmal ohne Ladung zurückkehrt, zu bestimmen, wie die Arbeit einzurichten sey, wenn auf das Traggefäss keine Rücksicht genommen wird. — §. 45. Beispiel hierüber. — §. 46. Sechster Fall. Auflösung der Aufgabe §. 44 für den Fall, wenn die Last in einem Traggefässe fortgebracht wird. — §. 47. Anschläge für den Transport von grössern Lasten durch Handarbeiten. — §. 48. Genauere Auflösung der Aufgabe §. 47. — §. 49. Tabelle über die vortheilhaftesten Verhältnisse für das Fortschaffen der Lasten mit Rücksicht auf das Gewicht der Traggefässe, Schubkarren, Tonnen, Wägen u. s. w. — §. 50. Schlussfolgerungen für die Arbeiten aus freier Hand. — Beleuchtung der Einwürfe gegen die Anwendung der §. 19 gefundenen Kraftformel.

II. Kapitel.

Statik und vortheilhafteste Verwendung der thierischen Kräfte bei einfachen Maschinen.

§. 51. Eintheilung der einfachen Maschinen. — §. 52. Mathematischer und physischer Hebel. — §. 53. Hebel der ersten und zweiten Art. — §. 54. Begriff vom Schwerpunkte. — §. 55. An einem Hebel der ersten Art ist Gleichgewicht, wenn die Kräfte oder Gewichte sich verkehrt wie ihre Hebelsarme verhalten. — §. 56. Praktischer Versuch hierüber. — §. 57. Beweis, dass der Satz §. 55. auch in jeder schiefen Lage Statt finde. — §. 58. Statische Momente. — §. 59 und 60. Beispiele vom Hebel der ersten Art. — §. 61. Beweis des Satzes §. 55. für einen Hebel der zweiten Art. — §. 62. Praktischer Versuch hierüber. — §. 63. Bedingnisse des Gleichgewichtes, wenn an einem Hebel der ersten Art drei Kräfte angebracht sind. — §. 64. Bestimmung des Schwerpunktes zweier Gewichte an einem Hebel. — §. 65. Gleichgewicht bei einem physischen Hebel. Beispiel hierüber. — §. 66. Bedingnisse des Gleichgewichtes, wenn an einem Hebel mehr als drei Kräfte wirken. — §. 67. Bestimmung des Schwerpunktes mehrerer Gewichte an einem Hebel. — §. 68. Bedingnisse des Gleichgewichtes für den Fall, wenn die Körper nicht in einer und derselben geraden Linie liegen. — § 69. Bestimmung des Schwerpunktes für den letztern Fall. — §. 70. Verhältniss der Kraft zur Last bei einem zusammengesetzten Hebel. — §. 71. Verhältnisse der Räume, welche zwei Körper an einem Hebel in gleicher Zeit zurücklegen. Beispiel hierüber. — §. 72. Dasselbe bei einem zusammengesetzten Hebel.

Inhalt des ersten Bandes.

Erklärung der mechanischen Momente. — §. 73. Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers auf praktische Art. — §. 74. Theoretische Bestimmung des Schwerpunktes einer Linie und eines Dreieckes. — §. 75. Dasselbe für ein Trapez. — §. 76. Dasselbe für ein Poligon. — Dasselbe für eine krumme Linie, eine von einer krummen Linie begränzte Fläche, und Beispiele hierüber. — §. 77. Bestimmung des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide. — §. 78. Dasselbe für eine vielseitige Pyramide und den Kegel. — §. 79. Dasselbe, wenn mehrere Körper mit einander in einer festen Verbindung sind. — §. 80. Dasselbe für einen abgestutzten Kegel. — §. 81 und 82. Verführung mit Schubkarren und Scheibtruhen, Regeln, welche hiebei zu beobachten sind, Berechnung des Effektes nebst Beispielen hierüber.

§. 83 bis 85. Rad an der Welle. Erklärung der verschiedenen Gattungen Haspeln und Winden. — §. 86. Verhältniss der Kraft zur Last bei einem Rade an der Welle. — §. 87 und 88. Regeln für das Aufziehen der Baumaterialien auf das Baugerüst eines Gebäudes oder der Erze aus einem Bergschachte; Effekt dieser Arbeit; Beispiel hierüber. — §. 89 bis 91. Vergleichung der Arbeit bei einem Rade an der Welle mit der Leistung der Menschen bei dem Tragen von Lasten. Zusammengesetzte Räderwerke; Berechnung eines Aufzuges mit denselben; Vortheile der Anwendung dieser Maschinen gegen die Handarbeit. — §. 92 bis 94. Regeln zur Bewirkung des grössten Effektes bei einem Rade an der Welle, wenn nach jedem Aufzuge eine Stillstandszeit eintritt. — §. 95. Tabelle über die vortheilhaftesten Verhältnisse bei dem Aufziehen der Lasten mittelst des Rades an der Welle mit Rücksicht auf eine nach jedem Aufzuge gegebene Stillstandszeit.

§. 96. Feste und bewegliche Rolle. — §. 97. An einer festen Rolle ist im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft der Last gleich. — §. 98. Vortheile, welche der Gebrauch einer festen Rolle gewährt. — §. 99 bis 101. Verhältnisse der Kraft zur Last bei einer beweglichen Rolle. — §. 102 bis 106. Flaschenzüge, Verhältniss der Kraft zur Last, Gebrauch der Flaschenzüge. — §. 107. Regeln für die Einrichtung der Arbeit, wenn Baumaterialien mittelst einer Winde und Flaschenzuges auf ein Gebäude aufgezogen werden. — §. 108. Beispiel hierüber. — §. 109. Einrichtung der Maschine, wenn die Ruhezeit nach jedem Aufzuge gegeben ist. — §. 110. Einrichtung der Arbeit, wenn sowohl die Maschine, als auch die nach jedem Aufzuge nöthige Stillstandszeit gegeben ist. — §. 111 und 112. Gegenwinde, Verhältniss der Kraft zur Last; Berechnung eines Aufzuges mit einer Gegenwinde; Fälle für die Anwendung der Gegenwinde.

§. 113 bis 116. Wenn drei Kräfte gegen einen in der Ebene derselben gelegenen Punkt wirken und ihre Richtungen gegeben sind, die Verhältnisse dieser drei Kräfte für den Stand ihres Gleichgewichtes zu finden. — §. 117 Praktischer Versuch hierüber. — §. 118. Zerlegung einer Kraft in mehrere Seitenkräfte. — §. 119. Zusammensetzung zweier oder mehrerer Kräfte in eine mittlere Kraft. — §. 120. Anwendung dieser Sätze zur Berechnung der Spannung eines belasteten Seiles. — §. 121. Kniehebel; Gebrauch derselben bei einer Prägmaschine.

§. 122. Erklärung der schiefen Ebene. — §. 123 bis 125. Verhältniss der Kraft zur Last, wenn die erste parallel zur schiefen Fläche, oder horizontal, oder endlich unter irgend einem Winkel gegen die schiefe Fläche wirkt. — §. 126. Regeln für die Aushebung eines Grabens (Cunette) und Verführung des ausgehobenen Erdreiches auf eine bestimmte Entfernung und Höhe mit Scheibtruhen. Beispiel hierüber. — §. 127. Berechnung der Arbeit, wenn bei Gebäuden Stockwerke aufgeführt und die Baumaterialien mit Scheibtruhen über schiefe Flächen hinaufgeschafft werden. Tabelle hierüber. — §. 128 und 129. Vortheilhafteste Steigung für Baugerüste und Berechnung der Anzahl Handlangertage, welche zur Beischaffung der Baumaterialien für eine Kubikklafter Mauerwerk zu ebener Erde, im 1ten Stockwerke, 2ten Stockwerke u. s. w. benöthigt werden. — §. 130. Dieselbe Berechnung bei dem Gebrauche eines Haspels und Bestimmung, in welchen Fällen Laufgerüste oder Haspel den Vorzug verdienen. — §. 131. Erklärung der Tret- oder Laufräder und Tretscheiben. — §. 132. Berechnung der Wirkung eines Tretrades. — §. 133. Nachtheile der Treträder; Mechanismen zur Vermeidung von Unglücksfällen. — §. 134. Tretscheibe, Wirkung derselben. — §. 135. Aufzug der Lasten auf eine bestimmte Höhe mittelst eines Tretrades; Einrichtung der Arbeit und Effekt derselben.

§. 136 bis 138. Erklärung der Schraube, Schraubenmutter, Schraubenspindel, Schraube mit mehrfachen Gewinden etc. — §. 139. Projektion der Schraubengewinde auf eine ebene Fläche. — §. 140 und 141. Verhältniss der Kraft zur Last bei einer Schraube. Berechnung einer einfachen Presse. — §. 142. Vortheile bei dem Gebrauche der Schraube. — §. 143. Verhältniss der Kraft zur Last bei einer Schraube ohne Ende. — §. 144. Dasselbe bei der Verbindung eines Räderwerkes mit einer Schraube. — §. 145. Erklärung der Hebewinde mit Vorgelege und einer französischen Winde. — §. 146. Erklärung und Berechnung einer englischen Winde. — §. 147. Ein Dachstuhl soll mittelst zweier englischer Winden gehoben werden; es fragt sich, wie die Arbeit einzurichten sey; Beispiel hierüber.

§. 148. Erklärung des einfachen und doppelten Keiles. — §. 149. Verhältniss der Kraft zur Last bei einem einfachen Keile. — §. 150. Die Grösse der Kraft anzugeben, um ein Holz von gegebener Länge und Festigkeit zu spalten. — §. 151. Erklärung einiger Gattungen Hacken und Aexte. — §. 152. Schlussbetrachtung über alle einfachen Maschinen.

A. Hebladen.

§. 153. Erklärung der Hebladen. — §. 154. Ausziehen der Pfähle mittelst eines Hebels. — §. 155. Ausreissen der Baumstöcke mittelst eines Hebels. — §. 156. Erklärung und Berechnung der deutschen Heblade. — §. 157. Dasselbe für die schwedische Heblade. — §. 158 und 159. Dasselbe bei zwei französischen Hebladen. — §. 160. Bestimmung der Entfernung der Löcher oder Zähne bei den Hebladen. — §. 161. Heblade, um ganze Bäume sammt den Wurzeln aus der Erde zu heben. — §. 162. Transportabler englischer Kranich zum Ausreissen der Baumstöcke. — §. 163. Zugschrauben zum Ausziehen der Pfähle in Flüssen; Dimensionen dieser Schrauben, welche von der k. böhm. Wasserbaudirektion an der Moldau und Elbe gebraucht werden.

B. Wagen.

§. 164. Verschiedene Gattungen Wagen. — §. 165. Nöthige Eigenschaften der Krämerwage. — §. 166 und 167. Gleichheit der Hebels- oder Wagebalkenarme, Prüfung und Adjustirung derselben. — §. 168. Das richtige Gewicht einer Waare mittelst einer unrichtigen Krämerwage zu finden. — §. 169. Bedingnisse, unter welchen sich eine Wage bei gleichen Gewichten horizontal stellt. — §. 170. Empfindlichkeit einer Krämerwage, Berechnung des Ausschlages durch eine kleine Gewichtszulage. — §. 171. Bedingnisse, unter welchen ein grosser Ausschlag erfolgt. — §. 172. Trägheit einer Krämer-

wage; Mittel zur Vermeidung ihrer nachtheiligen Folgen. — §. 173. Vortheile der schneidigen Ende der Achsen, Berechnung des Fehlers, wenn sie nicht in einer und derselben geraden Linie liegen. — §. 174. Gebrauch der Spitzen statt schneidiger Achsen. — §. 175. Spielungs- oder Schwingungszeiten einer Wage. — §. 176. Beispiele über die Dimensionen einer Krämerwage zur Bewirkung eines bestimmten Ausschlages und umgekehrt. — §. 177. Berechnung des genauern Gewichtes einer Waare aus dem Ausschlage an der Skale. — §. 178. Bemerkungen für die praktische Ausfertigung einer Wage. — §. 179. Beschreibung einer im technischen Institute zu Prag für den Gebrauch bei chemischen Untersuchungen verfertigten Probierwage; Abwägungen mit derselben und Berechnungen ihrer Genauigkeit. — §. 180. Erklärung der **Schnellwage**. — §. 181 bis 183. Eigenschaften einer guten Schnellwage, Eintheilung derselben. — §. 184 und 185. Empfindlichkeit der Schnellwage, Berechnung des Ausschlages und Angabe der Umstände, unter welchen eine grosse Empfindlichkeit erfolgt. Trägheit der Schnellwage. — §. 186. Beschreibung und Einrichtung der Schnellwage zum Abwägen beladener Wägen. — §. 187. Erklärung der **Wage mit einem Zeiger**. — §. 188 bis 190. Eintheilung der Skale dieser Wage für den senkrechten oder horizontalen Stand der erstern. Beispiel hierüber. — §. 191. Erklärung der **Garnwage** zur Sortirung der baumwollnen Garne. — §. 192 und 193. Berechnung und Eintheilung der Skale einer Garnwage nach Verhältniss der Nummern. — §. 194 und 195. Berechnung der Eintheilung einer Garnwage mit einem Kreisbogen; Bemerkungen hierüber. — §. 196 und 197. Garnwage mit einer Feder; Bemerkungen hierüber. — §. 198. **Verjüngte Wagen** zur Bestimmung der Schmelzwürdigkeit der Erze. Verfertigung der Probiergewichte. — §. 199. Probierwage zum Abwägen des Getreides. — §. 200. Krämerwage mit ungleichen Hebelsarmen. — §. 201. Beschreibung und Berechnung einer in Schweden gebräuchlichen **Schiffswage**. — §. 202. Erklärung der englischen **Strassen- oder Mauthwage**. — §. 203 bis 206. Berechnung derselben und Beispiel hierüber. — §. 207. **Tragbare Brückenwage** der Hrn. *Rolle* und *Schwilgue* in Strassburg. — §. 208. Berechnung derselben. — §. 209. Erklärung der **Federwagen**. — §. 210. Dynamometer von *Regnier* in Paris; Erklärung und Gebrauch desselben. — §. 211 und 212. Schwierigkeit bei der Bestimmung der mittlern Kraft mittelst Federwagen, und Angabe einer eigenen hiezu dienlichen Einrichtung. — §. 213. Einrichtung einer Wage, welche nebst dem Gewichte zugleich auch den Preiss der Waare anzeigt. —

C. Göpel.

§. 214. Erklärung des gewöhnlichen Pferdegöpels. — §. 215 und 216. Nachtheiliger Einfluss der Schwere des Zugseiles bei der Förderung aus grossen Tiefen für die Zugkraft; Beispiel hierüber. — §. 217. Bisherige Vorschläge zur Beseitigung dieses Einflusses. — §. 218 bis 223. Beschreibung eines vom Hrn. Gubernial-Rath R. v. *Gerstner* angegebenen, auf *Krussna Hora* in Böhmen erbauten Pferdegöpels mit Spiralgewinden, sammt der Seilleitung, dem Bremswerke, Auslaufehund etc. — §. 224 bis 226. Berechnung des grössten und kleinsten Halbmessers eines Spiralkorbes; Bemerkungen hierüber. — §. 227 und 228. Berechnung der übrigen Halbmesser und der krummen Linie des Profils eines Spiralkorbes. — §. 229. Umstände, bei welchen diese Spirallinie eine gleichförmige Steigung erhält, oder in die Oberfläche eines geradlinigten Kegels fällt. — §. 230. Verfahren, welches bei der Verfertigung und Einführung der eisernen Treibkette in *Krussna Hora* angewendet wurde. Berechnung und Erfahrungen über den Effekt dieser Maschine. — §. 231. Berechnung des Gewichtes der Kette, der Dimensionen eines Pferdegöpels und der Anzahl Pferde, welche nöthig sind, um ein bestimmtes Quantum Erze aus einer gegebenen Tiefe täglich zu fördern. — §. 232. Bemerkungen über den Einfluss der Widerstände der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile. — §. 233. Bemerkungen hinsichtlich des schiefen Zuges der Pferde. — §. 234. Berechnung des Bremswerkes bei dem Göpel.

III. Kapitel.

Festigkeit der Körper.

§. 235. Begriffe über Festigkeit, Ausdehnung und Elasticität der Körper. — §. 236. Eintheilung der Festigkeit in absolute, relative, rückwirkende und jene, womit die Körper der Drehung widerstehen.

A. Absolute Festigkeit der Körper.

§. 237. Allgemeine Erfahrungen über die absolute Festigkeit. — §. 238. Allgemeines Gesetz für das Kraftvermögen elastischer Körper. — §. 239. Anwendung hievon auf das Tragungsvermögen der Seile. — §. 240 und 241. Erfahrungen über die Festigkeit der Seile. — §. 242 bis 244. Folgerungen hieraus. — §. 245. Vorzüge eiserner Ketten vor den Seilen. — §. 246 bis 248. Treib-Ketten von zunehmender Stärke; Berechnung des Gewichtes derselben für jede einzelne Klafter sowohl, als für die ganze Länge der Ketten. Beispiel hierüber.

§. 249. Versuche von *Musschenbroek* über die absolute Festigkeit des Gusseisens, Schmiedeeisens und Stahles. — §. 250. Versuche von *Rondelet* über die absolute Festigkeit des Schmiedeeisens. — §. 251. Versuche von *Telford* und *Brown* mit Schmiedeeisen. — §. 252 bis 254. Versuche von *Brunel, Rennie* und *Brown* mit Gusseisen, Schmiedeeisen und Stahl. — §. 255. Versuche von *Navier* mit gewalztem Bleche. — §. 256. Versuche von *Dufour* mit Drähten.

§. 257. Einleitung zu den Versuchen, welche im Jahre 1824 am technischen Institute zu Prag über die absolute Festigkeit des reinsten Eisens mit Clavierdrähten und stählernen Uhrfedern gemacht wurden. — §. 258. Beschreibung des hiezu gebrauchten Apparates. — §. 259 bis 264. Beschreibung von 10 Versuchen und hieraus abgeleitete allgemeine Gesetze. — §. 265. Absonderung der elastischen und bleibenden Ausdehnung der versuchten Drähte. — §. 266. Berechnung der grössten Ausdehnung und der grössten Gewichte, welche die versuchten Eisendrähte getragen haben. — §. 267. Bemerkung über die Ausdehnung jener Körper, die bereits früher belastet wurden. — §. 268. Anwendung auf die Probe der Glieder bei den Kettenbrücken. — §. 269. Berechnung der Belastung, welche einem eisernen Stabe mit Beibehaltung seiner Elasticität aufgelegt werden kann. — §. 270. Beispiel hierüber. — §. 271 bis 273. Anwendung dieser Theorie auf die Berechnung der Stärke der Glieder einer Kettenbrücke, damit die Biegung der Fahrbahn oder das Einsinken derselben in der Mitte ein gegebenes Maass nicht überschreite. — §. 274. Verhältniss des Kraftvermögens zum elastischen Spielraume bei den versuchten Clavierdrähten, gemeinen Drähten und stählernen Uhrfedern. Vorzug der Kettenbrücken von Stabeisen gegen jene von Draht und Stahl; Ausdehnung der Kettenglieder durch die Wärme und Mittel zur Verminderung derselben. — §. 275 bis 277. Schlussbemerkungen über die Festigkeit des Eisens.

§. 278. Versuche von *Musschenbroek* über die absolute Festigkeit der Hölzer und einiger Metalle. — §. 279. Versuche des Professor *Barlow* über die absolute Festigkeit der Hölzer. — §. 280. Beschreibung des Apparates, womit Hr. *J. A. Eytelwein* die absolute Festigkeit verschiedener Holzarten prüfte und Resultate seiner Versuche. — §. 281. Beispiel über die Stärke einer Hängsäule.

B. Relative Festigkeit der Körper.

§. 282. Erklärung der relativen Festigkeit. — §. 283 bis 287. Die Gewichte, welche zwei gleichartige, an einem Ende eingemauerte Balken gleich stark spannen oder abbrechen, verhalten sich wie die Produkte aus den Querschnittsflächen in die Höhen, und verkehrt wie die Längen der Balken. — §. 288. Versuche von *Musschenbroek* über die relative Festigkeit der Hölzer. — §. 289. Beispiel hierüber. — §. 290. Berechnung des Tragungsvermögens eines an einem Ende eingemauerten Balkens mit Rücksicht auf sein eigenes Gewicht. — §. 291 und 292. Berechnung des Tragungsvermögens eines an beiden Enden aufliegenden Balkens. — §. 293. Berechnung der Belastung, welche ein an beiden Enden aufliegender Balken in jedem Punkte seiner Länge zu tragen vermag. Beispiel hierüber.

§. 294. Versuche vom Prof. *Barlow* über die relative Festigkeit des Tannenholzes. — §. 295. Versuche von Hrn. *J. A. Eytelwein* über die relative Festigkeit der Bauhölzer. — §. 296. Versuche von *Rondelet* über die relative Festigkeit des Gusseisens. — §. 297. Versuche von *Tredgold* über die relative Festigkeit der Steine. — §. 298. Versuche vom Prof. *Barlow* über die relative Festigkeit der Ziegel.

§. 299. Tragungsvermögen schiefliegender Balken. — §. 300. Tragungsvermögen der gleichförmig über die ganze Länge belasteten, an beiden Enden unterstützten Balken. — §. 301. Tragungsvermögen eines an beiden Enden eingemauerten Balkens. — §. 302. Dimensionen des stärksten Balkens, welcher aus einem gegebenen Stamme gezimmert werden kann. — §. 303. Vergleichung der Tragungsfähigkeit eines Modelles mit jener des darnach ausgeführten Baues. Beispiel für eine Brücke. — §. 304. Bestimmung der Anzahl der Endsbäume bei einer Brücke von gegebener Breite und Länge, wenn die Dimensionen der Endsbäume, Streuhölzer etc. nebst der Last, welche die Brücke überdiess tragen soll, gegeben ist. Beispiel hierüber. — §. 305. Gespannte Röste bei Brücken von grössern Spannweiten. — §. 306. Bestimmung der zwei Unterstützungspunkte für einen, auf seiner ganzen Länge gleichförmig belasteten Balken, wenn derselbe auf den zwei Unterlagen und in der Mitte gleich weit vom Bruche entfernt seyn soll. — §. 307. Tragungsvermögen eines Cylinders. — §. 308. Berechnung der Stärke einer Welle und ihrer Zapfen. — §. 309. Tragungsvermögen eines abgestutzten Kegels. Anwendung auf den Windbruch der Bäume. — §. 310. Berechnung des Längenprofils eines Trägers, welcher in jedem Querschnitte eine gleiche Tragkraft haben soll. — §. 311. Beispiel für eine Eisenbahnschiene aus Gusseisen.

§. 312 und 313. Die Biegungen zweier gleichartigen Balken sind den Produkten aus den aufgelegten Gewichten in die Würfel der Längen, und verkehrt den Produkten aus den Breiten in die Würfel der Höhen proportional. Bei einem vollkommen elastischen Körper verhält sich die Biegung zur Längenausdehnung, wie das Quadrat der halben Länge zum Quadrate der Höhe dieses Körpers. — §. 314. Resultate der bisher über die Biegung der Körper angestellten Versuche. — §. 315. Beschreibung des Apparates, womit im Jahre 1830 am technischen Institute zu Prag Versuche über die Biegung der Körper angestellt wurden. — §. 316 bis 319. Beschreibung des ersten Versuches mit einem Eichenstabe, Ableitung eines allgemeinen Gesetzes hieraus und Betrachtungen hierüber. — §. 320. Berechnung wie viel ein Stab von einer gegebenen Belastung gebogen wird, oder wie viel derselbe tragen könne, wenn die hiebei zulässige Biegung bestimmt ist. — §. 321. Ableitung der zulässigen Biegung der Bauhölzer nach vorhandenen Erfahrungen. Beispiele hierüber. — §. 322. Beschreibung und Berechnung von 11 Versuchen, welche im technischen Institute zu Prag im November 1830 über die Biegung verschiedener Hölzer angestellt wurden. — §. 323. Bestimmung wie weit die Balken bei der Annahme einer Biegung von 1 : 288 vom Bruche entfernt sind. — §. 324. Allgemeine Berechnung hierüber. — §. 325. Vergleichung der gefundenen Resultate mit jenen von *Tredgold*.

§. 326. Beschreibung und Berechnung von 7 Versuchen, welche in Prag über die Biegung von Gusseisen angestellt wurden. — §. 327. Vergleichung der Resultate derselben mit jenen von *Tredgold*. — §. 328. Beschreibung und Berechnung von 7 Versuchen über die Biegung des Schmiedeeisens. — §. 329. Vergleichung der Resultate derselben mit jenen von *Tredgold*; Verhältniss des Tragungsvermögens der Hölzer, des Gusseisens und des Schmiedeeisens bei gleicher Biegung derselben; Bestimmung, in welchem Falle Gusseisen oder Holz vorzuziehen sey. — §. 330. Beispiele über die Dimensionen gusseiserner Barren. — §. 331. Berechnung der Ausdehnung des Guss- und Schmiedeeisens aus der Biegung desselben.

§. 332. Dimensionen des stärksten Balkens, welcher aus einem gegebenen Stamme gezimmert werden kann, mit Rücksicht auf dessen Biegung. — §. 333. Biegung der Balken, welche auf ihrer ganzen Länge gleichförmig belastet sind.

C. Rückwirkende Festigkeit der Körper.

§. 334. Allgemeines Gesetz für die rückwirkende Festigkeit gleichartiger und vollkommen elastischer Körper. Anwendung hievon bei Sprengwerken von Holz oder Bogen-Brücken von Gusseisen. — §. 335. Bemerkung über die rückwirkende Kraft unvollkommen elastischer Körper. — §. 336. Versuche von *Rennie* über das Zerdrücken verschiedener Körper. — §. 337. Tragungsvermögen aufrechtstehender elastischer Säulen. — §. 338. Bestimmung der Stärke über einander stehender belasteter Mauern, wenn sie gegen das Zerdrücken gleich gesichert seyn sollen. Beispiel hierüber.

D. Widerstand der Körper gegen Drehung.

§. 339. Berechnung des Widerstandes, welchen elastische cylindrische Körper oder hohle Röhren gegen Drehung leisten. — §. 340. Dasselbe für quadratförmige solide und hohle Schafte. — §. 341. Beschreibung des Apparates, welcher bei den im Jänner 1831 im technischen Institute zu Prag angestellten Versuchen über die Drehung der Körper gebraucht wurde. — §. 342. Beschreibung und Berechnung von 3 Versuchen mit Holz- und Schmiedeeisen, das letztere bei dem Vor- und Rückwärtsdrehen. — §. 343. Bemerkungen über diese Versuche. — §. 344. Berechnung der Stärke hölzerner Wellen nach praktischen Erfahrungen hierüber. — §. 345. Berechnung der Stärke schmiedeeiserner und gusseiserner Wellen. — §. 346. Schlussübersicht der Berechnungen über die Festigkeit der Körper.

IV. Kapitel.

Statische Baukunst.

§. 347. Erklärung des Gegenstandes. — §. 348. Begriffe über Stabilität der Körper und das Maass derselben. — §. 349. Berechnung der Stabilität einer Mauer. — §. 350 und 351. Druck einzelner schiefstehender Körper. — §. 352 und 353. Berechnung des wagerechten Druckes schiefstehender Balken. — §. 354. Dasselbe für ein Gewölbe. — §. 355. Bestimmung des mittlern Druckes. — §. 356. Einfluss des wagerechten und senkrechten Druckes auf die Stabilität der Körper. — §. 357. Apparat zu Versuchen über die Grösse des wagerechten Druckes. — §. 358. Berechnung der Drücke bei einem Pultdache. — §. 359. Berechnung der Drücke bei einem Dachstuhle mit einfachem Hängwerke. — §. 360. Beispiel hierüber. — §. 361. Berechnung der Drücke bei einem doppelten Hängwerke. — §. 362. Beispiel hierüber. — §. 363. Berechnung der Drücke bei einem Sprengwerke und Beispiel hierüber. — §. 364. Druck zweier schief übereinander gestellter Balken. — §. 365. Verzeichnung der gebrochenen Dächer. — §. 366 und 367. Gesetz für schiefe Zusammenstellungen mehrerer Körper übereinander und ihre Verzeichnung. — §. 368. Anwendung auf Gewölbe.

§. 369. Erklärung der verschiedenen Gattungen Gewölbe. — §. 370. Grundsätze für die Theorie der Gewölbe. — 371. Bau freier Gewölbe nach der Kettenlinie. — §. 372. Verzeichnung der Kettenlinie in einem gegebenen Falle. — §. 373 und 374. Bemerkungen über Kettengewölbe. — §. 375. Belastungshöhe für das Gleichgewicht freier Kreisgewölbe, Beispiel hierüber. — §. 376. Dasselbe für elyptische Gewölbe. — §. 377. Untersuchung der Bedingnisse, unter welchen freie Kreisgewölbe sich selbst zu erhalten vermögen. — §. 378. Stützlinie für das elyptische Gewölbe. — §. 379. Stützlinie für horizontal ausgemauerte Gewölbe. — §. 380. Stützlinie für elyptische Brückengewölbe. — §. 381. Stützlinie für scheidrechte Gewölbe. — §. 382. Weitere Ausführung der Theorie elyptischer Brückengewölbe. — §. 383. Anzahl der Stützlinien solcher Gewölbe — §. 384 bis 386. Verzeichnung elyptischer Lehrbögen. — §. 387. Erforderliche Belastung für freie elyptische Kuppelgewölbe. — §. 388 und 389. Stützlinie für freie elyptische Kuppelgewölbe. — §. 390 und 391. Uibereinstimmung dieser Theorie mit den bestehenden Kuppelgewölben. §. 392 bis 394. Stärke der Widerlagsmauern für Gewölbe nebst Beispielen. —

§. 395. Geschichte der Kettenbrücken. — §. 396 bis 402. Beschreibung der Kettenbrücke zu *Hammersmith* über die *Themse*. — §. 403 und 404. Baukosten der *Hammersmith*kettenbrücke. — §. 405. Vergleichung dieser Kosten mit jenen anderer englischer Brücken. — §. 406 bis 412. Beschreibung der Kettenbrücke über den Meeresarm *Menai strait* zur Verbindung der Insel *Anglesey* mit dem festen Lande von England. — §. 413 bis 419. Beschreibung der vom Herrn *Navier* über die *Seine* in *Paris* entworfenen Kettenbrücke. — § 420. Beschreibung der nach Art der *Hammersmith*konstrukzion über die *Seine* ausgeführten Kettenbrücke. — 421. Kettenbrücke zu *Bamberg* über die *Regnitz*. — §. 422. Kettenbrücke über die *Saale* bei *München - Nienburg*. — §. 423. Stahlbrücke in Wien, Drahtbrücken in Frankreich. — §. 424 und 425. Bestimmung der krummen Linie belasteter Ketten, ihrer horizontalen Spannung, nöthigen Stärke etc. — §. 426 bis 428. Vergleichung dieser Theorie mit der *Menai*brücke. — §. 429. Vergleichung mit der *Hammersmith*brücke. — §. 430. Aufsteigen und Einsinken der Bahn einer Kettenbrücke mit 2 Bögen und einem Mittelpfeiler. — §. 431. Dasselbe für eine Brücke mit 3 Bögen und 2 Mittelpfeilern. — §. 432 und 433. Bemerkungen hierüber. — §. 434. Anwendung dieser Theorie auf die in Prag zu erbauende Kettenbrücke über den Moldaufluss. — §. 435. Stärke der Ketten zu beiden Seiten der Pfeiler.

V. Kapitel.

Widerstände der Reibung, Unbiegsamkeit der Seile und ihr Einfluss auf den Effekt der Maschinen.

§. 436. Erklärung des Reibungswiderstandes und der ältern Versuche hierüber. — §. 437. Gleitende und wälzende Reibung. — §. 438. Gesetze der Reibung nach *Coulomb*. — §. 439 und 440. Dessen Versuche über Reibung. — §. 441. Anwendungen hievon. — §. 442. Versuche über die wälzende Reibung. — §. 443 bis 445. Unbiegsamkeit der Seile und Versuche hierüber. — §. 446 und 447. Einfluss der Unbiegsamkeit der Seile und Methode dieselbe, so wie auch die Reibung bei einer Maschine zu versuchen. — §. 448. Reibung bei dem Hebel und der Wage. — §. 449 bis 453. Reibung und Unbiegsamkeit der Seile bei dem Rade an der Welle. — §. 454. Reibung eines stehenden Zapfens. — §. 455 bis 457. Reibung und Unbiegsamkeit der Seile bei der Rolle. — §. 458 bis 461. Reibung und Unbiegsamkeit der Seile bei Flaschenzügen. — §. 462 und 463. Eigene Versuche über die Reibung bei Flaschenzügen. — §. 464. Reibung eines Seiles, wenn es um einen Cylinder geschlungen wird.

§. 465. Bemerkung über die Reibung der Körper, die auf horizontalen Flächen fortgezogen werden. — §. 466 bis 469. Reibung auf der schiefen Fläche, wenn ein Körper hinauf bewegt wird. — §. 470. Bestimmung der Richtung der Zuglinie für den Fall der vortheilhaftesten Bespannung. — §. 471. Reibung bei der schiefen Fläche, wenn ein Körper herabbewegt wird. — §. 472. Reibung bei der Schraube. — §. 473. Schrauben, die von selbst aufgehen. — §. 474. Reibung bei den Winden und Hebern. — §. 475. Stärke der Schraubengewinde. — §. 476. Reibung bei dem Keile. — §. 477. Einfluss der Reibung auf den Effekt oder das Arbeitsquantum, wenn mittelst eines Flaschenzuges in Verbindung mit einer Winde Baumaterialien aufgezogen werden. — §. 478. Dasselbe bei einem Göpel. — §. 479. Dasselbe, wenn ein Dachstuhl mittelst englischer Heber gehoben wird.

VI. Kapitel.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 480. Erklärung der ungleichförmigen Bewegung. — §. 481. Geschwindigkeit freifallender Körper für jede Zeit. §. 482 bis 484. Raum freifallender Körper für jede Zeit. — — §. 485. Beispiele hierüber. — §. 486 bis 488. Gesetze der Bewegung senkrecht abwärts geworfener Körper. — §. 489 bis 497. Dasselbe für die Bewegung senkrecht aufwärts geworfener Körper. — §. 498 bis 506. Gesetze der Bewegung schief geworfener Körper. — §. 507 bis 511. Freie Bewegung der Körper über schiefe Flächen. — §. 512. Anwendung auf die Bewegung der Pendel. — §. 513. Vergleichung der Bewegung über eine schiefe Fläche mit dem freien Falle der Körper. — §. 514 bis 516. Bewegung über schiefe Flächen mit Rücksicht auf Reibung. — §. 517. Einrichtung einer Schraube, welche von selbst aufspringt. — §. 518. Uiberwucht bei der Rolle. — §. 519. Anwendung hievon auf die Bestimmung des Fallraumes der Körper. *Attwood's* Fallmaschine. — §. 520. Uiberwucht bei dem Rade an der Welle. — §. 521 bis 524. Dasselbe,

wenn ein Schwungrad vorhanden ist. — §. 525. Theorie der Bewegung mittelst eines Krummzapfens durch menschliche Kräfte. — §. 526 bis 528. Effekt bei einem Krummzapfen, wenn ein oder auch zwei Arbeiter hiebei angestellt werden.

VII. Kapitel.

Frachtwägen, Strassen - und Eisenbahnen.

§. 529. Geschichte der Frachtwägen. — §. 530. Vortheile der Frachtwägen und ihre Nachtheile. — §. 531. Widerstand der Reibung an den Achsen der Räder. — §. 532. Widerstand einzelner im Wege liegender Steine. — §. 533. Widerstand der Nägel, welche über den Radreifen hervorstehen. — §. 534. Widerstand der Steine bei einem Pflaster. — §. 535. Konstruktion der Steinbahnen. — §. 536. Einfluss unbedeutender Höhen und Vertiefungen einer Strasse, Vortheile der Stahlfedern bei Wägen. — §. 537. Widerstand der Geleise, Vortheile breiter Felgen. — §. 538. Ladung für jede Felgenbreite in England. — §. 539 und 540. Dasselbe in Frankreich und Deutschland. — §. 541. Einfluss der Grösse der Räder auf die Geleise und die Ladung der Wägen. — §. 542. Breite der Radfelgen in Oesterreich. — §. 543. Widerstand der konischen Räder. — §. 544. Versuche hierüber. — §. 545. Konische Räder bei den englischen Eisenbahnen. — §. 546. Widerstand aus der Bespannung und Einfluss ungleich hoher Räder — §. 547 und 548. Versuche über die Widerstände der Wägen auf verschiedenen Strassen. — §. 549 und 550. Berechnung der vortheilhaftesten Steigung bei Bergstrassen. — §. 551. Bauart der Frachtwagenräder; gusseiserne Naben.

§. 552. Geschichte der Eisenbahnen. — §. 553. Verschiedene Gattungen Eisenbahnen, Konstrukzion und Gewicht der Gusseisenschienen. — §. 554. Schienen von gewalztem Eisen. — §. 555. Ausweichplätze, Uibersetzung der Landstrassen mit Eisenbahnen. — §. 556. Drehscheiben. — §. 557. Verfertigung der gusseisernen Räder. — §. 558. Verfertigung der Achsen und Lager für Eisenbahnwägen. — §. 559. Konstrukzion der Wägen zum Transporte von Steinkohlen, der Erde oder des Schotters, so wie für lange Baustämme. — §. 560. Mittel zur Erleichterung der Fahrt bei den englischen Bahnwägen in Krümmungen. — §. 561. Gewicht der englischen Bahnwägen. — §. 562. Schmiere dieser Wägen. — §. 563. Frachtkosten auf den Eisenbahnen in England und Deutschland. — §. 564. Konstrukzion der englischen *Tramroads* und dazu gehörigen Wägen. — §. 565. *Palmer*'sche Eisenbahn. — §. 566. *Morton's* Eisenbahn zum Herausziehen der Seeschiffe auf das feste Land. — §. 567. Benützung beladener Wägen, welche über eine schiefe Fläche herabgehen, zum Aufzuge leerer Wägen. — §. 568. Aufzug beladener Wägen über schiefe Flächen durch Wasserräder oder Pferdegöpel. — §. 569. Frachtkosten auf den verschiedenen Arten schiefer Flächen in England. — §. 570. Folgerungen hieraus. — §. 571. Beschreibung der Eisenbahn von *Darlington* nach *Stockton* und Erträgnisse derselben in den ersten 45 Monaten nach ihrer Eröffnung. — §. 572 Beschreibung der Eisenbahn von *Manchester* nach *Liverpool*. — §. 573. Eisenbahn von den Kohlengruben zu *Hetton* an den Fluss *Wear* bei *Sunderland*. — §. 574. *Wide open* Eisenbahn. — §. 575. Beschreibung des *Montmouthshire* Kanals und der zugehörigen Eisenbahnen. — §. 576. *Rumney* Eisenbahn. — §. 577. Eisenbahn von *Gloucester* nach *Cheltenham*. — §. 578. Eisenbahnen in Schottland. — §. 579. *Cromford* und *High Peak* Eisenbahn, detto von *Newcastle* nach *Carlisle*, detto von *Mansfield* nach *Pinxton*. — §. 580. Eisenbahnen in Frankreich. — §. 581. Unterhaltungskosten der Eisenbahnen, Schlussfolgerungen. — §. 582. Vortheile der Eisenbahnen gegen Landstrassen. — 583. Widerstand der Reibung an den Achsen bei Eisenbahnwägen. — §. 584. Vortheile doppelter Räder. — §. 585 und 586. Widerstand fester Räder in krummen Bahnen. — §. 587. Bauart der Wägen mit Reihnägeln um diesen Widerstand möglichst zu beseitigen. — §. 588 bis 590. Berechnung der erforderlichen Zugkraft, welche für einen oder mehrere zusammenhängende Wägen mit Reihnägeln und beweglichen Achsen und Rädern in einer krummen Bahn erfordert wird. — §. 591. Anschlag der Frachtkosten auf einer horizontalen Eisenbahn. — §. 592. Dasselbe, wenn noch kleine Steigungen und Gefälle vorkommen. — §. 593. Bestimmung der vortheilhaftesten Steigung der Eisenbahnen. — §. 594. Verzeichnung der krummen Linie für Eisenbahnen. — §. 595. Beschreibung der Eisenbahn zwischen der Moldau und Donau. — §. 596. Beschreibung der Eisenbahn zwischen Prag und Pilsen.

Mechanik fester Körper.

Einleitung.

§. 1.

Die technische Mechanik (*mécanique industrielle ou mécanique appliquée aux arts*) hat die Vollführung aller derjenigen Arbeiten zum Gegenstande, wodurch die Produkte des Gewerb- und Kunstfleisses erzeugt und nach Maassgabe der zu befriedigenden Lebensbedürfnisse dargestellt werden.

Alle menschlichen Arbeiten werden theils aus freier Hand, theils mit Anwendung der Instrumente und Maschinen verfertigt. Der Unterricht in der Mechanik hat für beide Arten von Arbeiten die Gesetze und Regeln anzugeben, nach welchen sich die Arbeiter zu benehmen, ihre Instrumente und Maschinen zweckmässig vorzurichten, sie zu prüfen und zu gebrauchen haben.

§. 2.

Zur Verrichtung einer jeden Arbeit ist eine Kraft nöthig. Wenn wir eine Last durch einen Menschen von einem Orte zum andern tragen sehen, so ruhet die Kraft in dem Menschen, der die Last trägt, und wenn die Last z. B. 25 Pfund schwer ist, so hat derselbe bei dieser Arbeit eine Kraft von 25 Pfunden anzuwenden; oder seine hiezu nöthige Muskelkraft beträgt 25 Pfunde. Wenn wir einen Stein an einen Faden oder an ein Seil binden und durch Befestigung des Fadens am unbeweglichen Oberboden frei in der Luft aufhängen, so bleibt der Stein in Ruhe, und die Cohaesionskraft des Fadens ist es, welche den Stein in seinem ruhigen Zustande erhält und dem Gewichte des Steines gleich ist. — Wird der Faden oder das Seil abgeschnitten, so fällt der Stein in senkrechter Richtung gegen die Erde, und die Kraft, welche diese Bewegung hervorbringt, ist offenbar das Gewicht des Steines oder seine Schwerkraft.

Obgleich die Art und Weise unbekannt ist, wie die in dem Steine vorhandene Schwerkraft denselben unabänderlich in der senkrechten Richtung gegen die Erde herabtreibt, oder wie die Muskelkraft der Hände den Stein aufheben und willkührlich nach jeder Richtung bewegen kann, so unterliegt doch das Daseyn und das Maass dieser Kräfte und überhaupt die Nothwendigkeit einer Kraft zur Hervorbringung und Unterhaltung einer jeden Arbeit, keinem Zweifel; wir haben daher in der Mechanik bloss die Gesetze der Natur genau zu beobachten, die Eigenschaften der zu bearbeitenden Körper umsichtig zu untersuchen und dadurch die zweckmässigsten Mittel zur Bewirkung unserer Arbeiten aufzufinden.

Es gibt nebst den erwähnten drei Kräften (der Muskelkraft der Menschen, der Cohaesionskraft und der Schwerkraft) noch viele andere, welche sich die Menschen dienstbar gemacht und die sie zur Verrichtung ihrer Arbeiten angewendet haben. In den ältesten Zeiten wurden alle Arbeiten unmittelbar von Menschen verrichtet. Zuerst soll es in Egypten gelungen seyn, den Pflug und dadurch zugleich das Mittel zu erfinden, wie die Kräfte der Ochsen zum Ackern, d. i. zum Aufgraben und Uiberstürzen der Erde verwendet werden können. Auf den Beifall, mit welchem diese erste Maschine von der menschlichen Gesellschaft aufgenommen wurde, lässt sich aus den Opferfesten schliessen, welche die egyptischen Priester zur dankbaren Erinnerung an dieses Geschenk einer höhern Macht veranstalteten. Auf gleiche Art wurden die Pferde zum Fortziehen der Wägen verwendet und es kam bald dahin, dass alle Lasten viel leichter und mit weniger Kosten von einem Orte zum andern geführt, als von Menschen oder Thieren getragen werden konnten. — Noch die Römer liessen das Getreide von Sklaven zerstampfen und durch Siebe von der weniger verdaulichen Spreu reinigen. Bald nachher wurden Wassermühlen erfunden, und denselben eine solche Einrichtung gegeben, wornach alle verschiedenen Operationen, welche die Erzeugung der mannigfaltigen Mehlgattungen erfordert, von jedem einzelnen Wasserrade verrichtet werden. Die Araber erfanden zu demselben Zwecke Windmühlen, welche in dem westlichen Europa erst in den Zeiten der Kreuzzüge bekannt wurden. Die spätere Erfindung des Schiesspulvers gab unsern Waffen eine neue Kraft, der die zahlreichsten Armeen nicht Widerstand zu leisten vermochten; die Benützung der Federkraft der Metalle lieferte uns vollkommene Uhren und Zeitmesser; den neuesten Zeiten war es endlich vorbehalten, durch Benützung der Wasserdämpfe eine Kraft zu gewinnen, welche nicht nur an Stärke allen andern Kräften weit überlegen ist, sondern auch durch höchst sinnreiche, mechanische Vorrichtungen in ihrer Wirkung so geschmeidig gemacht wurde, dass sie zu gleicher Zeit die stärksten Eisenstäbe schmieden und die feinsten Baumwollenfäden zu spinnen und zu weben vermag. Erfahrene Engländer behaupten, dass ihr Vaterland seine dermalige Uiberlegenheit in der Erzeugung aller Gewerbsprodukte und im Handel ganz vorzüglich der Erfindung und Vervollkommnung der Dampfmaschinen zu verdanken habe.

§. 3.

Bei allen Arbeiten müssen folgende Gegenstände in Betrachtung gezogen werden:

A. Der Gegenstand der Arbeit selbst, welche zu Stande gebracht werden soll, z. B. das Tragen, Heben, Ziehen einer Last, das Pressen, das Mangeln u. dgl.

B. Die Mittel, d. i. die Werkzeuge (Instrumente) oder Maschinen, durch welche die Arbeit ausgeführt werden kann.

C. Die zweckmässige Verwendung der hiezu nöthigen Kräfte; und

D. Die Bestimmung der Verhältnisse der Bestandtheile der Maschine, um hiedurch die bestmögliche Benützung der Kraft und sonach auch das grösstmögliche Quantum an Arbeitsprodukten in einer bestimmten Zeit, z. B. in einem Tage zu erzielen.

Zur deutlichern Erklärung dieser vier Hauptgegenstände, worauf es bei allen mechanischen Arbeiten wesentlich ankömmt, wollen wir noch eine Erörterung hievon im folgenden Paragraphe beifügen.

§. 4.

A. Die Gegenstände der Arbeiten sind äusserst mannigfaltig. Wenn ein Stoff von der Natur so gegeben ist, dass er ohne weitere Vorbereitung in Arbeit genommen und der beabsichtigte Gegenstand daraus verfertigt werden kann, so gehört diese Arbeit ganz in das Gebiet der Mechanik. Z. B. Wenn Bauholz zur Verfertigung eines Dachstuhles im Walde angewiesen wird, so besorgt die Mechanik nicht nur das Fällen und Herbeiführen dieser Baustämme, sondern sie gibt auch die Hauptregeln für die vortheilhafteste Abzimmerung, die Bestimmung der Stärke der einzelnen Theile und ihre Verbindung unter einander an, welche dann in dem besondern Lehrfache der Bau- und Zimmermannskunst noch weiter ausgeführt und auf mehrere Fälle angewendet werden. Bedarf dagegen ein Urstoff noch mancher Vorbereitungen, soll z. B. der Flachs geröstet, oder das Erz geschmolzen und vorläufig zu schmiedbarem Eisen gemacht werden, so fallen diese Vorbereitungen dem Lehrgegenstande der Chemie, das Spinnen des Flachses und die weitere Verarbeitung des Eisens zu Stabeisen, Ketten, Draht etc. jedoch dem Gegenstande der Mechanik zu.

B. Werkzeuge (Instrumente) sind diejenigen einfachen Geräthe, deren sich vorzüglich die Handwerker bei ihren Arbeiten bedienen. So ist der Hammer das Werkzeug des Schmiedes, so sind die Schrotwaage, das Senkblei, der Hammer und die Kelle, die Werkzeuge der Maurer u. s. w.

Wenn mehrere einfache Vorrichtungen zu einem gemeinschaftlichen Zwecke zusammengesetzt, hiedurch die Arbeit mehr geregelt, der Willkühr der Hand entzogen oder auch mehrere Zwecke zu gleicher Zeit erreicht werden, so nennt man diess eine Maschine. Soll z. B. ein Felsenstück oder eine grosse Säule von einem Orte zum andern geschafft und dort aufgestellt werden, so wäre diess durch blosse menschliche Kräfte unmöglich, weil diese Gegenstände bei ihrem ausserordentlichen Gewichte zu wenig Angriffspunkte für Menschen darbiethen, um von ihnen überwältigt zu werden; man braucht daher zu dem Transporte solcher Körper und zu ihrer Aufrichtung an Ort und Stelle eigene Vorrichtungen, als Winden, Flaschenzüge und andere Hebezeuge, und nur durch Anwendung derselben wurde es möglich alle jene grossen Obelisken und Monumente zu errichten, deren in den ältesten und neuesten Zeiten so viele aufgestellt worden sind. Ein anderes Beispiel dieser Art geben die Theilungsmaschinen der Uhrmacher, wodurch die Räder mit einer, für das unbewaffnete Auge gar nicht erkennbaren Genauigkeit getheilt, die Zähne in der zweckmässigsten Form hergestellt und auch mehrere solche Räder fabriksmässig zu gleicher Zeit und mit derselben Genauigkeit verfertigt werden. — Vor Erfindung der Spinnmaschinen war es unmöglich, Garne von solcher Feinheit und Gleichheit zu erzeugen, wie sie gegenwärtig mittelst Maschinen geliefert werden; die Maschinen haben daher der menschlichen Arbeit die ihr sonst mangelnde Vollkommenheit gegeben; und da das Maschinengespinnst zugleich wohlfeiler als das Handgespinnst geliefert wird, so hat die Erfindung dieser Maschinen nebst der grössern Vollkommenheit

der Arbeit und ihrer Preisverminderung, auch zugleich ihren allgemeinen Gebrauch bewirkt.

Auf gleiche Weise lässt sich erörtern, dass durch alle andern bisher erfundenen und verwendeten Maschinen, entweder die Möglichkeit, oder die grössere Vollkommenheit oder auch die grössere Wohlfeilheit einer Arbeit, oder endlich auch mehrere von diesen Zwecken zugleich erreicht wurden.

C. In Bezug auf die Verwendung der vorhandenen Kräfte, es seyen nun die Kräfte der Menschen, Thiere, des Wassers, der Dämpfe u. s. w. hat die Mechanik zu lehren, auf welche Weise diese Kräfte am vortheilhaftesten und zweckmässigsten benützt werden können, und

D. Wie mit den vorhandenen Kräften die möglichst grösste Arbeit in einer bestimmten Zeit, d. h. der grösste Effekt zu bewirken sey. Die Berechnungen, welche hierüber in der Mechanik angestellt werden, geben uns zugleich die Verhältnisse der Maschinenbestandtheile an. Dieser Theil der Mechanik ist daher der wichtigste, indem, wie wir sehen werden, der Effekt, oder das Quantum der verrichteten Arbeit, je nach der zweckmässigern Verwendung der Kräfte, bald grösser und bald kleiner werden kann. Es wird daher unter die wichtigsten Aufgaben der technischen Mechanik gehören, die Mittel an die Hand zu geben, um für jede gegebene Arbeit den jedesmaligen grössten Effekt mit dem mindesten Kraft- und dem geringsten Kostenaufwande hervorzubringen.

§. 5.

Da jede Arbeit gewöhnlich mit einer Bewegung verbunden ist, so wurde schon in ältern Zeiten die Mechanik die Wissenschaft der Bewegung genannt. Es gibt jedoch Fälle, wo ein Gegenstand oder das Produkt der Arbeit in Ruhe erhalten, und gegen äussere Einwirkungen sicher gestellt werden soll, wie z. B. ein Gebäude, das zu erbauen ist. Die Grundsätze dafür, gehören ebenfalls in die technische Mechanik, ungeachtet hier keine Bewegung vorkömmt; und wir werden sehen, dass hiezu eben dieselben Regeln dienen, welche in der Mechanik überhaupt statt finden, und dass in dieser Hinsicht nur zur grössern Deutlichkeit des Vortrages beide Zustände der Ruhe und der Bewegung besonders behandelt, oder Statik und Mechanik als einzelne Theile dieser Wissenschaft vorgetragen werden.

§. 6.

Zufolge des bisher Gesagten zerfällt der Gegenstand der technischen Mechanik in folgende Haupttheile:

I. In die Dynamik oder Kraftlehre, welche die Kräfte der Menschen, der Thiere, des Wassers, der Luft, der Dämpfe etc. nämlich ihre Grösse und die Gesetze der Wirksamkeit dieser Kräfte abhandelt.

II. In die Lehre vom Widerstande, worin die Grössen der vorkommenden Widerstände und die Gesetze erörtert werden, nach welchen dieselben bei allen Arbeiten der angebrachten Kraft entgegenwirken.

Die letztere Lehre wird gewöhnlich in zwei Theilen abgehandelt, nämlich:

A. In der **Statik**, worin die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen Kraft und Widerstand, unter denen eine vollkommene Ruhe oder auch eine gleichförmige Bewegung möglich ist, entwickelt werden, und

B. In der **eigentlichen Mechanik** oder Bewegungslehre, worin die Grösse (das Quantum) der Bewegung, oder die **hervorgebrachte Arbeit** als der letzte Zweck der Kraftanwendung berechnet wird.

Hiemit ist nun ganz deutlich der **technischen Mechanik** der Gegenstand und Umfang ihrer Untersuchungen vorgezeichnet, und wir können somit ihren Zweck mit mehr Bestimmtheit angeben, wenn wir sagen, dass sie sich hauptsächlich damit zu befassen habe, die sichersten und zweckmässigsten Mittel aufzusuchen, durch welche der physischen Kraft und Geschicklichkeit des Menschen **Hilfe geleistet**, wie diese Kraft bei der Ausführung der, für die menschlichen Bedürfnisse nöthigen Arbeiten **zweckmässig verwendet**, und wie die Arbeiten entweder mit möglichster Ersparung an Zeit und Kraft, oder mit dem geringsten Kostenaufwande hergestellt werden können.

§. 7.

Die **Kraft** oder das Vermögen, welches eine Arbeit verrichtet, ist im gewöhnlichen Sprachgebrauche dem **Widerstande**, welchen die Kraft zu überwältigen hat, und den man die **Last** heisst, entgegengesetzt. Da jedoch auch der Widerstand, wenn derselbe z. B. eine empor zu hebende Last ist, durch seine Schwere eine Bewegung hervorbringen kann, so erhellet, dass beide nur dem Namen nach, nicht aber wesentlich verschieden sind.

Wenn eine Bewegung im gleichförmigen Zustande unterhalten werden soll, so wie es bei den meisten Fabriksarbeiten der Fall ist, so ist es einleuchtend, dass auch hiezu eine fortwährend gleiche Kraft anzuwenden sey, oder dass die Kraft dem Widerstande immer gleich seyn müsse. Wäre nämlich die Kraft kleiner, so würde sie den Widerstand nicht zu besiegen vermögen, folglich müsste die Arbeit aufhören; nur, wenn demnach die Kraft gerade so gross als der Widerstand ist, kann die vorhandene Bewegung fortgesetzt werden, oder die Arbeit gleichförmig fortschreiten. Wäre dagegen die Kraft grösser als der Widerstand, so würde sie mehr leisten, als erfordert wird; die Bewegung würde fortan beschleunigt und endlich so gross werden, dass Niemand dem bewegten Körper zu folgen vermöchte, und derselbe daher, wie *Newton* sich ausdrückt, in den unendlichen Weltraum entführt würde. — Drückt Jemand mit der Hand auf einen Tisch, so drückt der Tisch eben so stark gegen die Hand zurück, wenn beide bestehen sollen; ist aber der Druck der Hand stärker, als dass der letztere zu widerstehen vermag, so bricht der Tisch und hört damit auf, seinem Zwecke zu entsprechen. — Hieraus folgt daher, dass in jedem Beharrungsstande der Ruhe oder der Bewegung, **die Kraft dem Widerstande gleich seyn müsse.**

§. 8.

Bei jeder **Bewegung** sind drei Dinge zu betrachten: der **Raum**, die **Zeit** und die **Geschwindigkeit**.

Die Länge des Weges, welchen ein bewegter Körper oder auch eine Kraft oder Last zurücklegt, nennt man den **Raum**. Derselbe wird daher mit jener Einheit gemessen, womit man die Längen der Linien überhaupt misst, z. B. mit einer Klafter, mit einem

Schuhe etc. Die gewöhnliche Einheit für das Maass des Raumes in der Mechanik ist der Fuss (Schuh) und zwar bei uns der Wiener oder Niederösterreichische Fuss; es wird daher in diesem Werke, so oft kein anderes Fuss-Maass ausdrücklich genannt ist, immer das Wiener Maass zu verstehen seyn.

Unter Geschwindigkeit verstehen wir denjenigen Raum, welchen ein Körper in einer Sekunde zurücklegt. Geht ein Körper geschwinder, so legt er einen grössern, geht er langsamer, so legt er einen kleinern Raum in einer Sekunde zurück. — Das Zeitmaass einer Sekunde ist zwar in allen mechanischen Schriften zum Maasstabe der Geschwindigkeit angenommen, allein diess ist eine willkührliche Annahme, indem man die Geschwindigkeit eben sowohl für den Raum erklären kann, welchen ein Körper in einer Minute, einer Stunde etc. und bei Himmelskörpern in einem Jahre oder überhaupt in einer jeden andern gewählten Zeiteinheit zurücklegt.

Als Zeit bezeichnet man die Dauer, während welcher ein Körper von einem Orte zum andern kömmt, d. h. seinen Weg zurücklegt. Die Zeit wird gewöhnlich durch Uhren und Chronometer (Zeitmesser) gemessen. Dieses Zeitmaass gründet sich auf die mittlere Dauer eines Sonnentages, oder auf die Länge der Periode, in welcher die Sonne zum Meridian oder zum höchsten Punkte ihres Tagkreises zurückkehrt. Man theilt diese Zeit, deren Länge die Natur selbst festgesetzt hat, in 24 gleiche Theile oder Stunden; jede Stunde in 60 gleiche Theile oder Minuten, und jede Minute abermals in 60 gleiche Theile, die man Sekunden nennt, ein. Eine jede Stunde enthält demnach 3600 Sekunden und die in der Mechanik angenommene Einheit des Zeitmaasses ist eine Sekunde. Die Stunden, Minuten und Sekunden werden gewöhnlich durch (h), (′) und (″) bezeichnet, die man rechter Hand über die Zahl setzt. So z. B. bedeutet $7^h\ 13'\ 45''$ eine Dauer von 7 Stunden, 13 Minuten und 45 Sekunden.

Zum Zählen der Zeiteinheiten bedient man sich gewöhnlich des Pendels oder einer an einem Faden befestigten Kugel. Wird das Pendel so eingerichtet, dass es in jeder Sekunde eine Schwingung vollendet (einen Schlag macht), so heisst man es ein Sekundenpendel. Die Länge dieses Pendels ist in den neuern Zeiten mit ungemein grosser Genauigkeit bestimmt, und nach den Berechnungen der Astronomen für die Wiener Sternwarte 452,739 Wiener Linien oder 3 Fuss 1 Zoll 8,789 Linien = 3,144 Wiener Fuss gefunden worden.

Da jedoch der Gebrauch des Pendels, des Widerstandes der Luft und noch anderer Hindernisse wegen, doch nur auf eine kurze Zeit beschränkt, und hiebei selbst mit mehreren Unbequemlichkeiten verbunden ist, von welchen Mängeln die Uhren oder Chronometer frei sind, so pflegt man auch vorzüglich nur diese zur Bestimmung der Zeit anzuwenden, wogegen das Messen der Zeit durch das einfache Pendel nur bei wenigen physikalischen Versuchen von kurzer Dauer, statt findet.

Ein umständlicherer Unterricht über das Pendel und dessen Gebrauch bei Uhren, wird später in einem besondern Kapitel dieses Werkes abgehandelt werden.

§. 9.

Jede Bewegung ist entweder gleichförmig oder ungleichförmig.

Ein Körper bewegt sich gleichförmig, wenn er seine Geschwindigkeit nicht ändert, d. i. wenn er fortwährend in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt.

Die Bewegung ist ungleichförmig, wenn sich die Geschwindigkeit verändert, oder wenn in gleichen Zeiten ungleiche Räume zurückgelegt werden. Insbesondere nennt man die Bewegung beschleunigt, wenn in den nach einander folgenden gleichen Zeiten die Räume immer grösser; und verzögert, wenn diese Räume immer kleiner werden.

Ein deutliches Beispiel einer solchen beschleunigten oder verzögerten Bewegung geben schwere Körper; fällt ein solcher Körper senkrecht herab, so verhalten sich, wie die Beobachtungen gezeigt haben, die in der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Sekunde zurückgelegten Räume wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 Wegen der Gleichheit der Unterschiede dieser Zahlen, nennt man diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte.

Wenn im Gegentheile ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen wird, so nehmen die von einer Sekunde zur andern zurückgelegten Räume wie die Zahlen...... 7, 5, 3, 1 ab; man nennt diess demnach eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Diese Sätze, so wie überhaupt die ganze Theorie des freien Falles und der Bewegung geworfener Körper, werden im VI. Kapitel dieses Werkes umständlich abgehandelt werden.

§. 10.

Bei der gleichförmigen Bewegung wird der Raum, den ein Körper zurücklegt, erhalten, wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit, d. i. mit der Anzahl der, während der Bewegung verflossenen Zeitsekunden, multiplizirt.

Weil nämlich die Geschwindigkeit bei der gleichförmigen Bewegung dieselbe ist, so legt der Körper in der 2ten, 3ten Sekunde einen eben so grossen Raum als in der ersten zurück. Ist daher (Fig. 1) der Raum, welchen der Körper in der ersten Sekunde beschreibt = ab = C, so wird derselbe in der zweiten Sekunde den Raum bd = ab = C, in der dritten Sekunde den Raum de = ab = C u. s. w. zurücklegen. Demnach ist der ganze vom Anfange der Bewegung beschriebene Raum während einer Sekunde = C, während 2 Sekunden = ad = ab + bd = 2C, während 3 Sekunden = ae = ab + bd + de = 3 C, u. s. w. und man kann überhaupt sagen: In einer Sekunde legt der Körper den Weg C, folglich in T Sekunden den Weg S (= am) zurück, oder: Fig. 1. Tab. I.

$\overset{Sec.}{1} : C = \overset{Sec.}{T} : S$ woraus $S = \frac{C.\ T^{Sec.}}{1^{Sec.}} = C.\ T$, d. h. bei der gleichförmigen Bewegung ist der durchlaufene Raum S = dem Produkte aus der Geschwindigkeit C in die Anzahl Sekunden T, welche der Körper zum Durchlaufen dieses Raumes gebraucht.

§. 11.

Uiber die vorstehende Gleichung ist zu bemerken, dass es Vielen unerklärbar vorgekommen sey, wie man in der Mechanik Dinge von verschiedenen Namen, wie es hier die Geschwindigkeit und die Zeit ist, miteinander multipliziren könne. Zur Erklärung dessen dient, dass wir unter der Zeit nur die Anzahl der während der Bewegung

verflossenen Zeitsekunden, also eine unbenannte Zahl verstehen, und dass in dieser Hinsicht auf beiden Seiten der Gleichung vollkommen gleichartige Grössen vorkommen; denn der Raum S ist eben so wie die Geschwindigkeit C ein Längenmaass, und dieses zweite Längenmaass wird so oft genommen, als die Zeit Einheiten hat, welches mit dem Begriffe der Multiplikation vollkommen übereinstimmt.

§. 12.

Aus der vorhergehenden Gleichung $S = C.\,T$, folgt $C = \frac{S}{T}$, d.h. man findet bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit, wenn man den Raum durch die Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt werden soll, dividirt. Auf gleiche Art ist $T = \frac{S}{C}$, d. h. man findet die Zeit, oder die Anzahl Sekunden, welche man braucht, um einen gegebenen Raum mit einer gegebenen Geschwindigkeit zurückzulegen, wenn man diesen Raum durch die Geschwindigkeit dividirt.

1. Beispiel. Wie gross ist die Geschwindigkeit eines Menschen, der eine Meile in 2 Stunden zurücklegt?

Da die Geschwindigkeit oder der Raum des Menschen in einer Sekunde in Fussen berechnet wird, so muss man den ganzen durchlaufenen Raum im Fussmaasse, und die Zeit in Sekunden ausdrücken; sonach ist:

$S = 1$ Meile $= 4000^{\circ} = 24000'$ und $T = 2^{h} = 7200^{Sec.}$, folglich $C = \frac{S}{T} = \frac{24000}{7200} = \frac{10}{3}$ oder $3\frac{1}{3}$ Fuss.

2. Beispiel. Ein Mann legt zu Pferde 6 Fuss in 1 Sekunde zurück, wie weit wird er in 4 Stunden kommen?

Für diesen Fall ist: $S = C\,T = 6.\,4.\,3600 = 86400$ Fuss $= 3$ Meilen 2400 Klaftern.

3. Beispiel. Man hat einen Weg von 6 Meilen zurückzulegen, macht aber in 1 Sekunde 3 Fuss; wie viel Zeit wird man brauchen, um an den bestimmten Ort zu kommen?

Diese Zeit ist $T = \frac{S}{C} = \frac{6.24000}{3} = 48000^{Sec.} = 13^{h}\ 20^{Min.}$

4. Beispiel. Die Gesellschaft der Eisenbahn zwischen *Liverpool* und *Manchester* in England hatte im verflossenen Jahre ein Prämium von 500 Liv. st. (5000 Conv. Gulden) für den schnellsten Dampfwagen ausgesetzt. Bei den Wettfahrten, welche im Oktober 1829 während meiner Anwesenheit daselbst auf der genannten Bahn statt hatten, legte die beste Maschine 32 englische Meilen in einer Stunde zurück. Es frägt sich nun, wie viel beträgt dieser Raum in dem österreichischen Maasse, und wie gross war die Geschwindigkeit dieses Dampfwagens oder der Raum in 1 Sekunde?

Eine englische Meile beträgt 848 Wiener Klafter, folglich wurden in einer Stunde $32.848 = 27136$ Klafter $= 6$ N. Oesterr. Meilen 3136 Klafter zurückgelegt, und der Raum in einer Sekunde betrug $\frac{27136}{3600} = 7{,}538$ N. Oe. Klafter oder $45{,}23$ Fuss. — Man würde daher auf einer solchen Eisenbahn den Weg von Prag nach Wien, wenn diese Bahn $42\frac{1}{2}$ N. Oesterr. Meilen lang wäre, in 6 Stunden 16 Minuten zurück legen können.

§. 13.

Nach diesen Grundsätzen werden auch die Fragen beantwortet, welche in dem Falle entstehen können, **wenn zwei in derselben Richtung einander nachfolgende Körper sich in einer gegebenen Zeit einholen sollen.**

Es sey die Zeit, um welche der erste Körper früher abging $= t$, und seine Geschwindigkeit $= c$; die Zeit, welche der zweite Körper braucht, um den ersten einzuholen $= T$ und seine Geschwindigkeit $= C$; endlich der Raum, den beide bis zu dem Orte zurücklegen, wo sie auf einander treffen $= x$; so ist für den vorausgehenden Körper die Dauer der Bewegung $t + T$, weil er sich durch die Zeit t, welche er voraus hat, und dann noch durch die übrige Zeit T bewegt; demnach ist der Raum $x = c\,(t + T)$ und für den zweiten Körper ist er $x = C\,T$.

In diesen zwei Gleichungen kommen fünf Grössen, nämlich: x, c, C, t, T vor; sind daher drei derselben gegeben, so kann man die übrigen zwei finden.

1. **Beispiel. Die Zeit zu bestimmen, in der zwei Körper einander einholen, wenn die Zeit, welche der erste voraus hat und die Geschwindigkeit beider gegeben ist, und umgekehrt.**

$$\text{Da } x = c\,(t + T) \text{ und}$$
$$x = C\,T \text{ ist, so ist auch}$$
$$c\,(t + T) = C\,T \text{ und hieraus } T = \frac{c\,t}{C - c}$$

Z. B. Ein Bothe legt in einer Stunde 2000 Klafter zurück, ein zweiter geht um 2 Stunden später nach, macht aber in einer Stunde 2400 Klafter, wann und wo kommen sie zusammen?

Die Geschwindigkeit des ersten ist: $c = \frac{S}{t} = \frac{6.2000}{3600} = \frac{10}{3}$ Fuss und jene des zweiten $\underset{\text{Sec.}}{C} = \frac{6.2400}{\underset{\text{h}}{3600}} = 4$ Fuss. Ferner $t = \overset{\text{h}}{2} = \overset{\text{Sec.}}{7200}$, demnach: $T = \frac{\frac{10}{3}\,.\,7200}{4 - \frac{10}{3}} = 36000 = 10$ und $x = C\,T = 4.10.3600$ Fuss $= 6$ Meilen. Diese Bothen werden sich daher in 10 Stunden nach zurückgelegten 6 Meilen einholen. In der That, da der erste schon 4000 Klafter voraus hat, ehe der zweite zu gehen anfing, und in den folgenden 10 Stunden noch 10mal 2000 oder 20000 Klafter zurücklegt, so hat er im Ganzen einen Weg von 24000 Klaftern oder 6 Meilen beschrieben. Der zweite macht in 10 Stunden 10mal 2400 oder ebenfalls 24000 Klafter, also beide denselben Weg, sie holen sich daher wirklich in 10 Stunden ein.

2. **Beispiel. Die Geschwindigkeit zu finden, mit der sich ein nachfolgender Körper bewegen muss, damit er einen andern in einer gegebenen Zeit einhole.**

Z. B. Ein Kourier geht von hier an einen Ort ab, der 100 Meilen entfernt ist, und legt in 2 Stunden 2 Meilen zurück. Ein zweiter Kourier wird ihm 24 Stunden später nachgeschickt, um ihn an dem 100 Meilen entfernten Orte einzuholen; mit welcher Geschwindigkeit muss nun der zweite dem ersten nachsetzen?

Da der erste Kourier in jeder Stunde eine Meile zurücklegt, folglich 100 Stunden zu 100 Meilen brauchen wird, der zweite aber um 24 Stunden später nachfolgt, folglich

dieselben 100 Meilen in 76 Stunden zurücklegen muss, so folgt, dass er in 1 Stunde $\frac{100}{76} = 1\frac{6}{19}$ oder beinahe $1\frac{1}{3}$ Meilen zurücklegen müsse. Daraus folgt die Geschwindigkeit des ersten $= \frac{4000^{\circ}}{3600} = 6{,}67$ Fuss, die Geschwindigkeit des zweiten aber $= \frac{100.4000.6}{76.3600}$ $= 8{,}77$ Fuss.

§. 14.

Auf gleiche Weise lässt sich nunmehr auch die Zeit berechnen, in welcher zwei Menschen, die gegen einander gehen, sich begegnen werden. Wenn z. B. zwei Personen, die eine vom Orte A, und die andere vom Orte B zu gleicher Zeit aus- und gegeneinander gehen, und wenn die erste mit der Geschwindigkeit c und die zweite mit der Geschwindigkeit C geht; so wird, wenn die Entfernung beider Orte von einander $= a$ gesetzt wird, und wenn die eine den Weg x, die andere also den Weg $a - x$ bis zu dem Augenblicke zurücklegt, da sie sich begegnen; die Zeit, welche die eine braucht $= \frac{x}{c}$ und jene, welche die andere zubringt $= \frac{a-x}{C}$ seyn. Setzt man nun voraus, dass beide Personen in demselben Augenblicke oder gleichzeitig von den Orten A und B abgegangen sind; so werden diese beiden Zeiten, in denen sie sich begegnen, einander gleich seyn müssen, man hat daher: $\frac{x}{c} = \frac{a-x}{C}$ woraus $x = \frac{a}{C\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{C}\right)} = \frac{a}{1+\frac{C}{c}} = \frac{a.c}{C+c}$ folgt; die Zeit selbst aber, in welcher das Begegnen statt hat, ist $= \frac{x}{c} = \frac{a}{C+c}$

Beispiel. Zwei Orte sind von einander 3 Meilen $= a = 12000$ Klafter entfernt, und es gehen zwei Menschen, der eine (A) mit $c = 2$ Fuss, der andere (B) mit $C = 3$ Fuss Geschwindigkeit einander entgegen; es frägt sich nun, wann und wo sie sich begegnen werden?

Die Zeit, wann sich diese Menschen begegnen, ist $= \frac{a}{C+c} = \frac{72000'}{3'+2'} = 14400^{\text{Sec.}} = 4^{h}$; der Ort, wo sie sich begegnen, ist für den Menschen (A), der 2 Fuss Geschwindigkeit hat $x = \frac{a.c}{C+c} = \frac{72000.'\,2'}{3'+2'} = 28800' = 4800^{\circ}$, für den Menschen (B) aber $= \frac{12000.3}{3+2}$ $= 7200^{\circ}$.

I. Kapitel.

Thierische Kräfte und allgemeine Regeln über ihre Verwendung bei Arbeiten aus freier Hand.

§. 15.

Die Kräfte der Menschen und Thiere werden so wie alle andern Kräfte durch Gewichte gemessen, welche sie heben, ziehen, schieben oder auf eine andere Art fortbewegen können. Da für diese Kräfte von der Natur keine unveränderlichen Maasse und Gesetze, wie für die Schwere der Körper bestimmt sind, sondern der stärkere Körperbau, die öftere Uibung, das Alter, das Geschlecht, und selbst der Wille, seine Kräfte anzuwenden, bei der Kraftäusserung der Menschen einen unverkennbaren Einfluss an den Tag legen, so ergibt sich von selbst, dass auch hier über die absolute Grösse dieser Kräfte keine allgemeine Bestimmung gegeben werden könne. Jeder Mensch vermag nur aus seiner eigenen Erfahrung die Last zu bestimmen, welche er zu heben und zu tragen im Stande ist, ja manche Menschen haben es in dieser Hinsicht durch besondere Uibung dahin gebracht, dass ihre blosse Empfindung die Stelle einer Wage vertritt, indem sie das Gewicht desjenigen, was sie heben oder tragen, oft mit einer bewunderungswürdigen Genauigkeit anzugeben wissen.

Es gibt Menschen, welche sehr viele Kräfte besitzen. *Desaguliers* (*Cours de Physique expérimentale*, *Paris* 1751 *pag.* 289) erzählt, dass die Lastträger in London oft zwei bis drittehalb Zentner Steinkohlen oder andere Waaren auf sich nehmen, aus den Schiffen in die nächsten Niederlagen und eben solche Lasten auch in entferntere Stadtquartiere tragen, dort mit denselben über Treppen in die obern Stockwerke hinaufsteigen, und diese Arbeiten mehrere Male in einem Tage wiederholen. Eben so sehen wir auch in Prag Träger, welche bei verschiedenen Gelegenheiten, vorzüglich zur Zeit des Wechsels der gemietheten Wohnungen, grosse Kleider- und Bücherschränke, mit Wäsche gepackte Koffer und andere Mobilien von 2 bis 3 Zentner Gewicht auf sich nehmen, aus einer Wohnung in die andere tragen, und damit gleichfalls über Stiegen in die obern, sechs bis acht Klafter hohen Stockwerke steigen, wenn nur die Gestalt und Grösse der Geräthschaften nicht von der Art ist, dass ihre Lage auf dem Rücken des Trägers dem Gehen hinderlich wird. Dagegen sind wieder andere Menschen schwächer, und viele sind kaum im Stande, nur einen Zentner zu heben, noch weniger auf eine Strecke Weges fortzutragen. Alle Menschen sind in ihrer Jugend verhältnissmässig schwach, werden bei zunehmenden Jahren stärker und im hohen Alter wieder schwächer; das männliche Geschlecht ist gewöhnlich stärker, als das weibliche. In den heissern Welttheilen sind die Menschen in der Regel schwächer, als in kältern Gegenden; die Indianer kennt man als die schwächsten Menschen, während die Nordländer, z. B. die Russen, weit stärker sind.

§. 16.

Ob zwar hieraus folgt, dass für die menschliche Kraft kein bestimmtes oder absolutes Maass anzunehmen sey, sondern dass jeder seine eigenthümliche Kraft nur selbst

versuchen könne, so lehrt uns doch die Erfahrung gewisse Umstände und Verhältnisse kennen, denen die Kraftanwendung aller, sowohl starker als schwacher, junger und alter Menschen eben so wie die Kraftanwendung aller Thiere unterworfen ist, welche demnach bei der Frage über die vortheilhafteste Verwendung thierischer Kräfte, hauptsächlich berücksichtigt werden müssen. Diese Umstände sind nämlich:

Erstens. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Arbeit verrichtet werden muss, und

Zweitens. Die Dauer der Arbeit, wie lange nämlich oder durch wie viele Stunden die Arbeit täglich fortgesetzt werden soll.

Diese zwei Bedingungen unterscheiden die thierischen Kräfte wesentlich von den leblosen Kräften der Schwere, des Wassers, der Luft, der Dämpfe u. s. w., da die letztern, sie mögen eine längere oder eine kürzere Zeit hindurch wirken, sich immer gleich bleiben. Ganz anders verhält es sich aber mit den Kräften der Menschen und Thiere, welche sowohl von der Geschwindigkeit, womit sie arbeiten, als von der Zeitdauer, wie lange sie arbeiten, abhängig sind.

Es ist nämlich allgemein bekannt, dass alle Menschen, wenn sie eine schwere Last tragen, sich mit derselben nicht so geschwind fort bewegen können, als wenn sie wenig tragen oder ganz frei gehen und bloss ihren eigenen Körper in Bewegung erhalten. Alle schwer beladenen Träger machen kleinere Schritte und gehen langsam. Da die Natur den Menschen und Thieren durch die Grösse und Bauart ihrer Hände und Füsse bestimmte Gränzen für ihre Bewegungen vorgeschrieben hat, so haben schon *de la Hire* und *Desaguliers* aus der geringen Erhebung und mindern Beschleunigung des tragenden und getragenen Körpers eine Erklärung abgeleitet: warum man mit kleinen und langsamen Schritten grössere Lasten tragen könne, als mit grossen und schnellen Schritten. Auch lehrt die tägliche Erfahrung, dass jeder, der etwas zu tragen hat, bei gleichem Schritte früher ermüdet, als sein freier Begleiter. Läufer und Wettrenner kleiden sich leicht an und suchen sich von aller Last möglichst zu entledigen.

§. 17.

Zur Beurtheilung der Aenderungen, welche von der Geschwindigkeit veranlasst werden, ist schon in den gedruckten Briefen der Brüder *Bernoully* an *Leibnitz* die Erfahrung angeführt und seither von mehreren andern Schriftstellern wiederholt: dass Menschen von mittlerer Stärke es gleichgültig finden, 30 ℔ Last mit 2 Fuss Geschwindigkeit, oder 20 ℔ Last mit 3 Fuss Geschwindigkeit zu tragen oder zu bewegen. Multiplizirt man nun diese Geschwindigkeiten mit den zugehörigen Lasten, so ist im ersten Falle $30.2 = 60$, und im zweiten $20.3 = 60$, d. h. die Produkte aus der Kraft in die Geschwindigkeit, oder die sogenannten Bewegungsmomente, sind in diesen zwei Fällen einander gleich. Hieraus haben mehrere Schriftsteller auf ein gleiches Bewegungsmoment für jeden Fall der Geschwindigkeit geschlossen, woraus jedoch folgen würde, dass bei einer Geschwindigkeit von z. B. $\frac{1}{20}$ Fuss ein Mann 1200 ℔ tragen könne, weil $1200.\frac{1}{20} = 60$ ist; und bei einer unendlich kleinen Geschwindigkeit, d. h. wenn der Mann stehen bleibt, müsste er eine unendlich grosse Last zu halten im Stande seyn; ferner müsste ein Arbeiter, wenn er

nichts trägt, sich mit einer unendlich grossen Geschwindigkeit bewegen können, welches aber beides mit der bekannten Beschränktheit der menschlichen Kräfte im Widerspruche steht.

Wir wollen daher einen allgemeinen Ausdruck für die jedesmalige Kraft der Menschen aus einer andern Betrachtung der obigen Erfahrung entwickeln. Man ersieht nämlich aus der *Bernoully'schen* Erfahrung, dass 10 ℔ Kraft das Aequivalent von 1 Fuss Geschwindigkeit sey, dass demnach, wenn die Kraft um 10 ℔ vermindert wird, die Geschwindigkeit um 1 Fuss vermehrt werden könne und umgekehrt. Nimmt man nämlich nach *Bernoully* an, es sey für einen Menschen von mittlerer Stärke einerlei, 30 ℔ Last mit 2 Fuss Geschwindigkeit, oder 20 ℔ Last mit 3 Fuss Geschwindigkeit fortzutragen, und setzt man diese Rechnung noch weiter fort, so folgt: dass, wenn derselbe Mann mit 4 Fuss Geschwindigkeit arbeiten, z. B. gehen soll, man ihm nur 10 ℔ aufladen könne, und wenn er mit 5 Fuss Geschwindigkeit gehen soll, er gar nichts zu tragen im Stande sey. Auf gleiche Weise lässt sich ableiten: dass, wenn man denselben Mann nur mit 1 Fuss Geschwindigkeit arbeiten lässt, er 40 ℔ tragen könne; wenn er aber 50 ℔ zu tragen bekömmt, so ist seine Geschwindigkeit = 0, d. h. er ist bloss im Stande, diese Last zu erhalten, ohne sie von ihrem Orte zu bewegen.

Um aus diesem Beispiele für die verhältnissmässige Kraft des Arbeiters bei verschiedenen Geschwindigkeiten einen allgemeinen Schluss zu ziehen, wollen wir vorläufig in der folgenden Tabelle die abgeleiteten Grössen der Kraft den hiebei stattfindenden Geschwindigkeiten entgegenhalten und diese Zusammenstellung mit einigen allgemeinen Bemerkungen begleiten.

Des Arbeiters		Gleichgeltende Ausdrücke für dieselben Kräfte.
Geschwindigkeit in Fussmaass.	Kraft in Pfunden.	
0	50	$50 = 50 - 0$ oder $= 50 - 0.\frac{50}{5}$
1	40	$40 = 50 - 10$ oder $= 50 - 1.\frac{50}{5}$
2	30	$30 = 50 - 20$ oder $= 50 - 2.\frac{50}{5}$
3	20	$20 = 50 - 30$ oder $= 50 - 3.\frac{50}{5}$
4	10	$10 = 50 - 40$ oder $= 50 - 4.\frac{50}{5}$
5	0	$0 = 50 - 50$ oder $= 50 - 5.\frac{50}{5}$

Aus dieser Tabelle ersehen wir:

Erstens. Dass die grösste Kraft (50 ℔) mit der kleinsten Geschwindigkeit des Arbeiters (0) zusammentreffe, und dass auf gleiche Art die Kraft des Arbeiters am kleinsten (oder = 0) sey, wenn derselbe die grösste Geschwindigkeit (5 Fuss) anwenden soll.

Zweitens. Dass eine gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eine gleichförmige Abnahme der Kraft nach sich ziehe.

Drittens. Dass überhaupt die Unterschiede, welche herauskommen, wenn die wirkliche Kraft von der grössten abgezogen wird, der dabei stattfindenden Geschwindigkeit proportional sind. Diess erhellet am deutlichsten aus der dritten Kolumne, worin die Grössen, um welche die wirkliche Geschwindigkeit in jedem Fall kleiner ist, als die grösste, ausdrücklich angegeben sind. Die Vermehrung der Geschwindigkeit um 1 Fuss verursacht nämlich eine Verminderung der Kraft von 10 ℔, die Vermehrung der Geschwindigkeit von 2 Fuss gibt eine Verminderung der Kraft von 20 ℔; und eben so ergibt sich bereits nach der ersten Bemerkung, dass die grösste Geschwindigkeit für die Kraft eine Verminderung nach sich ziehe, welche die Grösse der grössten Kraft ganz erschöpft.

Da jedoch bei den in der Folge vorkommenden Berechnungen über die vortheilhafteste Verwendung der menschlichen und thierischen Kräfte nicht so sehr die äussersten, als vielmehr ihre mittlern Grössen zu berücksichtigen seyn werden, so wollen wir überhaupt die mittlere Kraft eines Arbeiters $= k$, und die dabei stattfindende mittlere Geschwindigkeit $= c$ setzen. Wir können demnach zu Folge der Erfahrung, dass die Kräfte mit den Geschwindigkeiten nach dem Gesetze einer arithmetischen Reihe ab- und zunehmen, auch annehmen, dass die grösste Geschwindigkeit dieses Arbeiters $= 2c$ und seine grösste Last $= 2k$ seyn werde. Setzen wir nun die wirkliche Geschwindigkeit, mit welcher der Mann in einem bestimmten Falle arbeitet $= v$, und die wirkliche Kraft, welche er in diesem Falle ausübt $= K$, so kann man schliessen:

Wenn die Geschwindigkeit des Arbeiters von 0 bis 2c vermehrt wird, oder wenn der Arbeiter die Geschwindigkeit 2c hat, so wird seine angenommene grösste Kraft 2k um 2k vermindert, oder man hat von 2k dasselbe 2k abzuziehen, um die wirkliche Kraft K, die in diesem Falle $= 0$ ist, zu erhalten; nun wird aber die Geschwindigkeit von 0 bis v vermehrt, oder der Arbeiter bewegt sich mit v Geschwindigkeit, wie viel hat man daher von 2k abzuziehen, um die wirkliche Kraft K zu erhalten? — Wird diess in einer Proportion ausgedrückt, so ist: $2c : 2k = v : \frac{k.v}{c}$, sonach ist die wirkliche Kraft, die der Arbeiter bei der Geschwindigkeit v anwendet, $K = 2k - \frac{k.v}{c} = \underbrace{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}$

§. 18.

Aus diesem Ausdrucke für die Kraft eines Arbeiters ersehen wir:

Erstens. Wenn die Geschwindigkeit des Arbeiters v der mittlern c gleich ist, oder $v = c$, so zeigt sich die wirkliche Kraft des Arbeiters als die mittlere, weil in diesem Falle, wenn in die obige Formel der Werth $v = c$ substituirt wird, die Kraft des Arbeiters $K = k\left(2 - \frac{c}{c}\right) = k\left(2 - 1\right) = k$ ist.

Zweitens. Wird die Geschwindigkeit des Arbeiters $v = 0$ angenommen, so ist seine Kraft $K = k\left(2 - \frac{0}{c}\right) = k\,(2 - 0) = 2k$.

Drittens. Wenn die Geschwindigkeit des Arbeiters die grösste oder $v = 2c$ ist, so erhalten wir die Kraft $K = k\left(2 - \frac{2c}{c}\right) = k\,(2 - 2) = 0$. Alle diese Werthe

stimmen genau mit den obigen Erfahrungen, woraus die Formel für die Kraft des Menschen abgeleitet wurde, überein. Nimmt man nun für die mittlere Geschwindigkeit den Werth $c = 2{,}5$ Fuss und für die mittlere Kraft den Werth $k = 25$ ℔ an, so ist die wirkliche Kraft $K = 25\left(2 - \frac{v}{2{,}5}\right) = 10\,(5 - v)$.

Setzt man jetzt $v = 1$ Fuss, so ist die wirkliche Kraft $K = 10\,(5-1) = 40$ Pfund,
. $v = 2$ „ $= 10\,(5-2) = 30$ —
. $v = 3$ „ $= 10\,(5-3) = 20$ —
. $v = 4$ „ $= 10\,(5-4) = 10$ —
. $v = 5$ „ $= 10\,(5-5) = 0.$ —

Alle diese Werthe treffen genau mit den §. 17. angegebenen Erfahrungen überein, und man kann sonach behaupten, dass der Ausdruck $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$ die wirkliche Kraft eines Arbeiters für alle verschiedenen Geschwindigkeiten, die er bei der Arbeit anwendet, gibt. Dieser Ausdruck gewährt nunmehr noch den Vortheil, dass für stärkere oder schwächere Arbeiter die mittlere Kraft k grösser oder kleiner als 25 ℔ angenommen werden kann, und dass auch eben so bei jenen Menschen, welche grössere oder schnellere Schritte machen, oder mit einer grössern Geschwindigkeit zu arbeiten gewohnt sind, auch für c eine grössere Zahl als 2,5 Fuss gesetzt, und auf solche Art dieselbe Formel der eigenthümlichen Kraft eines jeden Menschen angepasst werden kann.

§. 19.

Die Kraft aller Menschen ist noch von einem zweiten Umstande abhängig, nämlich von der Zeit oder Dauer ihrer Tagesarbeit, d. h. von der Anzahl Stunden, während welcher die Arbeiter täglich beschäftigt werden. Es ist nämlich bekannt, dass jeder Mensch sich viel mehr anstrengen, oder eine weit grössere Last auf sich nehmen könne, wenn die Arbeit nur kurze Zeit währt, oder wenn die Last nicht weit zu tragen ist, und bald abgelegt werden kann; im Gegentheile vermag aber kein Mensch bei einer sehr lange dauernden Arbeit eine grosse Kraft anzuwenden.

Bei der obigen Angabe, dass es für einen mittelmässig starken Menschen einerlei ist, 30 Pfund mit 2 Fuss Geschwindigkeit, oder 20 Pfund mit 3 Fuss Geschwindigkeit zu bewegen, ist die gewöhnliche Arbeitszeit vorausgesetzt. Diese fängt hier Landes in der Regel im Sommer um 5 Uhr Morgens an, und dauert bis 11 Uhr, worauf eine Mittagsruhe bis 1 Uhr eintritt. Von 1 bis Abends 7 Uhr wird wieder gearbeitet, und es werden demnach zusammen 12 Stunden täglich bei der Arbeit zugebracht. Die wenigsten Arbeiten sind jedoch von der Art, dass der Arbeiter diese 12 Stunden hindurch ununterbrochen seine ganze Kraft von 20 oder 30 ℔ anzuwenden hat. Es treten im Gegentheile meistens gewisse Stillstände ein, wobei der Arbeiter sich wieder erholen kann. Werden z. B. Baumaterialien aufgezogen, so findet nach jedem Aufzuge eine Stillstandszeit statt, während welcher die aufgezogene Last entweder abgebunden oder ausgeschüttet und in die untere Tonne eine neue Last wieder eingeladen wird etc. Man nimmt daher im Durchschnitte an, dass unsere Arbeiter nicht durch 12, sondern bloss durch acht Stunden ihre ganze Kraft anwenden, d. h. anhaltend arbeiten.

Bei allen Bergwerken, wo eine ununterbrochene, anhaltende Arbeit gefordert wird, ist dieselbe nach Schichten zu 8 Stunden eingetheilt, und die Mannschaft wird dreimal in 24 Stunden gewechselt. Die erste Abtheilung arbeitet gewöhnlich von Morgens 4 bis Mittags 12 Uhr, sie wird durch neue Arbeiter von 12 bis 8 Uhr Abends ersetzt, und dann treten abermals frische Arbeiter von 8 Uhr Abends bis 4 Uhr Früh ein.

Hieraus ist ersichtlich, dass bei unserer Herleitung der obigen Kraftformel die gewöhnliche Arbeitszeit von 8 Stunden (sammt einer dazwischen stattfindenden Ruhezeit von 4 Stunden) vorausgesetzt worden sey. Nennen wir die gewöhnliche Arbeitszeit $= t$, so ist die Kraft, welche dabei statt findet, nach unserer obigen Berechnung $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$, und es ergibt sich, dass, wenn die Zeit 0 ist, die grösste Kraft angewendet werde, und diese $2K$ betragen müsse, weil K das Mittel zwischen 0 und $2K$ ist. Wenn ferner die Kraft $K = 0$ ist, so muss die Zeit $2t$ betragen, weil t abermals das Mittel zwischen der kleinsten Zeit 0 und der grössten $2t$ ist. Wir erhalten daher die anliegende Tabelle, in welcher der Zeitaufwand und das stattfindende Kraftvermögen zusammen gestellt sind:

Zeit.	Kraft.
0	$2K$
t	K
2t	0

Hieraus erhellt, dass, wenn der Mann durch t Stunden arbeitet, die Grösse K von der grössten Kraft $2K$ abgezogen werden muss, um die wirkliche Kraft, die in diesem Falle K ist, zu erhalten; und eben so, wenn der Mann durch $2t$ Stunden arbeitet, muss von der grössten Kraft $2K$ die Grösse $2K$ abgezogen werden, um die wirkliche Kraft, die in diesem Falle $= 0$ ist, zu geben. Wir können daher allgemein schliessen: dass, wenn der Mann durch z Stunden arbeitet, die Grösse, welche von der grössten Kraft $2K$ abzuziehen ist, aus folgender Proportion erhalten werde: $2t : 2K = z : \frac{Kz}{t}$. Demnach ist die wirkliche Kraft, welche der Arbeiter ausübt $= 2K - \frac{K.z}{t} = K\left(2 - \frac{z}{t}\right)$. Wir haben aber §. 17. gefunden, dass $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$; wir können daher diesen Werth substituiren, und erhalten die wirkliche Kraft $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$.

In dieser Formel findet sich nun sowohl die Geschwindigkeit als auch die Zeit angegeben, und es lässt sich daraus für einen jeden Fall die Kraft eines Arbeiters berechnen.

§. 20.

Die gefundene Kraftformel gewährt den Vortheil, dass sie nicht bloss für die mittlere Geschwindigkeit und Arbeitszeit ein richtiges Maass der Kraft angibt, sondern auch für die beiden äussersten Fälle, wenn nämlich die Geschwindigkeit oder Arbeitszeit am grössten und am kleinsten ist, solche Werthe liefert, die mit den täglichen Erfahrungen über die Kräfte der Menschen sehr nahe übereinstimmen. Dieses geht aus folgenden, äusserst interessanten Resultaten, die sich aus der gefundenen Formel ableiten lassen, hervor:

Erstens. Wenn die mittlere Kraft k, die mittlere Geschwindigkeit c, und die gewohnte tägliche Arbeitszeit t für irgend einen Arbeiter, nach dessen individueller Beschaffenheit sich diese Grössen immer richten müssen, gegeben ist; so kann man nunmehr mittelst der Formel seine wirkliche Kraft in allen möglichen Verhältnissen seiner Arbeitszeit und Geschwindigkeit angeben. Es sey z. B. $v = c$ und $z = t$, d. h. wenn der Arbeiter mit der mittlern Geschwindigkeit durch die gewohnten Stunden arbeitet, so ist seine Kraft $K = k\left(2 - \frac{c}{c}\right)\left(2 - \frac{t}{t}\right) = k$, nämlich die mittlere Kraft, wie wir angenommen haben. — Wenn jedoch $z = 7^h$ und $t = 8^h$, also $\frac{z}{t} = \frac{7}{8}$, so ist die Kraft $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{7}{8}\right) = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)$ d. h. durch Verminderung der wirklichen Arbeitszeit um ihren achten Theil, wird die wirkliche Kraft um den achten Theil vermehrt. Wäre dagegen $z = 9^h = \frac{9}{8}t$, so ist die Kraft $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{9}{8}\right) = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)$, d. h. durch den achten Theil Vermehrung an der Arbeitszeit wird die wirkliche Kraft um den achten Theil vermindert u. s. w.

Zweitens. Wenn die Arbeitszeit z sehr gering und beinahe $= 0$ ist, z. B. nur einige Minuten dauert, und wenn v ebenfalls $= 0$ ist, so zeigt sich die Kraft $K = k\,(2 - 0)\,(2 - 0) = 4\,k$, d. h. die **grösste Kraft eines Arbeiters**, oder die Kraft, welche er bei einer sehr kurzen Dauer der Arbeit ohne Geschwindigkeit anwenden kann, **ist viermal so gross als seine mittlere Kraft**; oder der Arbeiter kann auf einen Augenblick oder auf eine sehr kurze Zeit viermal so viel Last heben, als er den ganzen Tag hindurch mit Anwendung seiner mittlern Geschwindigkeit zu bestreiten vermag. Wenn daher die mittlere Kraft eines Mannes $k = 25$ ℔ ist, so ist er im Stande, $K = 4\,k = 100$ ℔ während einer kurzen Zeit zu gewältigen; wäre aber die mittlere Kraft eines Mannes $k = 35$ ℔, so kann man ihm 140 ℔ z. B. von einem Wagen abladen, aufheben, einige Schritte weit tragen lassen u. s. w. — Gewöhnlich zeigt die Erfahrung, dass ein starker Mensch z. B. ein Ringer, einen andern Menschen mit angestrengter Kraft auf eine kleine Höhe aufzuheben und zu Boden zu werfen vermöge, womit also das erhaltene Resultat in so weit übereinstimmt, als das Gewicht eines Menschen 120 bis 140 Nied. Oesterr. ℔ beträgt, während k in diesem Falle auf 30 bis 35 ℔ geschätzt werden kann.

Drittens. Setzen wir die Arbeitszeit z der mittlern t gleich, so ist die Kraft eines Mannes $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$, womit die angeführten Erfahrungen der Gebrüder *Bernoully* und Anderer übereinstimmen. Wird in diesem Falle die Geschwindigkeit v sehr klein, oder $v = 0$, sonach der Arbeiter als durch 8 Stunden stillstehend angenommen, so wäre die Kraft $K = 2k$ oder der doppelten mittlern Kraft gleich. Ein Mann kann demnach durch die 8 wirklichen Arbeitsstunden, ohne Geschwindigkeit oder im Zustande der Ruhe, die Last 2k auf sich nehmen. — Hiebei muss jedoch nothwendig erinnert werden, dass die Arbeitszeit eines ganzen Tages eigentlich 12 Stunden beträgt, dass sonach dem Arbeiter zwischen den 8 Stunden wirklicher Ar-

beit noch 4 Stunden an Stillstands- oder Ruhepausen zufallen, welche derselbe während seiner wirklichen Arbeit abwechselnd benützen kann.

Viertens. Gewöhnlich wird der Weg einer Meile zu 2 Stunden berechnet. Wenn auf solche Art ein Bothe in 8 Stunden täglich 4 Meilen zurückzulegen hat, so ist seine Geschwindigkeit $v = \frac{4.4000.6}{8.3600} = \frac{10}{3}$ Fuss, und die Last, welche er tragen kann, beträgt $K = k\left(2 - \frac{10}{3.2{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = \frac{2}{3}$ k oder $\frac{2}{3} . 25 = 16\frac{2}{3}$ ℔; d. h. ein mittelmässig starker Bothe kann täglich eine Last von $16\frac{2}{3}$ ℔ auf eine Entfernung von 4 Meilen tragen. Nehmen wir für einen stärkern Menschen $k = 30$ ℔, so ergibt sich, dass derselbe auf 4 Meilen täglich 20 ℔ tragen kann. — Da man in solchen Fällen den Bothen gewöhnlich nicht über 20 ℔ zu tragen gibt, so wird auch hierdurch die aufgestellte Kraftformel bestätigt.

Fünftens. Setzen wir noch die Geschwindigkeit des Arbeiters doppelt so gross, als seine mittlere oder $v = 2c$, und die wirkliche Arbeitszeit doppelt so gross, als seine mittlere von 8 Stunden oder $z = 2t$, so ist $K = k\left(2 - \frac{2c}{c}\right)\left(2 - \frac{2t}{t}\right) = 0$, d. h. dieser Arbeiter kann gar keine Last auf sich nehmen. Nun beträgt aber der Raum, welchen er in einem Tage zurücklegt $S = v.z = 2c.2t = 2.2{,}5.2.3600.8 = 288000' = 48000° = 12$ Nied. Oestr. Meilen. Ein Bothe kann daher, wenn er frei oder bloss mit einem Briefe gesendet wird, den Weg von 12 N. Oe. Meilen in einem Tage zurücklegen. — Hiebei wird aber ein ganz ebener Weg ohne Hindernisse z. B. Berge verstanden, welche seine Kraft noch auf andere Art ansprechen würden. Da nun mehrere Fälle bekannt sind, wo Krämer, Lotteriebothen u. a. einen Weg von 12 Meilen in einem Tage wirklich zurückgelegt, und am nächstfolgenden Tage auch wieder zurückgemacht haben, so erhält die angeführte Kraftformel hiedurch abermals neue Bestätigung. (Uiber diesen Gegenstand ist jedoch im folg. 40. §. noch umständlicher die Rede.)

Sechstens. Bei Arbeiten, wo die Menschen öfters gewechselt, und nur durch eine sehr kurze Zeit angestrengt werden, wie z. B. bei Feuerspritzen, können sie eine weit grössere Kraft als ihre mittlere ausüben. Es sey nämlich $z = 10$ Minuten, also $\frac{z}{t} = \frac{10}{60.8} = \frac{1}{48}$ und $v = 3'$, so ist die Kraft $= 25\left(2 - \frac{3}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{1}{48}\right) = 39{,}58$ ℔; es wird daher ein jeder Mensch, dessen mittlere Kraft 25 ℔ ist, mit der Kraft von beinahe 40 ℔ während der Zeit von zehn Minuten an einer Feuerspritze arbeiten können.

§. 21.

Einen sehr interessanten Beleg für die Richtigkeit der obigen Formel erhalten wir auch durch **die Leistungen des Militärs.** Es ist bekannt, dass zum Militärstande nur die gesündesten und stärksten Menschen gewählt werden, welche daher auch mehr, als es von den gewöhnlichen Arbeitern gilt, zu leisten vermögen. Es müssen sonach die Buchstaben k und c grössere Werthe als 25 ℔ und $2\frac{1}{2}$ Fuss erhalten.

Bei dem k. k. österreichischen Militär werden die Trommelschläger so exercirt, dass der Mann mit 5 sogenannten **Reiseschritten** 2 Klafter zurücklegt. Der Feld-

marschall-Lieutenant Freiherr *von Zach* sagt im 1. Theile seiner Elemente der Manövrir-Kunst (Wien, 1812) im §. 87: „Ich bin mehrmalen auf der Chaussée von einem Meilenzeiger zum andern gegangen; und habe nie über 52, nie unter 49 Minuten dazu benöthiget. Die Anzahl der Schritte betrug 4900 bis 5300. Nimmt man 5000 Schritte in 50 Minuten an, so kommen 100 Schritte auf 1 Minute. Die Entfernung von einem Meilenzeiger zum andern war 2000 W. Klafter". Diess gäbe 5 Schritte auf 2 Klafter und die Grösse eines Schrittes $= \frac{2}{5}$ Klafter oder 2,4 Fuss und da 2000 Klafter $=$ 12000 Fuss in 50 Minuten oder $3000^{Sec.}$ zurückgelegt worden, so ist die Geschwindigkeit bei dem Reiseschritte $= \frac{12000}{3000} = 4$ Fuss. Die Meile oder 4000 Klafter werden demnach in 2.50 oder 100 Minuten $= 1^{h}\ 40^{Min.}$ zurückgelegt.

„Wenn die Leute geschlossen marschiren, so ist der vorige Schritt zu gross und zu geschwind, und sie können ihn nicht mehr $\frac{2}{5}$ Klafter gross machen. Nach mehreren Probemärschen mit geschlossenen Truppen hat man im Mittel gefunden, dass 40 Klafter zu 105 Schritten das brauchbarste Längenmaass seyen. Diess gäbe die Grösse eines Schrittes $= \frac{40 \times 6}{105} = 2\frac{2}{7}$ Fuss. Hinsichtlich der Geschwindigkeit werden 80 Schritte in einer Minute gemacht; die Geschwindigkeit ist daher $= \frac{80 \times 2\frac{2}{7}}{60} = 3\frac{1}{21}$ Fuss oder beinahe 3 Fuss. Dieser Schritt wird zu Anfange und am Ende der Manöver, d. i. bei den Ab- und Aufmärschen, dann bei Frontmärschen und überhaupt so oft gebraucht, als die Truppen geschlossen beisammen marschiren müssen. Man nennt diesen Schritt den Manövrir-Schritt."

Weiter sagt *Zach* im §. 89.: „Es kommen im Felde Gelegenheiten vor, wo eine ausserordentliche Geschwindigkeit nothwendig wird. In diesem Falle sagt man, das Militär marschire im Doublir-Schritte. Diese angestrengte Geschwindigkeit kann nicht von langer Dauer seyn; man pflegt 120 Schritte in einer Minute zu machen. Versucht man mit dieser Geschwindigkeit eine Strecke von 100 Klaftern zu durchgehen, so wird man dazu 240 Schritte nöthig haben. Die Grösse eines Schrittes beträgt sonach $\frac{100.6}{240} = 2\frac{1}{2}$ Fuss, und die Geschwindigkeit ergibt sich $= \frac{120 . 2\frac{1}{2}}{60} = 5$ Fuss."

Nachstehende Tabelle gibt die Uibersicht der Geschwindigkeiten und Grössen der angeführten drei Schritt-Arten:

Beschaffenheit der Schritte.	Durchlaufener Raum in einer Minute.		Grösse eines Schrittes in Fussen.	Geschwindigkeit.
	Schritte.	Fusse.		
Einfacher Manövrir-Schritt.	80	$182\frac{6}{7}$	$2\frac{2}{7}$	3 Fuss.
Reiseschritt	100	240	$2\frac{4}{10}$	4 Fuss.
Doublir-Schritt	120	300	$2\frac{1}{2}$	5 Fuss.

Nach *Hoyer's* Taschenbuch für Soldaten (Tübingen, 1803) macht das Fussvolk in einer Minute bequem:

Bei dem einfachen Manövrir-Schritt, 80 Schritte zu 2,5 Rheinl. Fuss; daher die Geschwindigkeit = 3,3 Nied. Oest. Fuss. *)

Bei dem einfachen Reiseschritt, 100 Schritte zu 2,5 Rheinl. Fuss; daher die Geschwindigkeit = 4,1 Nied. Oest. Fuss.

Bei dem einfachen Doublir-Schritt, 150 Schritte zu 2,25 Rheinl. Fuss; daher die Geschwindigkeit = 5,6 Nied. Oest. Fuss.

Aus diesen Erfahrungen folgt, dass die Geschwindigkeit der militärischen Bewegungen viel grösser sey, als die Geschwindigkeit der gewöhnlichen Tagarbeiter, die wir nur zu 2,5 Fuss annahmen. Gewöhnlich rechnet man, dass ein Bothe den Weg von einer Meile in 2 Stunden zurücklegt, diess gibt eine Geschwindigkeit von $\frac{4000.6}{2.3600} = 3\frac{1}{3}$ Fuss, welches mit der Geschwindigkeit des Militärs beim Manövrir-Schritte sehr nahe überein kömmt. Die übrigen militärischen Geschwindigkeiten bei dem Reise- und Doublir-Schritte sind jedoch weit grösser.

§. 22.

Um nun die Kraftanstrengung des Militärs zu berechnen, wollen wir zwei Zeitperioden betrachten, in welchen das Militär verschiedene Gewichte an Bagage trug, und auch verschiedene Tagesmärsche zurückzulegen hatte.

Vor dem Ende des verflossenen Jahrhundertes waren die Märsche des k. k. österr. Militärs so eingerichtet, dass täglich nur 2 Meilen und zwar gewöhnlich in 4 Stunden zurückgelegt wurden. Bei diesem Marsche trug ein jeder Soldat nebst seinem Anzuge eine Flinte, welche vorschriftsmässig 12 ℔ wog; die Patrontasche mit 60 Patronen hatte 10 ℔, der Mantel mit dem Tornister, Brod, Kochgeräthe und anderm Gepäcke beiläufig 23 ℔, folglich betrug die gesammte Last 12 + 10 + 23 = 45 ℔.

Da der Weg von 2 Meilen oder 8000 Klafter in 4 Stunden zurückgelegt wurde, so war die Geschwindigkeit $v = {}^{10}/_{3}$ Fuss, und weil man an jedem Tage nur 4 Stunden auf dem Wege zubrachte, so war $z = 4$ Stunden. Nachdem es nun bekannt ist, dass für den Soldatenstand immer nur die gesündesten, stärksten und grössten Leute ausgesucht wurden, so kann man die mittlere Geschwindigkeit derselben $c = {}^{10}/_{3}$ Fuss und $t = 8$ Stunden annehmen. Setzen wir nun diese Werthe in unsere Formel, so erhalten wir $k\left(2 - \frac{10.3}{3.10}\right)\left(2 - \frac{4}{8}\right) = 45$ ℔. Hieraus folgt die mittlere Kraft dieser Soldaten $k = 30$ ℔.

Wenn das Militär in Kriegszeiten zuweilen doppelte Märsche oder in einem Tage 4 Meilen machen musste, so war $z = 8$ Stunden und $v = c = {}^{10}/_{3}$ Fuss, also in diesem Falle das verhältnissmässige Kraftvermögen eines Soldaten $= 30\left(2 - \frac{10.3}{3.10}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 30$ ℔.

*) Nach *Vega* verhält sich der Rheinländische Fuss zum Wiener Fuss, wie 313,8536 zu 316,1028 oder wie 1 zu 1,0072, es ist demnach ein Rheinl. Fuss $= \frac{1}{1,0072} = 0,993$ Wiener Fuss.

Wenn endlich das Militär, wie es in dem Revolutionskriege manchmal der Fall war, 6 Meilen täglich zurückzulegen hatte, oder wenn $z = 12$ Stunden und $v = {}^{10}/_{3}$ Fuss war, so betrug die Kraft eines Soldaten nur noch $30\left(2-\frac{10.3}{3.10}\right)\left(2-\frac{12}{8}\right)=15$ Pf. Das Militär konnte daher in den letzten zwei Fällen die übliche Bagage nicht mehr tragen, und ein Theil hievon musste auf besondern Wägen nachgeführt werden, wenn man nicht etwa die Mannschaft besonders anstrengen, und ihr mehr als die gewöhnliche Tagesarbeit auflegen wollte. —

In neuern Zeiten ist bei dem k. k. österr. Militär das Gewicht der Bagage, welche ein Soldat trägt, bedeutend vermindert worden; dazu gehört nämlich nebst dem Anzuge des Soldaten:

Eine Flinte, welche vorschriftsmässig wiegt	8 ℔.
Die Patrontasche mit den Patronen	8 —
Der Tornister mit dem Uibrigen	19 —
Also zusammen eine Last von	35 ℔.;

daher gegen die frühere Last von 45 ℔, gegenwärtig um 10 ℔ weniger. Dagegen betragen die jetzigen militärischen Märsche täglich 3 Meilen, welche gewöhnlich in 6 Stunden zurückgelegt werden.

Die Geschwindigkeit des Marsches ist sonach $v = \frac{3.4000.6}{6.3600} = \frac{10}{3}$ Fuss, und die Zeit ist $z = 6$ Stunden. Nehmen wir nunmehr, wie im vorigen Falle, die mittlere Geschwindigkeit $c = {}^{10}/_{3}$ Fuss, und $t = 8$ an, so erhält man durch Substituirung in die gefundene Kraftformel $35 = k\left(2-\frac{10.3}{3.10}\right)\left(2-\frac{6}{8}\right)$, woraus $k = 28$ ℔, welches gegen die obige mittlere Kraft $k = 30$ ℔ nunmehr um 2 ℔ geringer ist.

Hieraus geht hervor, dass von den gegenwärtigen Soldaten keine solche Kraftanstrengung wie in frühern Zeiten gefordet wird, und dass die Verminderung des Gewichtes der Bagage von 10 Pfunden ausserdem die Möglichkeit herbeiführte, mit diesen schwächern Leuten täglich 3 Meilen, statt den frühern Tagesmärschen von 2 Meilen, zurückzulegen.

Wir haben bei den Berechnungen über die militärischen Märsche die R a s t t a g e nicht angeschlagen, obgleich sie jeden vierten Tag im Frieden, und jeden zweiten oder dritten Tag in Kriegszeiten statt finden. Bereits oben ward jedoch bemerkt, dass wir für alle berechneten Truppenmärsche bloss ebene oder horizontale Strassen annahmen, wogegen die gewöhnlichen Strassen mehr oder minder gebirgig sind. Der Rasttag entschädigt daher den Soldaten für die grössere Anstrengung, welche er bei Märschen wegen den Anhöhen der Strassen leisten muss. Uiberdiess ist der Rasttag bei Truppenmärschen auch andern militärischen Beschäftigungen gewidmet, nämlich zur Reparatur der Kleidung und Rüstung, zur Erholung der maroden Mannschaft u. s. w. Uiberhaupt würde eine genaue Berechnung über die Leistungen des Militärs unter allen Umständen sehr verwickelt werden, und wegen der höchst verschiedenen, keiner genauen Berechnung fähigen Lokalitäts- und anderer Hindernisse auch überflüssig seyn.

Mit Berücksichtigung dieser Bemerkung glauben wir, dass die aufgestellte Kraftformel mit den Erfahrungen hinsichtlich der militärischen Leistungen übereinstimmende

Resultate gibt, wesshalb sich demnach die Kraftformel für einen jeden ähnlichen Fall benützen lässt; d. h. so oft das Gewicht gegeben ist, welches das Militär zu tragen hat, kann man die Weite des Weges, welcher damit zurückgelegt wird, finden, und so oft im Gegentheile der tägliche Marsch gegeben ist, kann man berechnen, welches Gewicht ein Soldat während desselben zu tragen im Stande ist.

§. 23.

Eine weitere Bestätigung unserer aufgestellten Kraftformel zeigt sich bei einer in der Feldwirthschaft sehr bekannten Erfahrung. Man weiss nämlich, dass ein fleissiger Säemann täglich eine Fläche von 15 Nied. Oesterr. Metzen (zu 533⅓ Quadratklafter) oder 5 Nied. Oesterr. Joch Kornfeld besäen kann. Hiebei bewirft der Säemann bei jedem Gange ein Beet von 4 Fuss Breite; er muss daher, um eine Quadratklafter zu besäen, einen Weg von 1½ Längenklaftern zurücklegen. Für die ganze Fläche von 5 Joch oder 8000 Quadratklafter beträgt sonach der Weg, welchen der Säemann in einem Tage zu durchschreiten hat, 12000 Kurrentklafter oder 72000 Fuss.

Das Säen findet in den kürzern Tagen der Monathe März, September und Oktober statt; die Aussaat beginnt gewöhnlich früh um 8 Uhr, dauert ununterbrochen bis 12 Uhr Mittags, und dann von 2 bis 6 Uhr Abends; die wirkliche Arbeit beträgt daher $z = 8$ Stunden, und sonach ist der Weg in einer Sekunde $= \frac{72000}{8.3600} = 2{,}5$ Fuss, welches also die Geschwindigkeit seyn wird, womit der Säemann zu gehen pflegt. Derselbe trägt ¼ Metze Saatkorn, das, seiner bessern Qualität wegen als das gewöhnliche Korn, 20 ℔ wiegt, das Säetuch hat beiläufig 2 ℔ Gewicht, er trägt daher insgesammt 22 ℔.

Wird nun diess in die Kraftformel substituirt, so ist: $k\left(2 - \frac{2{,}5}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 22$ ℔, woraus sich die mittlere Kraft der zum Säen verwendeten Arbeitsleute, $k = 22$ ℔ ergibt. Man kann jedoch diese mittlere Kraft auf 25 bis 30 Pfund anschlagen, weil bei unserer Berechnung der Umstand nicht berücksichtigt ist, dass der Säemann in einem frisch geackerten Felde schreitet, und daher weit mehr ermüdet, als ginge er auf einer harten Strasse. Demnach stimmt auch die angeführte, in der Oekonomie bekannte Arbeitsleistung mit der Berechnung der Kraft nach unserer Formel überein.

§. 24.

Es ist zu bedauern, dass die Erfahrungen, welche in Bezug auf die Kräfte der Menschen in den meisten mechanischen Schriften angeführt sind, nicht diejenige Vollständigkeit besitzen, welche zum Vergleiche mit unserer Kraftformel nöthig ist. Gewöhnlich wird bei solchen Erfahrungen nur die Geschwindigkeit, nicht aber auch die wirkliche Arbeitszeit angegeben, und selbst die wirklich verrichtete Arbeit ist häufig nur unvollständig angeführt; wir können daher auch nur die wenigsten, bisher in Schriften angegebenen Erfahrungen unserer Kraftformel genau entgegenhalten. Folgende Angaben über die Kräfte der Menschen verdienen hier eine besondere Berücksichtigung: *)

*) Die Berechnung der Kraft der Arbeiter aus folgenden in mechanischen Schriften angeführten Erfahrungen setzt bereits die Kenntnisse des Hebels, der schiefen Fläche u. s. w. voraus; die Begrün-

I. *Walcher* sagt (in seinem: „Kurzen Inhalt der mechanischen Kollegien, Wien, 1759“): „Wenn ein Mensch von mittelmässiger Stärke eine Maschine 2 bis 3 Stunden unausgesetzt bewegen soll, so beläuft sich sein Vermögen nicht viel über 25 ℔, welche Kraft er nämlich wirklich anzuwenden hat. Die Geschwindigkeit (oder der Weg, den der Mensch in gerader Linie oder in der Kreisbewegung zurücklegt) lässt sich in einer Stunde nicht über 1800 bis 2000 Klafter erstrecken.“

Im ersten Falle ist hier die Geschwindigkeit $v = \frac{1800 . 6}{3600} = 3$ Fuss und im zweiten Falle $v = \frac{2000 . 6}{3600} = \frac{10}{3}$ Fuss; nimmt man nun für gewöhnliche Arbeiter $z = 3^h$, $c = 2{,}5$ und $t = 8^h$ an, so ist für den zweiten Fall: $k\left(2 - \frac{10}{3 . 2{,}5}\right)\left(2 - \frac{3}{8}\right) = 25$ oder $k . \frac{2}{3} . \frac{13}{8} = 25$, woraus sich die mittlere Kraft k dieser Arbeiter beinahe = 23 ℔ ergibt, welches mit unserer Angabe nahe übereinstimmt.

dung der angegebenen Kraftformel durch diese Erfahrungen sollte demnach erst in einem spätern Kapitel dieses Werkes folgen. Wir glauben aber, dass es den meisten unserer Leser, die mit diesen Elementarlehren bereits bekannt sind, angenehmer seyn werde, alles Merkwürdige über diesen Gegenstand beisammen zu finden. Daher setzen wir das minder Verständliche in Noten unter den Text, damit jene in die Grundsätze der Mechanik bereits eingeweihte Leser diesen Gegenstand vollständig kennen lernen, andere Freunde der Wissenschaft aber, denen die hiezu nöthigen Vorkenntnisse noch fehlen, diese Noten inzwischen überschlagen, und erst nach Abhandlung des zweiten Kapitels wieder vornehmen mögen.

1. *Coulomb* erzählt in den *Memoires de l'institut, tome* 1. dass *Borda* mit seinen acht Begleitern am Pik von Teneriffa von 9 Uhr Morgens bis 5½ Uhr Nachmittags eine Höhe von 2923 mètres erstiegen, und dabei nach der horizontalen Richtung 20000 mètres zurückgelegt habe. Da 1 mètre = $3{,}1635$ Nied. Oesterr. Fuss, so betrug die vertikal erstiegene Höhe 9247 Nied. Oesterr. Fuss, und der hiebei horizontal zurückgelegte Weg 63270 Nied. Oesterr. Fuss. Der mittlere Neigungswinkel α dieser schiefen Fläche ergibt sich aus $\tan\alpha = \frac{2923}{20000} = \tan 8^\circ\ 18'\ 54''$ und die Länge des Weges über die schiefe Fläche ist demnach beinahe 64000 Nied. Oesterr. Fuss. Man hat während dieser Zeit nur ¾ Stunden ausgeruht, um das Mittagsmahl einzunehmen, demnach war $z = 7{,}75$ Stunden und $v = \frac{64000}{7{,}75 . 3600} = 2{,}3$ Nied. Oesterr. Fuss.

Das Gewicht, welches die Arbeiter an Lebensmitteln, Instrumenten, Kleidungen u. dgl. zu tragen hatten, ist nicht angegeben. Rechnen wir das Gewicht eines Menschen zu 130 Pfunden, so hatte jeder zur Bewegung seines Körpers über diese schiefe Fläche die Kraft $130 . \sin(8^\circ\ 18'\ 54'') = 18{,}8$ ℔ oder beinahe 19 ℔ anzuwenden. Unsere Formel gibt für denselben Fall, wenn man k = 25 ℔ setzt: $K = 25\left(2 - \frac{2{,}3}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{7{,}75}{8}\right) = 28$ ℔, also konnte jeder Begleiter nur noch 28 — 19 = 9 ℔ tragen.

Für stärkere Leute, z. B. für Soldaten wäre k = 30 ℔ und c = 3 Fuss, demnach $K = 30\left(2 - \frac{2{,}3}{3}\right)\left(2 - \frac{7{,}75}{8}\right) = 38{,}2$ ℔; also würde jeder Begleiter noch 38 — 19 d. i. 19 ℔ haben tragen können. Das Mittel von beiden Resultaten, nämlich $\frac{9 + 19}{2} = 14$ ℔ stimmt mit den üblichen 15 ℔ sehr nahe überein, welche man der Dienerschaft auf solchen Reisen gewöhnlich zu tragen gibt.

2. *Coulomb* hat aus mehreren Erfahrungen geschlossen, dass auf einer Treppe, die nicht über 20 bis 30 mètres hoch ist, in jeder Minute bequem 14 mètres (44,3 Nied. Oesterr. Fuss) erstiegen werden können. Setzen wir das Verhältniss der Höhe zur Breite der Stuffen, nach *Coulomb*, wie

II. Nach *Daniel Bernoully* kann ein Mensch durch 8 Stunden 23 französische ℔ mit 3 Fuss Geschwindigkeit tragen; da nun ein altes französisches ℔ (*Livre*) $= 0{,}8741$ N. Oe. ℔, und ein alter Pariser Fuss (*pied*) $= 1{,}0276$ N. Oe. Fuss, so sind 23 französische ℔ $= 20{,}1$ Nied. Oesterr. ℔ und 3 französische Fuss $= 3{,}1$ Nied. Oesterr. Fuss $= v$. Setzt man für einen gewöhnlichen Arbeiter, wie es hier der Fall ist, $c = 2{,}5$ und $t = 8$, so ist, wenn man die obigen Werthe $v = 3{,}1$ und $z = 8$ Stunden in unsere Kraftformel substituirt: $20{,}1 = k\left(2 - \frac{3{,}1}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right)$ woraus die mittlere Kraft $k = 26{,}4$ ℔ folgt.

1 : 3 (z. B. die Höhe einer Stuffe 4 Zoll, die Breite 12 Zoll), so ist das Verhältniss der Höhe zur Länge derselben, wie 1 zu $3\frac{1}{6} = 6 : 19$ und die schiefe Länge des Weges beträgt $44{,}3 \cdot \frac{19}{6} = 140{,}3$ Fuss, folglich die Geschwindigkeit $v = \frac{140{,}3}{60} = 2{,}3$ Fuss und die Kraft, welche der Steigende zur Bewegung seines Körpers von 130 ℔ Gewicht anwenden muss $= \frac{130 \cdot 6}{19} = 41$ ℔; demnach wäre, wenn man die mittlere Kraft $k = 25$ ℔ setzt: $25\left(2 - \frac{2{,}3}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{z}{8}\right) = \frac{130 \cdot 6}{19}$ woraus $z = 3{,}84$ Stunden $= 3^h\ 50^{Min.}$ folgt. Demnach kann ein Mann bei dieser Arbeit täglich nur 3 Stunden und 50 Minuten aushalten, welches auch *Coulomb* bestätigt.

3. Eine andere hieher gehörige Erfahrung war, dass die Arbeitsleute eine bequeme 150 mètres hohe Treppe in einem Tage nicht 18mal ersteigen wollten, ungeachtet *Coulomb* denselben einen vollen Tageslohn angebothen hatte. Rechnen wir nämlich, wie zuvor 14 mètres Höhe auf eine Minute, so ist die Zeit, in welcher diese Treppe einmal erstiegen werden konnte $= \frac{150}{14}$ Minuten $= 10^{Min.}\ 43^{Sec.}$ Weil die Menschen nach jeder Steigung wieder über dieselbe Treppe herabgehen müssen, so kann diese leichtere Arbeit zwar mit einer grössern, jedoch bei gleicher Anstrengung nicht mehr, als mit der doppelten Geschwindigkeit verrichtet werden. Rechnen wir demnach für das Herabgehen nur $5^{Min.}\ 21^{Sec.}$, so beträgt die Zeit eines Ganges auf und ab $16^{Min.}\ 4^{Sec.}$, folglich die ganze Zeit, in welcher diese Treppe 18mal zu ersteigen war $4^h\ 49^{Min.}\ 12^{Sec.}$; folglich mehr als die vorhin gefundenen 3 Stunden 50 Minuten, und die Arbeitsleute hatten allerdings einen hinreichenden Grund, die Treppe um einen Taglohn nicht 18mal ersteigen zu wollen, weil sie sich sonst, wie es unsere Kraftformel zeigt, weit mehr als bei der gewöhnlichen Arbeit hätten anstrengen müssen.

4. *Coulomb* liess oft Brennholz 12 mètres hoch tragen; der Arbeiter war stark, konnte aber nie mehr, als 6 *Voies* in einem Tage auf diese Höhe bringen. Die Voie Holz wog 734 Kilogramme oder 1311 Nied. Oesterr. Pfunde, da 1 Kilogramm $= 1{,}7857$ Nied. Oesterr. Pfund ist. Er brauchte im Durchschnitte zu einer Voie 11 Gänge, denn die ersten trug er in 10, die letzten in 12 Gängen; bei jedem Gange trug er demnach im Mittel $66{,}7$ Kilogramme, wofür *Coulomb* mit Zurechnung des Gewichtes der Traghacken 68 Kilogramme (121 Nied. Oesterr. ℔) annimmt. Da dieser Träger sehr viel, (nämlich 121 Nied. Oesterr. ℔) trug, und vermuthlich auch nicht alle Tage dieselbe Arbeit vornahm, so wollen wir, wie bei den Soldaten, seine gewöhnliche Geschwindigkeit $c = \frac{13}{10}$ Fuss und die mittlern Arbeitsstunden $t = 8^h$ setzen. Die Länge des Weges ist nicht angegeben, da jedoch *Coulomb* diejenige Stiege für die bequemste hält, deren Stuffen 5 Zoll Höhe und 15 Zoll Breite haben, so ist bei dieser Annahme das Verhältniss der Höhe zur Länge, wie $1 : 3\frac{1}{6} = 6 : 19$ und die schiefe Länge des Weges für 12 mètres (38 Nied. Oesterr. Fusse) Höhe beträgt $\frac{19}{6} \times 38 = 120{,}3$ Nied. Oesterr. Fuss. Rechnen wir nun, dass der Arbeiter diesen Weg in 2 Minuten zurückgelegt, sonach auf das Tragen der 6 Voies $2 \cdot 11 \cdot 6 = 132^{Min.} = 2{,}2^h$ verwendet habe, so ist $v = \frac{120{,}3}{2 \cdot 60} = 1$ Fuss und $z = 2{,}2^h$. Demnach erhalten wir durch die Substitution in unsere Kraftformel $k\left(2 - \frac{1 \cdot 3}{10}\right)\left(2 - \frac{2{,}2}{8}\right) = 121$ woraus $k = 41{,}3$ ℔ gefunden wird. Hierbei ist aber das eigene

III. Nach *de la Hire* hat ein Mensch durch 2 Stunden mit der Kraft von 29 französischen (25,3 Nied. Oesterr.) ℔, und mit der Geschwindigkeit von 2 französischen (2,1 Nied. Oesterr.) Fuss gearbeitet und diese Arbeit in 12 Stunden fünfmal wiederholt. Da dieser Arbeiter unter die stärkern gehörte, so kann man $c = {}^{10}/_3$ und $t = 8$ annehmen, und da ferner $v = 2{,}1$ Fuss und $z = 2.5 = 10$ Stunden war, so ist, wenn man diese Werthe in die Kraftformel substituirt:

$k\left(2 - \frac{2{,}1 . 3}{10}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = 25{,}3$, woraus sich die mittlere Kraft $k = 24{,}6$ ℔ ergibt.

Gewicht des Trägers noch nicht in Rechnung gebracht. Setzt man dieses Gewicht = 133 ℔, so ist die Kraft, die noch zum Hinauftragen seines Körpers nöthig ist $= \frac{133 . 6}{19} = 42$ ℔; demnach seine ganze Kraftanstrengung $= 121 + 42 = 163$ ℔ $= k\left(2 - \frac{1 . 3}{10}\right)\left(2 - \frac{2{,}2}{8}\right)$ woraus nunmehr $k = 55{,}6$ ℔ folgt, d. h. dieser Arbeiter hat mehr, als die doppelte mittlere Kraftanstrengung ausgeübt.

Um aus den Erfahrungen, welche *Coulomb* über die Kraft der Menschen bei dem Besteigen der Berge, Treppen oder Stiegen und bei verschiedenen Maschinenarbeiten macht, ein Gesetz für die Veränderungen der menschlichen Kraft ableiten zu können, bemerkt derselbe: dass es überhaupt nothwendig sey, zur Last, welche der Mensch trägt, noch das Gewicht seines Körpers hinzuzusetzen, und die Summe von beiden als die Totalkraft des Arbeiters zu betrachten. Mit diesem Zusatze glaubt *Coulomb* aus seinen Erfahrungen das beständige Gesetz abzuleiten, dass jeder Arbeiter das Vermögen habe, auf eine gegebene Höhe täglich eine bestimmte Last hinauf zu bringen, so dass er auf grössere Höhen nur eine kleinere Last, und im Gegentheile auf kleinere Höhen eine grössere Last tragen könne, oder dass überhaupt das Produkt aus der gesammten Last in die Höhe, auf welche sie in einem Tage getragen wird, einen beständigen, für alle Tage, Lasten und Höhen immer gleichen Werth habe. Dieses, dem in §. 17. angeführten *Bernoully'schen* Satze ähnliche Resultat unterliegt aber auch, wie jenes, derselben Schwierigkeit, dass nämlich der Mensch, welcher auf einer horizontalen Ebene fortschreitet, oder am Berge still stehet, eine unendlich grosse Last müsste auf sich nehmen können, welches die beschränkten Kräfte der Menschen nicht gestatten.

5. In *Nordwall's* Maschinenlehre (a. d. Schwedischen, Berlin 1804) wird Seite 117 angeführt: „Man weiss aus der Erfahrung, dass ein Arbeiter durch 8 Stunden einen Hornhaspel 30mal in einer Minute umdrehen kann, wenn 1) der Halbmesser der Walze und der Kurbel gleich gross und jeder = 14 Zolle und 2) die aufzufördernde Last 25 ℔ ist."

Da die Peripherie ${}^{44}/_7 . 14 = 88$ Zolle beträgt, und ein schwed. Fuss $= 0{,}9391$ Nied. Oesterr. Fuss, so ist die Peripherie $= 88 . 0{,}9391 = 82{,}641$ Nied. Oesterr. Zolle, und der in einer Minute zurückgelegte Raum $= \frac{82{,}641}{12} . 30$ Nied. Oesterr. Fuss, folglich die Geschwindigkeit $v = \frac{82{,}641 . 30}{12 \cdot 60} = 3{,}4$ Fuss. Da nun ein schwedisches Schalpfund $= 0{,}7563$ Nied. Oesterr. ℔, so geben 25 schwedische ℔ beinahe 19 Nied. Oesterr. ℔. Setzt man nun die wirkliche Arbeitszeit $z = t = 8$ und die mittlere Geschwindigkeit $c = 3$ Fuss, so ist, wenn diese Werthe in die, in der folgenden Theorie abgeleitete Kraftformel für die Arbeit am Krummzapfen $k\left(\frac{14}{11} - \frac{v}{2c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ substituirt werden, $k\left(\frac{14}{11} - \frac{3{,}4}{2.3}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 19$, woraus $k = 26{,}9$ folgt. Die mittlere Kraft der Arbeiter in Schweden wäre demnach nur wenig grösser als bei den hiesigen Arbeitern, und würde den Leistungen unseres Militärs beinahe gleich kommen.

6. *Vauban* folgert aus vielen angestellten Versuchen, dass ein Mensch in einem Tage mit einem Schubkarren 14,79 Kubikmeter (468 N. Oe. Kubikfuss) Erde führen und im Tage 500 Gänge, jeden zu 29,226 Meter (92,46 Nied. Oesterr. Fuss) machen könne, wobei also die Länge des Weges im ganzen Tage 14613 Meter (46228 Nied. Oesterr. Fuss), den er mit der Ladung hin und ohne Ladung zurück-

IV. In den *Memoires de l'institut*, *tome* 1. erzählt *Coulomb* mehrere Resultate von häufig wiederholten Beobachtungen über die Kraft der Menschen, die ihm bei den verschiedenen Tagesarbeiten vorkamen.

Die stärksten Arbeiter versicherten *Coulomb*, dass sie 44 Kilogramme (78,6 Nied. Oesterr. ℔) auf sich nehmen und in einem Tage 18 bis 20 Kilometer (beiläufig 10000 Nied. Oesterr. Klafter) weit tragen könnten. Wollte man die Geschwindigkeit dieser Träger nur zu 2 Fuss ($= v$) annehmen, so wäre die Zeit, in welcher sie diese 10000 Klafter zurücklegten $= \frac{10000 . 6}{2 . 3600} = \frac{25}{3}$ Stunden $= 8^{h}\ 20^{Min.}$. Setzen wir nun, wie für starke Arbeiter $c = {}^{10}\!/_{3}$ Fuss und $t = 8$, dann $z = {}^{25}\!/_{3}$ und $v = 2$, so hat man: $78{,}6 = k\left(2 - \frac{3 . 2}{10}\right)\left(2 - \frac{25}{3 . 8}\right)$, woraus $k = 58{,}6$ ℔ folgt, welches mit der Erfahrung, die *Coulomb* über die Kraft der stärksten Arbeiter bei dem Holztragen machte, nahe übereintrifft.

geht, beträgt. Der Karren wurde im Durchschnitte mit einer Last von 70 Kilogrammen (125 Nied. Oesterr. ℔) beladen; das Gewicht des Karrens betrug im Mittel 30 Kilogramme (53,6 ℔) und das Verhältniss der Hebelsarme war 1 : 5, folglich die anzuwendende Kraft der Arbeiter $= \frac{125 + 53{,}6}{5} = 35{,}7$ oder beinahe 36 ℔. *Coulomb* fand mittelst einer Schnellwage, dass hiebei die Arme des Arbeiters 18 bis 20 Kilogramme (32 bis 36 N. Oest. ℔) und ungeladen 5 bis 6 Kilogramme (9 bis 11 N. Oest. ℔) tragen, welches also mit der anzuwendenden Kraft, die wir vorher fanden, übereinstimmt.

Rechnen wir nun 500 Gänge in 8 Stunden, so wird ein Gang in $\frac{8 . 3600}{500} = 58^{Sec.}$ gemacht, und nimmt man an, dass der Arbeiter mit der Ladung dreimal langsamer als ohne dieselbe zurückgeht, so hat er eigentlich von diesen 58 Sekunden nur $58 . {}^{3}\!/_{4} = 44^{Sec.}$ auf das Tragen der Last verwendet. Die Geschwindigkeit, womit er die Kraft von 36 ℔ ausübt, ist sonach $\frac{92{,}45}{44} = 2{,}1$ Fuss, und da ferner $z = 8$ ist, so erhält man durch die Substitution in unsere Kraftformel $k\left(2 - \frac{2{,}1}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 36$ oder $k = \frac{36 . 25}{29} = 31$ ℔ beinahe. — Eine genauere Berechnung dieser Arbeit wird in der Folge angegeben werden.

7. Eine ähnliche Bestätigung gewähren die Arbeiter an der Kurbel, oder am Krummzapfen. Gewöhnlich rechnet man den Druck auf den Handgriff der Kurbel 12 bis 13 Kilogramme (22,3 Nied. Oesterr. Pfunde). Der Handgriff durchläuft einen Kreis von 23 Decimeter (7,3 Nied. Oesterr. Fuss), auf eine Minute rechnet man 30 Umdrehungen. *Coulomb* zählt nur 20 bis 22 Umdrehungen, und die Arbeit dauert durch 6 Stunden täglich ununterbrochen.

Nimmt man im Mittel 25 Umdrehungen in einer Minute an, so ist $v = \frac{25 . 7{,}3}{60} = 3$ Fuss beinahe und da $z = 6^{h}$, so ist die Kraft, wenn wir in die Formel für die Arbeit am Krummzapfen substituiren $22{,}3 = k\left(\frac{14}{11} - \frac{3}{2 . 2{,}5}\right)\left(2 - \frac{6}{8}\right)$ woraus $k = 26{,}5$ ℔ folgt.

8. *Desaguliers* führt in seinem *Cours de Physique experimentale*, *tome* 1. *pag.* 256 an, dass ein Mensch am Krummzapfen nicht mehr Kraft als 30 engl. ℔ (24,3 Nied. Oesterr. ℔) mit einer Geschwindigkeit von 3,5 engl. Fuss (3,4 N. Oest. Fuss) habe, wenn derselbe durch 10 Tagesstunden arbeitet.

Nehmen wir für einen solchen Menschen $c = {}^{10}\!/_{3}$ Fuss und für die wirkliche Arbeit ohne Stillstandspausen nur 8 Stunden $= z$ und $t = 8$, so ist, wenn in dieselbe Formel für die Kraft am Krummzapfen substituirt wird: $24{,}3 = k\left(\frac{14}{11} - \frac{3{,}4 . 3}{2 . 10}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right)$ woraus $k = 31{,}9$ ℔ folgt. Die englischen Arbeiter erscheinen daher stärker, als unsere gewöhnlichen Tagesarbeiter, und beiläufig eben so stark als unsere Soldaten.

V. Eben so erzählt *Desaguliers*, wie schon oben bemerkt wurde, (*Cours de Physique experimentale, pag.* 259), dass die Träger in London Lasten von 2 bis 3 Zentner auf sich nehmen, aus den Schiffen in die nahen Waarenlager und Wohngebäude tragen, dabei zwar sehr langsam und nicht weit, jedoch auch oft über Stiegen in die obern Stockwerke hinaufgehen. Die Sackträger für die Getreidehändler tragen jedesmal 300 engl. ℔ (243 Nied. Oesterr. ℔), sie arbeiten den ganzen Tag, gehen aber dabei sehr langsam. Die Steinkohlenträger tragen 250 ℔ (202 Nied. Oesterr. ℔), sie gehen jedoch nicht weit, und legen ihre Last bald ab, obgleich sie von der andern Seite diese Last auch über Stiegen hinauftragen. Zwei Senftträger tragen 300 englische ℔ (243 Nied. Oesterr. ℔) mit einer Geschwindigkeit von 4 engl. Meilen (zu 848 Nied. Oesterr. Klafter) in jeder Stunde (also mit der Geschwindigkeit $v = \frac{4 . 848 . 6}{3600} = 5{,}7$ Nied. Oesterr. Fuss.)

Lebesnier hob im Jahre 1826 zu Prag eine Tafel, worauf 25 Zentner Gusseisen, nämlich 5 nach der Länge und 5 nach der Breite aufgestellt waren.

Demnach wäre die mittlere Kraft k für so starke Menschen zwei bis dreimal grösser, als die gewöhnlichen 25 ℔.

§. 25.

In Hinsicht auf die Geschwindigkeit der Menschen verdient noch bemerkt zu werden, dass die herrschaftlichen Läufer mit den Wagenpferden im Trabe gleich laufen, sonach 8 bis 10 Fuss in jeder Sekunde zurücklegen. Englische Läufer legen auf kürzern Strecken bei Wettläufen bis 9 engl. Meilen in einer Stunde zurück und beschreiben daher in einer Sekunde 12,7 Nied. Oesterr. Fuss. In dem Correspondenten von und für Deutschland N. 127 vom 7. Mai 1817 wird berichtet: „Ein irländischer 18jähriger Bursche, Namens *O'Neil* machte dieser Tage baarfuss 46 engl. Meilen in 7½ Stunden“. Er legte somit 39008 Nied. Oesterr. Klafter in 7½ Stunden, also $v = \frac{39008 . 6 . }{3600} \frac{2}{15} = 8\frac{2}{3}$ Fuss oder 1 Meile in ¾ Stunden zurück, welches bei der durchlaufenen Wegstrecke von 9¾ Nied. Oesterr. Meilen eine ausserordentliche Leistung ist.

Unter solche ausgezeichnete Leistungen gehört auch die des Schnelläufers *Goehrich*, welcher im Jahre 1826 zu Prag

an einem Tage 2½ Nied. Oesterr. Meilen in 5/4 Stunden
und an einem andern Tage 1½ „ „ „ ¾ „

also 4 Nied. Oesterr. Meilen in 2 Stunden zurücklegte. Die Geschwindigkeit desselben betrug demnach $\frac{4 . 4000 . 6}{2 . 3600} = 13\frac{1}{3}$ Fuss in einer Sekunde, wobei noch bemerkt werden muss, dass derselbe nach jedem solchen Gange ganz gelassen eine Schaale Thee trank, dabei auf und ab ging, folglich die äusserste Anstrengung noch bei weitem nicht verwendete.

Diese grossen Geschwindigkeiten gehören aber eben so sehr zu den ausserordentlichen, als die angeführten Kräfte der stärksten Lastträger. Beide zeigen nur die Gränzen, wie weit es die Menschen durch Uibung und angemessenen Körperbau zu bringen vermögen; sie zeigen, dass man seine Glieder sowohl zur Arbeit oder zum Tragen grosser La-

sten geschickt, als auch sehr beweglich machen könne, dass jedoch beide Fähigkeiten sehr selten oder vielleicht nie zugleich in einem Körper angetroffen werden. Der Lastträger kann sich nicht als Läufer zeigen, und umgekehrt sind die starken Läufer gewöhnlich zum Lasttragen zu schwach. Beinahe jeder Mensch ist für den einen und andern Gebrauch seines Körpers nur mittelmässig geübt. Wir werden demnach in der Folge in den algebraischen Rechnungen die Buchstaben k, t, c unbestimmt beibehalten, damit von den Rechnungsresultaten ein allgemeiner Gebrauch gemacht, denselben Buchstaben nach Verhältniss der Arbeiter angemessene Werthe beigelegt und für jeden Fall die grössere Zweckmässigkeit und das Quantum ihrer Arbeit vollkommen beurtheilt werden könne.

§. 26.

Schon früher bemerkten wir, dass die Gewohnheit auf alle Arbeiter einen wesentlichen Einfluss ausübe. Betrachten wir z. B. die einfachste Arbeit oder das Tragen einer Last, so findet hiebei nach Verschiedenheit der Länder und selbst der Gegenden in einem Lande, ein bedeutender Unterschied statt. In Böhmen trägt man die Lasten in Tragkörben oder hölzernen Butten, die mittelst Gurten an den Schultern befestigt werden; in Oberösterreich werden die Lasten auf den Kopf gestellt und so getragen. In den Gegenden an der Niederelbe sieht man häufig Lasten mittelst eines auf der Schulter ruhenden Querholzes oder mittelst eines auf beiden Schultern aufliegenden Ringes tragen. Als ich im Mai 1829 die Bauarbeiten an der Rhone bey *Lyon* in Frankreich besichtigte, waren mehrere hundert Menschen mit dem Tragen von Schotter und Erdreich aus Schiffen an das höher liegende Ufer beschäftigt; ein jeder derselben hatte einen ledernen oben offenen Sack auf dem Rücken, welcher mittelst eines Riemens an der Stirne befestigt war; diese Säcke wurden in den Schiffen von andern Arbeitern mit Schotter oder Sand gefüllt, fortgetragen und an Ort und Stelle von den Trägern ausgeleert. Hier ward also die Stirne und das Genick, so wie bei Arbeiten in andern Ländern die Hände, der Rücken oder die Schultern in Anspruch genommen. Ein Mensch, welcher von Jugend auf gewohnt ist, eine Last am Rücken fortzutragen, kann sie nicht dem Kopfe oder einem andern Theile seines Körpers auflegen, ohne sich bei gleichem Gewichte der Last mehr anzustrengen. Die Gewohnheit übt sonach einen wesentlichen Einfluss bei der Kraftäusserung eines jeden Menschen aus. Wenn wir daher in den bisher nach unserer Formel berechneten Beispielen über die Grösse der Kraft bei verschiedenen Arbeiten, die gefundenen Resultate mit der Erfahrung vergleichen oder in der Ausübung anwenden wollen, so kann diess nur insofern geschehen, als die betreffenden Menschen solche Arbeiten zu verrichten gewohnt sind. Wer nie an einer Kurbel arbeitete, wird sich den ersten Tag weit mehr ermattet fühlen, und erst, wenn er die nothwendige Uibung in dieser Arbeit erlangt hat, können die Resultate unserer Kraftformel auf ihn angewendet werden. Wer eine sitzende Lebensweise oder eine Arbeit, wobei keine besondere Bewegung der Füsse vorhanden war, von Jugend auf gewohnt ist, wird sich, wenn er als Bothe verwendet wird, die erste Zeit ebenfalls sehr müde fühlen, und erst, nach erlangter nothwendiger Uibung im Gehen, sind die Ergebnisse unserer Kraftformel in Betreff der Bothengänge, auf diese Arbeiter anzuwenden. — Mit dieser Bemerkung glauben wir jene

Zweifel, die vielleicht über einige unserer Resultate erhoben werden dürften, beseitigt zu haben.

Bei den nachfolgenden Anwendungen unserer Kraftformel werden daher immer Arbeiter vorausgesetzt, welche in dieser Art Arbeit nicht ungewohnt sind, und für sie werden die gefundenen Resultate der Kraftformel in jedem Falle anzuwenden seyn.

Es verdient hier noch eine von *Coulomb* in Frankreich gemachte Bemerkung angeführt zu werden: Die mittlern Resultate der Kraftäusserungen der Menschen richten sich auch nach dem Klima; zu *Martinique*, wo das Thermometer selten unter 20 Grad steht, und die geographische Breite 14 Grad beträgt, konnten die Soldaten nicht die Hälfte der Arbeit verrichten, die sie in Frankreich auszurichten im Stande sind.

§. 27.

Unter dem weiblichen Geschlechte gibt es zwar auch einige rüstige Personen, welche sich bei Akkorden mit Männern auf eine gleiche Arbeit einlassen, doch solche Beispiele gehören zu den seltenen. Man pflegt daher die mittlere Kraft des weiblichen Geschlechtes gewöhnlich um den fünften Theil niedriger anzuschlagen, sonach $k = 20$ ℔, die mittlere Geschwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuss und die mittlere Arbeitszeit $t = 8$ Stunden anzunehmen. Hieraus folgt die wirkliche Kraft einer weiblichen Arbeitsperson mit Rücksicht auf Zeit und Geschwindigkeit $K = 20 \left(2 - \frac{v}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{z}{8}\right)$.

§. 28.

Uiber die Kraft der Pferde und der Thiere insgesammt, ist vorläufig dasselbe zu bemerken, was in dieser Beziehung von den Menschen gilt. Alle Thiere sind nämlich, so wie die Menschen, bei der Ausübung ihrer Kraft auf gewisse Maasse und Verhältnisse von Geschwindigkeit und Zeit beschränkt, deren sie sich auf keine Art zu entledigen vermögen, und auch bei ihnen tritt der Fall ein, dass sie in der Anwendung ihrer Kraft durch die Gewohnheit geleitet werden. *)

*) Bereits die Natur hat den Thieren durch ihren verschiedenen Körperbau die Art und Weise angewiesen, ihre Kräfte zu gebrauchen. Ein englisches Blatt aus London vom 4. November 1828, enthält folgende merkwürdige Zusammenstellung der in den thierischen Körpern wohnenden Kräfte und ihrer verschiedenen Anwendung hinsichtlich des Fortbewegens. Ein Krebs, heisst es darin, bewegt sich seitwärts, die Wasserfliege schwimmt auf dem Rücken, die Schlange bewegt sich wellenförmig, der Ameisenlöwe geht rückwärts. Wasservögel gehen, laufen, fliegen und schwimmen. Einige Thiere können nur gehen, andere nur laufen, wieder andere nur galloppiren. Das Pferd thut alles dieses. Tieger und Krokodille schiessen auf ihren Gegenstand zu; das Rennthier läuft, aber nie im Gallopp; das Armadill schreitet langsam vorwärts, kann aber weder laufen noch springen, während der grosse Ameisenfresser besser klettert, als geht. Das Faulthier ist gross, und kann dennoch täglich nicht mehr, als 50 Schritte machen; ein Elendthier durchläuft anderthalb englische Meilen in 7 Minuten, eine Antilope eine Meile in einer Minute und noch schneller läuft der wilde tartarische Maulesel. Ein Adler fliegt 18 deutsche Meilen in einer Stunde und ein kanarischer Falke legt 250 deutsche Meilen in 16 Stunden zurück. Der Mensch hat fast alle genannte Bewegungen in seiner Gewalt, nur fliegen kann er nicht.

Wir können demnach zur Bestimmung der Kraft der Thiere dieselbe allgemeine Formel, wie für die Menschen gebrauchen: nur wird es darauf ankommen, die Werthe von k, c, t oder ihre Gränzen durch möglichst verlässige Versuche auszumitteln.

Zur Bestimmung der Pferdekraft dienen vorzüglich die Treibmaschinen bei dem Bergbaue oder die Pferdegöpel, weil bei diesen Maschinen die Wirkung oder die Last und Geschwindigkeit derselben, bei ihrem mehr als hundertjährigen Gebrauche unzähligemal versucht, die nöthige Anzahl und Geschwindigkeit der Pferde sammt dem Quantum ihrer Arbeit genau bemessen und an Pächter (Treibwirthe oder Pferdehalter) zu bestimmten Preisen akkordirt wurden. Da es der Vortheil des Bergbaues mit sich bringt, diese Arbeiten möglichst hoch zu halten, so wie von der andern Seite die Eigenthümer der Pferde darauf sehen müssen, dass ihr Zugvieh nicht übermässig angestrengt werde, so musste dieses wechselseitige Interesse nothwendig zu mittlern Resultaten führen, welche für alle ähnlichen Fälle zur Richtschnur dienen können. *)

*) Die Bestimmungen über die Kraft der Pferde ergeben sich meistens aus der Berechnung von Maschinen, welche abermals, wie §. 24 erwähnt wurde, die Kenntnisse des Hebels, Rades an der Welle u. s. w. voraussetzen. Die vorzüglichsten hierüber gemachten Erfahrungen entlehnen wir aus folgenden Schriften:

1. Die Beschreibung der bei dem Bergbaue zu Schemnitz in Niederhungarn errichteten Maschinen von *Nikol. Poda,* Prag 1771. gibt aus vieljährigen Erfahrungen von mehreren Gruben das übereinstimmende mittlere Resultat, dass mit 6 Pferden aus einer seigeren Teufe (senkrechten Tiefe) von 81 Berglachtern (519 Nied. Oesterr. Fuss) in 8 Stunden 84 Säcke Erz, jeder zu 900 ℔ zu Tage gefördert wurden. Hieraus folgt die Zeit, welche zur Ausförderung eines Treibsackes verwendet wird = $\frac{8}{84}$ Stunden = $5{,}_{71}$ Minuten. Weil aber nach jedem Zuge der volle Sack über der Hängebank ausgehängt, der leere wieder eingehängt und zu gleicher Zeit das Gegentheil am Füllorte in der Grube verrichtet werden muss, wozu bei den Schemnitzer Maschinen 1¼ Minuten verbraucht werden, so bleiben für die eigentliche Arbeitszeit nur $5{,}_{71} - 1{,}_{25} = 4{,}_{46}$ oder beinahe 4½ Minuten übrig. Da nun der Hebel oder der Halbmesser für die Laufbahn der Pferde zweimal so gross ist, als der Halbmesser des Korbes, folglich der Weg, welcher von den Pferden bei jedem Aufzuge zurückgelegt wird, noch einmal so gross ist, als die Tiefe des Treibschachtes, so beträgt der Weg, den die Pferde bei einem Aufzuge zurücklegen, 2mal 519 oder 1038 Fuss. Wird nun diese Länge durch die Zeit $4{,}_5$ Minuten oder 270 Secunden dividirt, so erhalten wir die Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{1038}{270}$ oder sehr nahe $v = 4$ Fuss. Die Last oder der Widerstand, welchen die 6 Pferde zu überwältigen haben, ist bei diesen Maschinen wegen des bedeutenden Gewichtes des Bergseiles sehr veränderlich. Zu Anfang nämlich, wenn die volle Tonne vom Füllorte aufgehet, ist dieselbe sammt dem Gewichte des Seiles, welches 810 ℔ wiegt $= \frac{900 + 810}{2} = 855$ ℔ und am Ende, wenn der volle Sack über die Hängebank heraufsteigt, ist dieselbe $= \frac{900 - 810}{2} = 45$ ℔. Das Mittel von beiden beträgt 450 ℔. Der Widerstand der Reibung und die Unbiegsamkeit des Seiles können wir nach einem mässigen Uiberschlage auf 20 bis 25 Prozent von dieser mittlern Last oder auf 90 bis 112 ℔ annehmen; demnach ist der ganze Widerstand = 540 bis 562 ℔. Da zu seiner Gewältigung 6 Pferde vorgespannt sind, so kommen auf 1 Pferd 90 bis 94 ℔.

Wir haben für diese Berechnung zur grössern Verlässlichkeit nur die grössten Teufen, aus welchen mit 3 Paar Pferden getrieben wird, und zwar das Mittel von den Maschinen am Siegelsberger-, Königsegger-, Karls- und Siegismundischachte genommen; die kleinern Teufen geben aber sehr nahe dieselben Resultate z. B. Auf dem Siegelsberge ist die Teufe vom Tage bis zum Piebererbstollen 43 Lachter 39¼ Zoll (279 N. Ö. Fuss); in 8 Stunden werden 132 Säcke jeder zu 900 ℔ getrieben,

Nach den Erfahrungen, welche man in dieser Hinsicht bei den Bergbaumaschinen machte, kann die Kraft eines mittelmässig starken Pferdes zu k = 100 ℔ bei der Geschwindigkeit c = 4 Fuss und der Arbeitszeit t = 8 Stunden angeschlagen werden. Bei jenen Pferden, welche stärker als der mittlere Schlag sind, wäre die Kraft k zu 120

demnach ist die Zeit, in welcher ein Sack getrieben wird $= \frac{8.60}{132} = 3' \, 38''$; hievon für das Ein- und Aushängen 1′ 15″ abgerechnet, so bleiben 2^Min.^ 23^Sec.^ = 143^Sec.^ Da nun die Schwenkbäume noch einmal so lang sind, als der Halbmesser des Korbes: so legen die Pferde in der obigen Zeit die doppelte Höhe des Schachtes = 558 Fuss zurück, demnach ist die Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{558}{143} = 4$ Nied. Oesterr. Fuss beinahe. Übrigens wird für diese Teufe dieselbe Last, nämlich 900 ℔ angeschlagen, und auch dieselbe Anzahl Pferde, nähmlich 3 Paar eingespannt, demnach ist auch die Rechnung für die Zugkraft dieselbe.

Hierbei bleibt jedoch zu bemerken, dass die Pferde bei diesen Arbeiten zu Anfang des Treibens viel über ihre mittlere Kraft angestrengt und doch mit derselben mittlern Geschwindigkeit getrieben werden wie am Ende. Da wir nun in der Folge dieses Werkes zeigen werden, dass die Pferde unter solchen Umständen sich mehr anstrengen müssen, als zu derselben Wirkung bei einem gleichförmigen Widerstande erforderlich wäre, so können wir die mittlere Kraft eines Zugpferdes auf beinahe 100 ℔ oder auf das 4fache der menschlichen Kraft anschlagen.

Eben so dürfen wir in Hinsicht auf die Dauer die vollen 8 Stunden täglich aus dem Grunde annehmen, weil erstens die Pferde nebst dem Zuge noch durch einen Theil der für das Aus- und Einhängen nöthigen Zeit die Last des vollen Treibsackes halten müssen, und weil zweitens auch die Pferde durch die ganzen 8 Stunden ohne Futter in der Arbeit bleiben, aus dem nächsten Dorfe zur Maschine herbeigeführt und nach vollbrachter Arbeit wieder zurückgeführt, zuweilen auch noch zu Hause zu einer kleinen Arbeit verwendet werden, sonach in allen diesen Hinsichten etwas mehr leisten, als das, was nur aus dem Zuge allein berechnet wurde.

2. Die Beschreibung des Pferdegöpels auf der Grube Neuer Morgenstern am Muldenberge bei Freiberg in Sachsen, welche in der Cragischen Buchhandlung zu Freiberg und Annaberg im Jahre 1792 heraus kam, gibt an, dass mit 2 Pferden in 6 Stunden 38 Tonnen, jede zu 1036 ℔ (865 N. Ö. ℔) aus der Teufe von 422 Fuss (377 N. Ö. Fuss) zu Tage gefördert werden. Der Halbmesser des Korbes ist 5 Fuss 7 Zoll und die Länge des Schwenkbaumes oder Hebelarmes für die Pferde ist 24 Fuss; folglich müssen die Pferde für jede herausgebrachte Tonne $\frac{24'}{5' \, 7''} \cdot 422 = \frac{288.422}{67} = 1814$ Dresdner oder $\frac{288.377}{67} = 1621$ Nied. Oesterr. Fuss zurücklegen. Die Aufförderungszeit d. i. die Zeit, während welcher eine Tonne vom Füllorte bis zum Sturzhacken gelanget, ist im Durchschnitte zu 390 Secunden angegeben, folglich beträgt der Raum in einer Sekunde, oder die mittlere Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{1621}{390} = 4{,}2$ Fuss, welche mit jener bei den Schemnitzer Treibmaschinen sehr nahe übereinkömmt. — Der Treibschacht ist tonnlegig, und macht mit der Sohle oder mit dem Horizonte einen Winkel von 56° 30′; wenn wir sonach das Gewicht des Erzes in der Tonne, welches 864 ℔ beträgt, mit dem Sin. 56° 30′ und mit dem Verhältniss der Hebelsarme $\frac{67}{288}$ multipliciren, so ergibt sich der Widerstand oder die Last $= 865 . \frac{67}{288} . \text{Sin}(56^\circ \, 30') = 167{,}8$ ℔. Rechnet man hierzu für Unbiegsamkeit der Seile und Reibung an den Zapfen und tonnlegigen Strassbäumen beiläufig 20 Prozent oder 33,5 ℔; so beträgt der ganze Widerstand, den die Pferde zu gewältigen haben 201 ℔, folglich für ein Pferd 100 Nied. Oesterr. ℔.

3. In der Maschinenlehre von *Erich Nordwall*, Berlin bei Lagarde 1804, Seite 128, wird eine Tafel über das Treiben im Arnells Schachte bei *Fahlun* in Schweden, vom Berggeschwornen *Everström* angeführt und mit den Schemnitzer Maschinen zusammengehalten. Aus der dortigen grössten Teufe von 50 Lach-

bis 130 ℔ und die Geschwindigkeit c mit $4{,}5$ Fuss bei einer gleichen Arbeitszeit von $t = 8$ Stunden anzunehmen. Endlich beträgt die Kraft bei jenen Pferden, welche schwächer als der mittlere Schlag sind, nur $k = 80$ bis 90 ℔, und die mittlere Geschwindigkeit $c = 3$ bis $3{,}5$ Fuss; die mittlere Arbeitszeit beläuft sich abermals auf $t = 8$ Stunden. Die Pferde sind, so wie die Menschen, auch dem Einflusse des Klima unterworfen; ihre Kraft ist in den nördlichen Ländern weit bedeutender, als in den südlichern; doch finden auch hier, so wie bei den Menschen Ausnahmen statt.

§. 29.

Uiber die Kraft und Geschwindigkeit der Pferde ist aus **militärischen Schriften** folgendes zu bemerken:

Zu Folge des k. k. österreichischen Conscriptionspatentes muss ein Pferd 300 ℔ tragen können, wenn es für den Cavalleriedienst tauglich anerkannt werden soll.

tern werden nämlich in 8 Stunden 50 Kübel Erz, jeder zu 1000 ℔ nur von ein Paar Pferden, welche jedoch in diesen 8 Stunden viermal gewechselt werden müssen (also von 4 Paar Pferden) zu Tage gefördert. Der Halbmesser des Treibkorbes ist 1 Fuss und die Länge des Schwenkbaumes $10\frac{4}{37}$ Fuss, folglich beträgt der Weg der Pferde zur Ausförderung eines Kübels $10\frac{4}{37} \times 50 = 505{,}4$ Berglachter (3238 Nied. Oesterr. Fuss). Da 50 Kübel in 8 Stunden gefördert werden, so kommen auf einen Kübel $9^{\text{Min.}}\ 36^{\text{Sec.}}$ Die Zeit zum Anschlagen und Ausstürzen wird für 50 Kübel auf $1^{\text{h}}\ 15^{\text{Min.}}$ angegeben, folglich kommen auf einen Kübel $1^{\text{Min.}}\ 30^{\text{Sec.}}$ Werden diese von $9^{\text{Min.}}\ 36^{\text{Sec.}}$ abgezogen, so ergibt sich, dass die Pferde in $8^{\text{Min.}}\ 6^{\text{Sec.}} = 486^{\text{Sec.}}$ den Raum 3238 Fuss, folglich in einer Secunde den Raum $v = \frac{3238}{486} = 6 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ Fuss zurücklegen. Die mittlere Last, welche sie zu ziehen haben, beträgt $\frac{1000}{10\frac{4}{37}} = \frac{1000.37}{374} = 99$ ℔. Rechnen wir hiezu für Reibung und Unbiegsamkeit der Seile 19 ℔, so kommen auf zwei Pferde $19 + 99 = 118$, folglich auf ein Pferd 59 ℔ Zugkraft. Um diese mit der vorigen bei Schemnitz und Freiberg zu vergleichen, wollen wir, wie dort gefunden worden, $c = 4$ und $t = 8$ setzen. Da jedes Paar Pferde bei Fahlun nur durch 2 Stunden im Zuge geht, so ist $z = 2$ und $v = \frac{20}{3}$, sonach $k\left(2 - \frac{20}{3.4}\right)\left(2 - \frac{2}{8}\right) = 59$, woraus $k = 101\frac{1}{7}$ ℔ erhalten wird. Hieraus sehen wir, dass alle angeführten Bergwerksmaschinen sehr einstimmig für die mittlere Pferdekraft dasselbe Resultat geben, nämlich $k = 100$ ℔, $c = 4$ Fuss und $t = 8$ Stunden.

Zugleich erhellet aus dieser Vergleichung, dass diese schwedischen Pferde bei ihrer grössern Geschwindigkeit zwar mit derselben Anstrengung arbeiten, als jene zu Schemnitz und Freiberg, dass jedoch ihre Wirkung oder der nutzbringende Effekt weit geringer ist, wie schon *Nordwall* bemerkt hat und in dem folgenden noch umständlicher gezeigt werden wird.

4. *Belidor* (*Architecture hydraulique*, Paris 1737, tome I, Chap. I, §. 124) führt an, dass Hr. *Sauveur* mit Pferden aus einem Brunnen Wasser ziehen liess und gefunden habe, dass die Kraft eines Pferdes auf 175 *livres* (153 Nied. Oesterr. ℔) und die Geschwindigkeit auf 1800 *toises* (11098,1 Nied. Oesterr. Fuss) in einer Stunde, folglich $v = \frac{11098{,}1}{3600} = 3{,}1$ anzunehmen sey. Setzen wir demnach in unsere Formel $k = 100$ und $v = 3{,}1$, so wäre $100\left(2 - \frac{3{,}1}{4}\right)\left(2 - \frac{z}{8}\right) = 153$, folglich $z = 6$, oder die Pferde konnten bei dieser Arbeit nur 6 Stunden aushalten, was zwar von *Belidor* nicht angeführt wird, aber kaum einem Widerspruche unterliegen dürfte.

5. *Walcher* (kurzer Inhalt der mechanischen Kollegien, Wien 1759) und *Delius* (Anleitung zur Bergbaukunst, Wien 1773) bemerken, dass die Kraft eines Pferdes auf 175 ℔ und die Geschwindig-

Auf den gewöhnlichen Märschen pflegt die Cavallerie, so wie die Infanterie täglich nur 2 bis 3 Meilen oder 8000 bis 12000 Nied. Oesterr. Klafter zurückzulegen. Für eine Meile pflegt man jedoch bei der Cavallerie gewöhnlich nur 1 Stunde 30 Minuten zu rechnen, demnach ist die Dauer eines täglichen Marsches $=$ 3 bis $4\frac{1}{2}$ Stunden und die Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{4000 \cdot 6}{3600 \cdot 1{,}5} = 4{,}5$ Fuss beinahe. Dasjenige, was die Pferde auf diesem Marsche tragen müssen, nämlich den Mann sammt Sattel, Zeug und Rüstung, lässt sich auf 200 bis 230 ℔ anschlagen. Da für den Militärdienst nur starke Pferde ausgewählt werden, so können wir nach *Desaguliers* die mittlere Kraft $k = 130$ ℔, die mittlere Geschwindigkeit $c = 4{,}5$ Fuss und die mittlere Zeit für einen Arbeitstag

keit nicht über 2000 Klafter in einer Stunde (also $v = \frac{10}{3}$ Fuss) angeschlagen werden könne, wenn das Pferd 2 bis 3 Stunden unablässig im Zuge gehen soll. Rechnen wir, dass ein Pferd mit dieser Last und Geschwindigkeit nur 2 Stunden vormittag und eben so viele Stunden nachmittag, also täglich nur 4 Stunden auszuhalten im Stande ist, so gibt die Gleichung $k\left(2 - \frac{10}{3.4}\right)\left(2 - \frac{4}{8}\right) = 175$ den Werth für $k = 100$ ℔.

Wollte man 3 Stunden vormittag und 3 Stunden nachmittag für die Arbeit der Pferde rechnen, so wäre $k\left(2 - \frac{10}{12}\right)\left(2 - \frac{6}{8}\right) = 175$ also $k = 120$ ℔.

6. *Walcher* nimmt §. 310 — 314 an, dass 204 ℔ mit 3,8 Fuss Geschwindigkeit und 3 Stunden Arbeitszeit das höchste sey, was man für ein mittelmässig starkes Pferd annehmen könne. Setzen wir diese Werthe $z = 3$ und $v = 3{,}8$ in unsere Formel, so erhalten wir: $204 = k\left(2 - \frac{3{,}8}{4{,}0}\right)\left(2 - \frac{3}{8}\right)$, woraus $k = 119{,}6$ ℔.

7. *Desaguliers* (*Cours de Physique experimentale*, tom. I. pag. 254) führt an, dass ein Pferd 200 ℔ (162 Nied. Oesterr. ℔) durch 8 Stunden in jedem Tage ziehen, und in einer Stunde $2\frac{1}{2}$ englische Meilen oder in einer Secunde 3,7 Fuss (3,5 Nied. Oe. Fuss) zurücklegen könne. Lässt man aber das Pferd 240 ℔ (194 Nied. Oesterr. ℔) ziehen, so kann es mit derselben Geschwindigkeit nur durch 6 Stunden arbeiten. Da diese Pferde offenbar mehr leisten, sonach stärker sind, als die gewöhnlichen, so wollen wir vorläufig ihre mittlere Geschwindigkeit um $\frac{2}{8}$ grösser oder $c = 4{,}5$ Fuss und $t = 8$ Stunden annehmen; die erste Erfahrung gibt nunmehr $k\left(2 - \frac{3{,}5}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 162$ folglich $k = 132{,}5$ ℔ und die zweite Erfahrung $k\left(2 - \frac{3{,}5}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{6}{8}\right) = 194$, folglich $k = 127$ ℔. Demnach stimmen beide Erfahrungen nahe überein, und aus beiden folgt, dass auch die mittlere Kraft dieser Pferde beiläufig um $\frac{1}{4}$ grösser als die angeführten 100 ℔ sey.

Desaguliers bemerkt noch (*pag.* 292) dass die engl. Pelzhändler ihre Pferde zuweilen mit 400 bis 500 ℔ (324 bis 405 Nied. Oesterr. ℔) beladen, aber die Pferde gehen dann sehr langsam. Wollten wir für diese Pferde $c = 4{,}5$ und $v = 1$ Fuss, $t = 8$ Stunden und $z = 2$ Stunden, dann $k = 100\,(1 + \frac{1}{5}) = 120$ ℔ annehmen, so gäbe die Formel $120\left(2 - \frac{1}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{2}{8}\right) = 373\frac{1}{3}$ ℔, welches Resultat zwischen 324 und 405 in die Mitte fällt.

Desaguliers hält es jedoch überhaupt für besser, wenn man die Pferde im Zuge gehen lässt, als wenn man denselben grosse Lasten zu tragen auflegt, so wie es im Gegentheile für Menschen bequemer ist, die Last zu tragen, als zu ziehen oder zu schieben. Vorzüglich ist dieses bei dem Bergsteigen der Fall, weil den Pferden ihr Körperbau hiebei mehr hinderlich ist, als den Menschen. Man kann, bemerkt *Desaguliers*, die Pferdekraft nicht unvortheilhafter verwenden, als wenn man das Pferd bergauf tragen oder ziehen lässt, denn ist der Berg steil, so leisten 3 Männer mehr als ein Pferd, da jeder mit 100 ℔ schneller klettert, als ein mit 300 ℔ beladenes Pferd. Von der andern Seite lässt sich die Kraft des Pferdes nicht besser anwenden, als in horizontaler Richtung, in welcher der Mensch am wenigsten wirken kann.

t = 8 Stunden annehmen, und wir erhalten für einen Marsch von 2 Meilen täglich, wo z = 3, wenn in die Formel substituirt wird, die Kraft $= 130 \left(2 - \frac{4{,}5}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{3}{8}\right)$ $= 211\frac{1}{4}$ ℔ oder das mittlere Gewicht eines Mannes sammt Rüstung.

Wenn jedoch täglich 3 Meilen gemacht werden, oder $z = 4{,}5$, so ist die Kraft $= 130 \left(2 - \frac{4{,}5}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{4{,}5}{8}\right) = 186{,}9$ ℔; es muss daher ein Theil des Gepäckes der Mannschaft nachgeführt werden, wenn man nicht die Pferde übermässig anstrengen will.

§. 30.

Die Geschwindigkeit der Pferde wird von *Burscheid* (Cours der Taktik und Logistik, Wien 1782) folgendermassen angegeben:

Die Reiterei macht in einer Minute

Beschaffenheit der Bewegung.	Zurückgelegter Weg		Geschwindigkeit oder Weg in einer Sekunde.
	in militärischen Schritten.	im österr. Fussmaass.	
Paradeschritte	100	240	4,0
Gemeine Reiseschritte . .	120	288	4,8
Im Trabe	333	800	13,3
Im Galoppe	666	1600	26,6

Nach *Hoyer* (Taschenbuch für Soldaten, Tübingen 1803) braucht ein Pferd zu 500 militärischen Schritten oder 200 Klaftern:

Beschaffenheit der Bewegung.	Zeit.	Geschwindigkeit in Fussen.
Im Schritte	4^Min.^ 30^Sec.^	4,4
Im Trabe	2— 7—	9,4
Im Galoppe	1— 0—	20,0

Nach einem andern militärischen Handbuche macht die Cavallerie in einer Minute:

Beschaffenheit der Bewegung	Fuss in 1 Minute.	Geschwindigkeit in Fussen.
Im Schritte	275	4,6
Im Trabe	600	10,0
Im Galoppe	1200	20,0

Hieraus ist zu ersehen, dass die Pferde zwar sehr grosse Geschwindigkeiten ausüben können, dass sie jedoch nicht im Stande sind, dieselbe durch eine längere Zeit fortzusetzen, noch weniger dabei zugleich eine schwere Arbeit zu verrichten. Es erhellet daher aus allem Angeführten, dass die mittlere Geschwindigkeit c für die Arbeit auf $3\frac{1}{2}$,

4 bis 4½ Fuss, die mittlere Kraft k auf 80, 100 bis 130 ℔ und die Dauer *t*, wie lange nämlich die Pferde mit einer solchen Arbeit beschäftigt werden können, auf 8 Stunden anzunehmen sey. Es versteht sich von selbst, dass man bei der Wahl unter diesen Zahlen jedesmal auf die eigenthümliche Beschaffenheit und den Körperbau der Pferde, ob sie nämlich klein und schwach, oder gross und kraftvoll gebaut, ob sie kleinere oder grössere Schritte und ob sie einen leichtern oder schwerern Zug gewohnt sind, Rücksicht nehmen müsse.

§. 31.

Wir haben bereits oben §. 22. bei der Kraft der Menschen mehrere ausserordentliche Leistungen angeführt, wodurch sich einzelne Individuen theils in Hinsicht einer ausserordentlichen Kraft, theils auch durch eine ungewöhnlich grosse Geschwindigkeit auszeichnet und dadurch die allgemeine Bewunderung mit Recht erworben hatten. Aehnliche Leistungen lassen sich auch bei den Pferden sowohl hinsichtlich ihrer Kraft als ihrer Geschwindigkeit aufweisen.

In Betreff der Kraft verdient hier ganz vorzüglich die Leistung jenes Pferdes erwähnt zu werden, welches am 7. Februar 1828 auf der *Monkland-* und *Kirkintilloch*-Eisenbahn, nächst *Glasgow* in Schottland, bei einer öffentlich hierüber stattgefundenen Produktion in Gegenwart einer zahllosen Menschenmenge vierzehn zusammengehängte Kohlenwägen fortzog. Diese 14 Wägen betrugen an eigenem Gewichte und der Kohlenladung zusammen eine Last von 50 engl. Tonnen (zu 1814 Nied. Oesterr. ℔) oder 90700 N. Oesterr. ℔ Das Pferd zog ohne weitere Beihilfe diese ungeheuere Last binnen einer Stunde und 41 Minuten über eine Bahnlänge von 6¾ engl. Meilen (5724 Nied. Oesterr. Klafter); die ersten 3 Meilen dieser Strecke waren ganz horizontal, worauf 4 kleinere Strecken mit einem Gefälle von 1 zu 116, 1 zu 140, 1 zu 200 und 1 zu 476, dann abermals eine Meile horizontal und sodann der Rest mit dem Falle 1 zu 600 und 1 zu 180 folgten. Diese ausserordentliche Leistung eines Pferdes wurde, wie es in solchen Fällen in England üblich ist, nicht bloss durch alle Zeitungen, sondern auch durch bildliche Darstellungen verewigt; auf einem dieser Gemälde, welches mir am 9. Oktober 1829 bei der Besichtigung dieser Eisenbahn angebothen wurde, ist der ganze Akt der Produktion dargestellt und umständlich beschrieben. Die Rechnung über diess höchst beachtenswerthe Ereigniss zeigt, dass die mittlere Kraft dieses Pferdes beiläufig anderthalbmal so gross, als die Kraft unserer Militärpferde war *).

*) Um die Kraft, welche das Pferd im obigen Falle ausübte, berechnen zu können, kömmt es nebst dem angeführten Gefälle vorzüglich auf die Widerstände der Reibung der Wägen an den Achsen und an den Bahnschienen an, welche letztere von gewalztem Eisen sind. Diesen Widerstand fand ich bei der Besichtigung der Bahn $= \frac{1}{180}$, da die Wägen in jenen Strecken, wo die Bahn diesen Fall hatte, von selbst herabzulaufen anfingen. Der Aufseher der Bahn *Mr. Dodds* erklärte jedoch, man könne diesen Widerstand nur auf $\frac{1}{200}$ anschlagen, da die Bahnschienen zur Zeit der Probefahrt ganz vorzüglich gut gelegt und gerichtet gewesen seyen. Um nun die Kraft zu berechnen, welche das Pferd ausübte, berücksichtigen wir zuerst die Neigung der Bahn. Diese ist auf 4 Meilen horizontal, und hat in der übrigen Strecke von 2¾ Meilen (2332 Nied. Oesterr. Klafter) ein Gefälle von 1 zu 116 bis 1 zu 600, wofür man zufolge den, an Ort und Stelle hierüber erhaltenen Aufklärungen, ein mittleres Gefälle von 1 zu 200 an-

Als ausserordentliche Geschwindigkeit ist vorzüglich jene des berühmten englischen Wettrenners *Eklipse* anzuführen. (Man sehe hierüber: *Essay on the Proportions of Eklipse etc. — The Works of Charles de Sainbel etc. London* 1795.) Dieses Pferd legte in 1 Sekunde 58 engl. Fuss (56 Nied. Oesterr. Fuss) zurück, es bedeckte in der grössten Streckung 25 engl. Fuss Land und wiederholte diesen Akt $2\frac{1}{3}$ mal in einer Sekunde; der Besitzer dieses Pferdes, Obrist *Okelly*, erwarb damit jährlich eine Einnahme von 1000 Guineen, und dennoch soll auch die ausserordentliche Leistung dieses Pferdes von dem Wettrenner *Smolenskoy* später übertroffen worden seyn.

Solche Geschwindigkeiten gehören eben so, wie die oben angeführte bedeutende Kraft, zu den ausserordentlichen Erscheinungen, welche Bewunderung erregen, und zeigen, wie weit es auch ein Pferd zu bringen im Stande sey. Wenn es sich jedoch um jene Leistungen handelt, welche von den gewöhnlichen Zugpferden bei anhaltender, Monate- und Jahrelang dauernder Arbeit gefordert werden können, so müssen immer Erfahrungen dieser Art, welche §. 28. bis §. 30. angeführt wurden, berücksichtigt und die hieraus sich ergebenden Resultate zur Basis für den Anschlag ähnlicher fortdauernder Arbeiten genommen werden.

§. 32.

Das Gewicht eines mittelmässig starken Arbeiters wird zu 125 ℔ angeschlagen; vergleicht man diess mit der mittlern Kraft von 25 ℔, so findet man, dass sie den fünften Theil des Gewichtes eines Arbeiters betrage; das Gewicht eines mittelmässig starken Pferdes wird zu 5 bis $6\frac{1}{4}$ Centner angenommen, und die mittlere Kraft k desselben beträgt 100 bis 130 ℔, welches abermals der fünfte Theil von dem Gewichte des Pferdes ist. Hieraus folgt, dass ein schwererer Mensch, ein schwereres Pferd mehr zu arbeiten im Stande sey als ein leichteres, welches auch durch alle Erfahrungen bestättigt wird, wo nicht ein übermässig schwerer Körperbau der Kraft desselben nachtheilig wird.

nehmen kann; demnach beträgt der gesammte Fall in dieser Strecke $\frac{2332}{200} = 11{,}66$ Nied. Oesterr. Klafter, und daher ist der mittlere Fall der ganzen $6\frac{3}{4}$ Meilen (5724 Nied. Oesterr. Klafter), welche das Pferd in diesem Tage zurückgelegt hat $= \frac{11{,}66}{5724} = \frac{1}{491}$. Nimmt man die Geschwindigkeit v des Pferdes in der ganzen Zeit von $1^{h}\ 41^{Min.}$ gleich an, so ist $v = \frac{5724.6}{101.60} = 5{,}67$ Fuss. Die mittlere Geschwindigkeit kann man bei diesem vorzüglich starken Pferde $c = 4{,}5$ Fuss und die mittlere Arbeitszeit $t = 8$ Stunden annehmen. Da ferner die wirkliche Arbeitszeit $z = 101^{Min.} = \frac{101}{60}$ Stunden und die Last, welche das Pferd zog $= 50$ engl. Tonnen $= 90700$ Nied. Oesterr. ℔ war, so erhalten wir durch Substitution aller dieser Werthe in die gefundene Kraftformel
$90700\left(\frac{1}{200} - \frac{1}{491}\right) = k\left(2 - \frac{5{,}67}{4{,}5}\right)\left(2 - \frac{101}{8.60}\right)$ woraus $k = 203$ ℔ folgt, d. h. die mittlere Kraft dieses Pferdes beträgt beiläufig anderthalbmal soviel, als die mittlere Kraft der Militär- oder anderer starken Pferde, welche wir mit 130 ℔ in Anschlag brachten. — Hieraus ergibt sich aber auch, wie unrichtig es sey, wenn man nach solchen ausserordentlichen, immer nur durch eine sehr kurze Zeit statt gehabten Leistungen die Kraft eines Pferdes als 3 oder 4mal grösser gegen die gewöhnliche Pferdekraft annehmen wollte.

Nennen wir daher das Gewicht eines Menschen M, eines Pferdes P, so gibt die Kraft eines Menschen auch der Ausdruck $\frac{M}{5}\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ und jene eines Pferdes gibt $\frac{P}{5}\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$, in welchen Formeln jederzeit die entsprechenden Werthe für M, P, v, c, z, t zu setzen sind.

§. 33.

Den Ochsen, welche mit den Pferden ein gleiches Gewicht von 5 bis 6 Centnern haben, wird gewöhnlich dieselbe Zugkraft, nämlich der fünfte oder auch der sechste Theil ihres Gewichtes zugeschrieben, sie haben jedoch nicht dieselbe Geschwindigkeit, wie die Pferde. Die gewöhnliche Geschwindigkeit der Ochsen wird der Geschwindigkeit der Menschen gleich, auch wohl noch kleiner gehalten; in dieser Hinsicht wäre $c = 2$ bis $2\frac{1}{2}$ Fuss, bei hohen Ochsen auch 3 Fuss.

Eben so pflegt man die Kraft der übrigen Thiere auf den fünften oder sechsten Theil ihres Gewichtes anzuschlagen.

Das Gewicht eines Esels schlägt man auf 250 bis 350 ℔ und seine mittlere Kraft auf 50 bis 70 ℔ an, die Geschwindigkeit beträgt, wie bei dem Menschen, beiläufig 2 bis 3 Fuss. Der Esel wird hauptsächlich zum Tragen verwendet.

Ein Maulesel, Maulthier, wiegt beiläufig 400 bis 600 ℔, und wird sowohl zum Ziehen als zum Tragen gebraucht, seine Kraft beträgt 80 bis 120 ℔, und hiebei hat er eine Geschwindigkeit von 3 bis 4 Fuss.

Aus dem bisher Angeführten erhalten wir nunmehr folgende tabellarische Zusammenstellung:

	Dessen		Dessen mittlere			Wirkliche Kraft
	Stärke	Gewicht in Pfunden	Kraft in Pfunden	Geschwindigkeit in Fussen	Arbeitszeit	
Mensch	schwach	100	20	2	8	$20\left(2-\frac{v}{2}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	mittelstark . . .	125	25	2,5	8	$25\left(2-\frac{v}{2{,}5}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	sehr stark . . .	150	30	$\frac{10}{3}$	8	$30\left(2-\frac{3.v}{10}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
Pferd	schwach	400	80	3,5	8	$80\left(2-\frac{v}{3{,}5}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	mittelstark . . .	500	100	4	8	$100\left(2-\frac{v}{4}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	sehr stark . . .	650	130	4,5	8	$130\left(2-\frac{v}{4{,}5}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
Ochs	schwach	400	80	2	8	$80\left(2-\frac{v}{2}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	mittelstark . . .	500	100	2,5	8	$100\left(2-\frac{v}{2{,}5}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$
	sehr stark . . .	600	120	3	8	$120\left(2-\frac{v}{3}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right)$

u. s. w.

Nach diesen Formeln ist man nunmehr im Stande, für jedes thierische Wesen, dessen mittlere Kraft, Arbeitszeit und Geschwindigkeit bekannt ist, die Kraft bei einer jeden andern Geschwindigkeit und Arbeitszeit zu berechnen.

§. 34.

Da es für die Menschen und Thiere einerlei ist, eine grosse Last mit einer kleinen Geschwindigkeit oder im Gegentheile eine kleinere Last mit einer grössern Geschwindigkeit zu tragen, so wird die vorzüglichste Aufgabe der Dynamik darin bestehen, die vortheilhafteste Kraft, d. h. die Kraft, wodurch die grösste Wirkung, der grösste Effekt hervorgebracht wird, für jeden Fall zu bestimmen. Man versteht aber hier unter Effekt die verrichtete Arbeit, d. h. die Menge oder das Quantum einer gewissen Sache, welches in einer gegebenen Zeit z. B. in einem Tage von einem Orte zum andern getragen, aufgezogen, geführt oder sonst wie immer durch die vorhandene Kraft hingeschafft wird. Es frägt sich daher, wie viel soll ein Arbeiter in einem jeden Falle tragen oder führen, das Pferd ziehen u. s. w., mit welcher Geschwindigkeit und wie lange soll gearbeitet werden, damit in jedem Falle der grösste Effekt durch die vorhandene Kraft hervorgebracht, oder damit der beabsichtigte Effekt mit dem geringsten Kostenaufwande bewirkt werde. — Wir werden diese interessante Frage in den folgenden Paragraphen behandeln, und zu diesem Behufe die Auseinandersetzung der leichtesten Fälle vorangehen lassen.

§. 35.

Unter die einfachsten Arbeiten, wozu die Kräfte der Menschen oder Thiere verwendet werden, gehört das Tragen einer Last von einem Orte zum andern. Es sind hier mehrere Fälle zu unterscheiden, von denen wir nur die vorzüglichsten in Betrachtung ziehen wollen. Der erste Fall ist folgender:

Ein Arbeiter habe eine theilbare Last, z. B. Getreide, Holz, Obst etc. auf eine unbestimmte Entfernung zu tragen und zwar so, dass er ununterbrochen im Gange ist und durch keine Nebenumstände, als Aufladen, Abladen, leer Zurückgehen etc. Zeit verliert. Diess könnte sich ereignen, wenn die Entfernung, auf welche die Last getragen werden soll, so gross ist, dass sie von einem Menschen erst in mehreren Tagen zurückgelegt wird, oder wenn ein Arbeiter an einen Ort eine Last hinträgt, und gleich nach seinem Eintreffen alsbald wieder eine Rückladung erhält. Es frägt sich nun in diesem Falle:

I. Wie ist die Arbeit einzurichten, damit die Tragungskosten bei einem bereits bestehenden Taglohne am kleinsten werden? oder

II. Wenn der Preis des Tragens für einen Zentner gegeben ist, wie soll der Taglöhner seine Arbeit einrichten, um auf einen möglichst hohen Taglohn zu kommen oder sich bei der Arbeit möglichst viel zu verdienen?

Bevor zur Auflösung dieser Aufgabe geschritten wird, bemerken wir, dass die Tragungs- oder auch die Frachtkosten hierlandes gewöhnlich für einen Wiener Zentner und eine österr. Meile, in Frankreich für den Kilometer (527 Nied. Oesterr. Klafter) und 1000 Kilogramme (1786 Nied. Oesterr. Pfunde), in England für die Tonne (1814 Nied. Oesterr. Pfunde) und die engl. Meile (848 Nied. Oesterr. Klafter) u. s. w., in jedem Lande also nach

einer bestimmten Einheit angeschlagen und berechnet werden; wir werden daher in der Folge auch die gleiche Berechnung anwenden und demnach lautet die obige Aufgabe eigentlich folgendermassen:

I. Wie ist die Arbeit mit Taglöhnern, Bothen......, die um einen bestimmten Taglohn arbeiten, einzurichten, damit die Tragungskosten für den Zentner und die Meile am kleinsten (ein Minimum) werden? oder

II. Wenn die Tragungskosten für den Zentner und die Meile gegeben sind (mit einem bestimmten Geldbetrage bezahlt werden), wie soll der Taglöhner seine Arbeit einrichten, um sich möglichst viel zu verdienen (seinen täglichen Verdienst auf ein Maximum zu bringen)?

Betrachtet man diese Aufgabe zuerst im Allgemeinen, so ist es klar, dass der Arbeiter, wenn er zu viel ladet, sich nur langsam fortbewegen, folglich in einem Tage nicht weit gehen könne; ladet er aber im Gegentheile zu wenig, so wird er zwar geschwinder gehen, folglich in einem Tage weiter kommen, aber nicht viel Last an Ort und Stelle bringen. — Um sonach diese Aufgabe richtig zu lösen, sind wir genöthigt, sie algebraisch zu behandeln.

Da die Last, welche der Arbeiter trägt, seinem Kraftaufwande gleich kommen muss, so ist die Gleichung zwischen Kraft und Last: $Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$. (I.)
Nun findet hier eine gleichförmige Bewegung statt und der Taglöhner arbeitet oder geht mit v Fuss Geschwindigkeit während 3600.z Sekunden des Tages. Demnach ist der Weg, wie weit die Last Q in einem Tage getragen wird, $S = 3600 . z . v$. (II.)

Es sey der tägliche Lohn des Arbeiters $= p$, so kann man sagen: Für den ganzen Weg 3600 . z. v, der in einem Tage gemacht wird, zahlt man den Taglohn p, wie viel zahlt man für eine Meile oder 24000 Fuss, oder: $3600 . z . v : p = 24000 : \frac{24000 . p}{3600 . z . v}$. (III.)
Endlich kann man sagen: die Last $Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ wird für den Preis $\frac{24000 . p}{3600 . z . v}$ eine Meile weit geschafft, wie gross sind die Frachtkosten (a) eines Zentners (100 ℔) oder: $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) : \frac{24000 . p}{3600 . z . v} = 100 : a$. Hieraus ergeben sich die Tragungskosten für einen Zentner und eine Meile, oder $a = \frac{100 . 24000 . p}{3600 . z . v . k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}$ (IV.)

Dieser Ausdruck soll nach den Bedingnissen der Aufgabe ein Minimum werden, es frägt sich daher, wie man es einzurichten habe, damit dieses der Fall seyn möge?

Um diess zu bestimmen, wollen wir vorerst v mit $\frac{c}{c}$ und z mit $\frac{t}{t}$ multipliziren, so erhalten wir: $a = \frac{100 . 24000 . p}{3600 . t . c . k . \frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)}$.
Dieser Ausdruck ist ein Bruch, er wird daher ein Minimum, wenn der Zähler möglichst klein und der Nenner möglichst gross wird. Nun sind aber die Zahlen 100, 24000 und 3600 bestimmte Grössen; der Taglohn p des Arbeiters, seine mittlere Geschwindigkeit c, die mittlere Arbeitszeit t und seine mittlere Kraft k ist nach den Bedingnissen der

Aufgabe für jeden Arbeiter gegeben, es bleibt daher nur noch $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ zu einem Maximum zu machen. In diesem Ausdrucke kommt es auf das Verhältniss der wirklichen Geschwindigkeit v zur mittlern c $\left(\text{oder auf } \frac{v}{c}\right)$ dann auf das Verhältniss der wirklichen Arbeitszeit z zur mittlern t $\left(\text{oder auf } \frac{z}{t}\right)$ an. Da nun diese zwei Verhältnisse von einander unabhängig sind, so müssen die Produkte $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)$ und $\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ ein jedes für sich ein Maximum werden. Diese Produkte haben aber das Eigene, dass wenn man einen Faktor $\frac{v}{c}$ oder $\frac{z}{t}$ grösser als 1 nimmt, dagegen der andere $2-\frac{v}{c}$ und $2-\frac{z}{t}$ kleiner als 1 wird.

Um nun auszumitteln, unter welchen Umständen diese zwei Produkte am grössten werden, betrachten wir zuerst $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)=\frac{v\,(2c-v)}{c^2}$ *). Da hier die mittlere Geschwindigkeit c eine nach der Beschaffenheit der Arbeiter gegebene Grösse ist, so muss bloss v (2c — v) ein Maximum werden. Um diess zu bestimmen, trage man die doppelte Geschwindigkeit 2c, welche nach (§. 8.) eine Linie gibt, auf ein Blatt auf, oder man
Fig. 2. Tab. I. mache (Fig. 2.) die Linie $AD = 2c$; schneidet man hievon das Stück $AB = v$ ab, so ist $BD = 2c - v$. Die Linie AD wird hierauf in zwei gleiche Theile in O getheilt, und aus diesem

*) Die höhere Analysis lehrt ein sehr einfaches und allgemeines Verfahren, denjenigen Werth einer veränderlichen Grösse (v oder x) zu finden, bei welchem eine Funktion dieser Grösse am grössten oder kleinsten (ein Maximum oder Minimum) wird. Dieses Verfahren besteht darin, dass man an die Stelle dieser veränderlichen Grösse (v oder x) einen Werth ($v + w$ oder $x + w$) setzt und die daraus entstehende Funktion nach den Potenzen von w ordnet, sonach der veränderlichen Grösse (v oder x) einen solchen Werth gibt, bei welchem dasjenige Glied, welches die erste Potenz des w zum Faktor hat, verschwindet. Es sey z. B. die gegebene Funktion $(f\,v) = 2\,c\,v - v^2$. Setzen wir in dieser Funktion die Grösse $v+w$ an die Stelle von v, so erhalten wir
$(f\,(v+w)) = 2\,c\,(v+w) - (v+w)^2 = 2\,c\,v - v^2 + (2\,c - 2\,v)\,w - w^2$. Lassen wir nun $(2\,c - 2\,v)\,w$ verschwinden, so muss $v = c$ seyn, und diess ist derjenige Werh von v, durch welchen die Funktion $(2\,c - v)\,v$ ihren grössten oder kleinsten Werth erhält. Derselbe ist nämlich $= (2c - c)\,c = c^2$. Der Beweis hiezu ist daraus ersichtlich, weil dadurch $(f\,(v+w))$ $= 2c^2 - c^2 + (2c - 2c)\,w - w^2 = c^2 - w^2$ wird. Man sieht hier, dass diese Funktion in jedem Falle kleiner seyn werde als c^2, man möge dem w was immer für einen positiven oder negativen Werth beilegen. Zugleich erhellt aus unserem Falle, dass der gefundene Werth c^2 ein Maximum seyn müsse, weil w^2 negativ wird, man mag w positiv oder negativ setzen. — Betrachten wir im Gegentheile die Funktion $(f.\,v) = a^2 - (2c\,v - v^2)$, so ist auf gleiche Art
$(f\,(v+w)) = a^2 - 2c\,(v+w) + (v+w)^2 = a^2 - 2c\,v + v^2 - (2c - 2v)\,w + w^2$. Setzen wir hier abermals $(2c - 2v)\,w = 0$, folglich $c = v$, so gibt dieser Werth
$(f\,(v+w)) = a^2 - c^2 + w^2$; daraus ist ersichtlich, dass der Werth $a^2 - c^2$ ein Minimum sey, oder dass die Gleichung $v = c$ ein Minimum gegeben habe, weil w^2 positiv ist, und auch diesen Werth behält, man mag für w was immer für eine positive oder negative Grösse setzen.

Da die Funktionen von sehr verschiedener Art seyn können, so kommt es der Differentialrechnung zu, für jeden Fall die Form desjenigen Gliedes auszumitteln, welches die Grösse w zum Faktor hat, und zugleich den Coefficienten des w^2 zu bestimmen, um daraus zu ersehen, ob man ein Maximum oder Minimum erhalte.

Punkte mit dem Halbmesser A O ein Kreis beschrieben; in B wird das Perpendikel B E errichtet und E mit A und D verbunden. Da die Dreiecke A B E und B E D einander ähnlich sind, so ist: A B : B E = B E : B D oder substituirt: v : B E = B E : 2c — v, woraus $BE^2 = v(2c - v)$.

Wenn daher $v(2c - v)$ ein Maximum werden soll, so muss BE^2 möglichst gross werden. Diess geschieht aber in dem Falle, wenn B in den Mittelpunkt O gelegt wird, weil an diesem Orte das Perpendikel O N dem Halbmesser des Kreises gleich wird; dann ist aber A B = B D oder v = 2c — v woraus $\underbrace{v = c}$ folgt.

Analysirt man das zweite Produkt $\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right) = z\left(\frac{2t - z}{t^2}\right)$ auf gleiche Weise, so findet man, dass dasselbe ebenfalls ein Maximum wird, wenn $\underbrace{z = t}$ ist.

Die Transportskosten für den Zentner und die Meile werden daher in dem Falle am geringsten, wenn die Menschen mit ihrer mittlern Geschwindigkeit c durch die gewohnten Arbeitsstunden t arbeiten.

Werden die gefundenen Werthe v = c und z = t in die Formeln I. und II. gesetzt, so erhalten wir die Last, welche der Arbeiter auf sich zu nehmen hat, Q = k, und den Weg, den er mit dieser Ladung in einem Tage zurücklegen kann, S = 3600. t. c. Die Substitution derselben Werthe in der Formel IV. gibt die Tragungskosten für den Zentner und die Meile

$$a = \frac{100.\ 24000.\ p}{3600.t.c.k.\ (2 - 1/1)(2 - 1/1)} = \frac{100.\ 24000.\ p}{3600.\ t.c.k.} \quad (V.)$$

Dieser Ausdruck enthält den geringsten Werth für a und gibt daher auch den wohlfeilsten Preis für einen Zentner und eine Meile, der bei dieser Arbeit möglich ist. Verlangt man, der Arbeiter soll geschwinder gehen und demnach weniger tragen, so wird die Arbeit theurer zu stehen kommen, und verlangt man im Gegentheile, er soll langsamer gehen und daher mehr tragen, so fällt der Preis für einen Zentner und eine Meile ebenfalls höher aus. Wird die gefundene Gleichung (V) in eine Proportion aufgelösst, so erhält man: $3600.\ c.\ t \times k : p = 24000 \times 100 : a$, d. h. **der Weg, welchen der Arbeiter in einem Tage zurücklegt (3600. c. t.) multiplicirt mit der Last k, welche er trägt, oder sein Bewegungsmoment, kostet den Taglohn p, folglich wird für einen Zentner (100 ℔) und eine Meile (24000 Fuss) der Lohn a zu zahlen seyn.** — Diese Proportion gibt daher in jedem Falle den vortheilhaftesten Tragungslohn.

Wollte man einem **Thiere** eine Last zu tragen geben, so wird die angeführte Rechnung ganz dieselbe seyn, nur sind für c und t die dem Lastthiere angemessenen Werthe zu setzen.

Man kann daher auch für die Verwendung eines Thieres in diesem Falle als Regel aufstellen, dass seine Arbeit am vortheilhaftesten eingerichtet sey, oder dass die geringsten Frachtkosten für den Zentner und die Meile veranlasst werden, wenn es mit seiner mittlern Kraft k und Geschwindigkeit v = c durch die gewohnten Arbeitsstunden z = t verwendet wird.

§. 36.

Ein Beispiel wird das Gesagte noch anschaulicher machen. Nehmen wir nämlich an, der Arbeiter sey von mittelmässiger Stärke, so ist k = 25 ℔, c = 2,5 Fuss, t = 8^h, folglich der Weg, welchen er in einem Tage zurücklegt = 2,5 . 8.3600 = 72000 Fuss = 12000^0 = 3 Meilen, und man kann sagen: 25 ℔ drei Meilen weit zu tragen, kostet den Taglohn p, was kosten 100 ℔ auf die Entfernung von einer Meile oder

$25 \times 3 : p = 100 \times 1 : a$, woraus $a = \frac{100.\ p}{3.25} = \frac{4}{3}\ p$; wenn daher der Taglohn z. B. 15 kr. C. M. betrüge, so käme der Zentner eine Meile weit zu tragen auf $\frac{4}{3}.15 = 20$ kr. C.M. und diess ist zugleich der wohlfeilste Tragungslohn, welcher in diesem Falle möglich ist. Würde nämlich verlangt, dass der Taglöhner mehr tragen und langsamer gehen, oder weniger tragen und schneller gehen soll, so käme in beiden Fällen der Tragerlohn höher, wie die Berechnung der einzelnen Fälle zeigen wird.

Nehmen wir z. B. an, der Arbeiter soll mit v = 3′ Geschwindigkeit durch z = 10 Stunden des Tages gehen, so ist die Last, welche er tragen kann,

$25\left(2 - \frac{3}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = 15$ ℔ und der Weg, den er in einem Tage zurücklegt = 3600. 10.3 Fuss = $4\frac{1}{2}$ Meilen, folglich kommen 15 ℔ auf $4\frac{1}{2}$ Meile zu tragen auf den Taglohn p und 100 ℔ auf 1 Meile weit zu tragen auf den Preis a oder $15 \times 4\frac{1}{2} : p = 100 \times 1 : a$, woraus $a = \frac{100\,p}{15.4\frac{1}{2}} = \frac{40}{27}\,p = 1{,}481\,p$, also theurer als im ersten Falle.

Nehmen wir im Gegentheile v = 2′ und z = 7^h an, so trägt der Arbeiter $25\left(2 - \frac{2}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{7}{8}\right) = 33{,}75$ ℔, also weit mehr als im vorigen Falle, aber er macht mit dieser Last täglich nur den Weg = 3600. 7. $\frac{2}{6}$ Klafter = 8400 Klaftern; folglich hat man wieder die Proportion $8400 \times 33{,}75$ ℔ : p = $4000^0 \times 100$ ℔ : a, woraus $a = \frac{4000.100.p.}{8400.\ 33{,}75} = 1{,}411.\ p$, also wieder mehr, als im ersten Falle u. s. w.

Alle diese Fälle geben die Tragungskosten für den Zentner und die Meile grösser, und wir ersehen daher, dass diese Kosten wirklich am geringsten werden, wenn v = c und z = t ist, d. h. wenn der Mensch oder das Thier, welches zur Tragung einer Last verwendet wird, sich mit der mittlern Geschwindigkeit und der mittlern Kraft durch die gewohnten Arbeitsstunden bewegt. Ein schwacher Mensch soll daher 20 ℔, ein stärkerer 25 ℔, ein noch stärkerer 30 ℔ tragen, und jeder derselben ist mit seiner mittlern Geschwindigkeit durch die gewohnten Arbeitsstunden zu beschäftigen.

Es erübrigt hier noch, die bereits (§. 19.) gemachte Bemerkung zu wiederholen, dass unter diesen gewohnten Arbeitsstunden in der Regel 8 Stunden verstanden werden. Da unsere Taglöhner im Sommer 12 Stunden des Tages in der Arbeit sind, so versteht es sich von selbst, dass sie die übrigen 4 Stunden unter ihrer Arbeit zur Ruhe und Erholung verwenden können.

Um diese Rechnung noch anschaulicher zu machen, sind in der folgenden Tabelle die Tragungskosten für den Zentner und die Meile für einen Arbeiter von mittlerer Stärke in den verschiedenen Fällen der wirklichen Geschwindigkeit v und wirklichen Arbeitszeit z nach der Gleichung IV berechnet, und in den entsprechenden Columnen zusammengestellt worden:

v	z=1	z=2	z=3	z=4	z=5	z=6	z=7	z=8	z=9	z=10	z=11	z=12
0,5	15,802p	8,466p	6,07 p	4,938p	4,310p	3,951p	3,762p	3,704p	3,762p	3,951p	4,310p	4,938p
1,0	8,889p	4,762p	3,419p	2,778p	2,424p	2,222p	2,116p	2,083p	2,116p	2,222p	2,424p	2,778p
1,5	6,772p	3,628p	2,605p	2,116p	1,847p	1,693p	1,612p	1,587p	1,612p	1,693p	1,847p	2,116p
2,0	5,926p	3,175p	2,279p	1,852p	1,616p	1,481p	1,411p	1,389p	1,411p	1,481p	1,616p	1,852p
2,5	5,689p	3,048p	2,188p	1,778p	1,552p	1,422p	1,354p	1,333p	1,354p	1,422p	1,552p	1,778p
3,0	5,926p	3,175p	2,279p	1,852p	1,616p	1,481p	1,411p	1,389p	1,411p	1,481p	1,616p	1,852p
3,5	6,772p	3,628p	2,605p	2,116p	1,847p	1,693p	1,612p	1,587p	1,612p	1,693p	1,847p	2,116p
4,0	8,889p	4,762p	3,419p	2,778p	2,424p	2,222p	2,116p	2,083p	2,116p	2,222p	2,424p	2,778p
4,5	15,802p	8,466p	6,078p	4,938p	4,310p	3,951p	3,762p	3,704p	3,762p	3,951p	4,310p	4,938p

Aus dieser Tabelle ist nunmehr ersichtlich, dass der geringste Tragungslohn für den Zentner und die Meile wirklich i n d e m e i n z i g e n F a l l e statt findet, wenn die Geschwindigkeit v = der mittlern c und wenn die wirkliche Arbeitszeit z = der mittlern t ist. Je mehr die Werthe von v und z sich den mittlern Grössen c und t nähern, desto mehr nähert sich auch der Tragungslohn dem berechneten geringsten Werthe 1,333p (oder $\frac{4}{3}$ p) und wir sehen in der Tabelle, d a s s d i e g e f u n d e n e n W e r t h e f ü r d i e T r a g u n g s k o s t e n i n g l e i c h e n A b s t ä n d e n v o n d e m M i n i m u m (1,333p) a u c h g l e i c h v i e l a b w e i c h e n, endlich ergibt sich, dass wenn v und z von den Grössen c und t b e d e u t e n d abweichen, auch b e d e u t e n d e U n t e r s c h i e d e i n d e n T r a g u n g s k o s t e n eintreten. Würde z. B. die wirkliche Arbeitszeit z bloss zu einer Stunde und die Geschwindigkeit v mit dem äussersten Werthe von $\frac{1}{2}$ oder von $4\frac{1}{2}$ Fuss angenommen, so wären die Tragungskosten für den Zentner und die Meile = 15,802p; sie weichen daher von den berechneten geringsten Tragungskosten (1,333p) um 14,469p ab und sind sonach beiläufig 12mal grösser. Dieser grosse Unterschied mag hier bereits für die Folge die Andeutung enthalten, wie nothwendig es sey, die z w e c k m ä s s i g s t e V e r w e n d u n g der zu Gebothe stehenden Kräfte in jedem Falle zu berechnen, weil nur hiedurch das M a x i m u m einer Arbeit oder das M i n i m u m der Kosten erreicht wird. — Wir sehen endlich, dass man das angegebene Resultat für die vortheilhafteste Kraftverwendung in dem angenommenen einfachen Falle, wo eine Last von einem Orte zum andern getragen wird, n u r d u r c h B e r e c h n u n g abzuleiten im Stande war; man würde nämlich ohne eine solche Berechnung immer der Meinung seyn, dass ein Arbeiter bei abnehmender Geschwindigkeit wieder mehr tragen könne und umgekehrt; dass es sonach hinsichtlich der Tragungskosten für den Zentner und die Meile einerlei seyn müsse, eine grosse Last mit kleinerer oder eine kleine Last mit grösserer Geschwindigkeit zu bewegen, welches aber, wie wir gesehen haben, einen sehr bedeutenden Unterschied bewirkt.

§. 37.

Der zweite Fall der Aufgabe §. 35. enthält die Frage: W e n n d i e T r a g u n g s k o s t e n (a) f ü r d e n Z e n t n e r u n d d i e M e i l e g e g e b e n s i n d, w i e d e r T a g l ö h n e r s e i n e A r b e i t e i n r i c h t e n m ü s s e, u m s i c h m ö g l i c h s t v i e l z u v e r d i e n e n. Hier ist wieder die Last, welche der Mensch

oder das Thier trägt $Q = k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ (I.) und der Weg, welcher hiemit in einem Tage zurückgelegt wird $S = 3600.z.v$ (II.). Man kann daher sagen: für den Weg von 24000 Fuss und die Last von 100 ℔ wird der Lohn a bezahlt, welcher Taglohn p entfällt für die Last Q und die Entfernung S oder

$$24000 \times 100 : a = 3600.z.v \times k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) : p$$

$$\text{woraus } p = \frac{3600.z.v.a}{24000.100}.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) \text{ oder}$$

$$p = \frac{3600.t.c.a.k}{24000.100}.\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right) \quad \text{(III.)}$$

dieser Ausdruck muss nunmehr ein M a x i m u m werden. Da aber wieder a, k, c, t gegebene Grössen sind, so hängt das Maximum nur von $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)$ und von $\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ ab. Diese Produkte werden wie in der vorigen Aufgabe zu einem Maximum, wenn $v = c$ und $z = t$ ist, es ist daher auch für diesen Fall am besten, w e n n s i c h d e r A r b e i t e r o d e r d a s T h i e r m i t d e r m i t t l e r n G e s c h w i n d i g k e i t d u r c h d i e g e w o h n t e n A r b e i t s s t u n d e n b e s c h ä f t i g t. Substituiren wir die obigen Werthe in die Gleichung (III.), so ist der Lohn, welchen der Taglöhner bei seiner vortheilhaftesten Kraftverwendung zu erwerben im Stande ist: $p = a.\frac{3600.t.c.k}{24000.100}$ (IV.). Hier ist abermals 3600.t.c die Länge des Weges, welchen der Mensch in einem Tage zurücklegt und k die von ihm zu tragende Last, sonach 3600.t.c.k das mittlere Bewegungsmoment des Trägers in einem Tage; dagegen bleibt 24000 Fuss × 100 ℔ das Bewegungsmoment für einen Zentner und eine Meile. E s i s t d a h e r d e r v e r d i e n t e T a g l o h n p = d e m P r e i s e f ü r d e n Z e n t n e r u n d d i e M e i l e (a) m u l t i p l i c i r t m i t d e m m i t t l e r n B e w e g u n g s m o m e n t e d e s A r b e i t e r s i n e i n e m T a g e u n d d i v i d i r t d u r c h d a s B e w e g u n g s m o m e n t f ü r e i n e n Z e n t n e r u n d e i n e M e i l e.

§. 38.

In dem §. 35. gefundenen Ausdrucke für die Tragungskosten (a) eines Zentners auf eine Meile kommt das mittlere Bewegungsmoment eines Arbeiters 3600t.c.k im Nenner vor und muss, wie wir gesehen haben, möglichst gross werden. In der Aufgabe des vorigen Paragraphes kommt dasselbe 3600.t.c.k im Zähler vor und muss ebenfalls möglichst gross werden. Da nun die gefundenen Formeln nicht bloss für die Verwendung von Menschen, sondern auch für jene von Thieren gelten, so ergibt sich, dass es in beiden Fällen auf die Grösse des Produktes 3600.t.c k ankömmt. Dieses beträgt aber

bei einem Menschen von mittlerer Stärke 3600.t.c.k = 3600.8.2,5.25 = M
„ „ Pferde „ „ „ „ „ „ = 3600.8.4.100 = P
„ „ Ochsen „ „ „ „ „ „ = 3600.8.2,5.100 = O
u. s. w.

Hieraus ergibt sich:

M : P : O $= 2{,}5 \times 25 : 4 \times 100 : 2{,}5 \times 100$ $= 1 : 6{,}4 : 4$
d. h. bei einer gleichen Dauer verhält sich die tägliche Arbeit eines Menschen zu jener eines Pferdes, wie 1 zu 6,4 oder ein Pferd leistet eben soviel als 6 bis 7 Menschen und zwei Pferde leisten beiläufig so viel als drei Ochsen etc. Das erste Resultat kommt jenem sehr nahe, was *Desaguliers* hierüber anführt; er bemerkt nämlich (*Cours de Physique experimentale, tome I. pag.* 255), dass fünf englische Arbeiter so viele Kraft besitzen, als ein Pferd und unterstützt diese Meinung durch das Zeugniss des *Jonas Moore* und anderer englischen Schriftsteller, welche die Arbeit der Menschen und Pferde an der Winde (*Cabestan*) mit einander verglichen haben. Dagegen nehmen die französischen Schriftsteller einstimmig an, dass ein Pferd so viel Kraft besitze als sieben Menschen. Das letztere hat *Desaguliers* auch bei den Arbeiten in Holland beobachtet, und hieraus den Schluss gezogen, dass fünf Engländer so viel Kraft besitzen, als sieben Franzosen oder Holländer. Mehrere Schriftsteller wollten hieraus auf eine Vorliebe *Desaguliers* für seine Landsleute schliessen; doch sahen wir bereits §. 24, dass diejenigen Arbeiter, welche *Coulomb* in Frankreich beobachtete, und die wir auch in Prag vor Augen haben, den stärksten Arbeitern anderer Nationen nicht nachstehen; hieraus erhellet folglich, dass solche individuelle Zusammenstellungen nur von der besondern Beschaffenheit der Menschen und Pferde abhängen.

Zu einer genauen Vergleichung der Arbeiten, welche von Menschen oder Thieren geleistet werden können, ist in jedem Falle nöthig, dass nicht allein die mittlere Kraft k, sondern die Produkte der Kraft, Geschwindigkeit und Zeit (k.c.t) oder die Bewegungsmomente gegen einander gehalten werden. Für mittelmässig starke Menschen war $k = 25$, $c = 2{,}5$ und $t = 8$, demnach $k.c.t = 500$. Für starke Menschen z. B. Soldaten war $k = 30$, $c = {}^{10}\!/_{3}$ und $t = 8$, demnach $k.c.t = 800$. Für mittelmässig kräftige Pferde war $k = 100$, $c = 4$ und $t = 8$, demnach $k.c.t = 3200$. Für starke Pferde war $k = 125$, $c = 4{,}5$ und $t = 8$, demnach $k.c.t = 4500$.

Hieraus ergibt sich das Verhältniss der Arbeit, sowohl von mittleren als von starken Menschen und Pferden, wie

$500 : 3200 = 1 : 6{,}4$ und wie

$800 : 4500 = 1 : 5{,}625$

Für starke Menschen und mittelmässig starke Pferde, wie $800 : 3200 = 1 : 4$

Für mittelstarke Menschen und starke Pferde, wie $500 : 4500 = 1 : 9$

Auf gleiche Weise lassen sich die Leistungen der andern Thiere untereinander und mit jenen der Menschen zusammenstellen. Werden diese Vergleichungen in dem Falle vorgenommen, wenn die Thiere nicht mit der mittlern Geschwindigkeit und nicht durch die gewohnten Arbeitsstunden beschäftiget werden (wenn demnach nicht die vortheilhafteste Wirkung der thierischen Kräfte eintritt), so ergibt sich ein ganz anderes Resultat, als bei ihrer vortheilhaftesten Verwendung. Arbeitet z. B. ein Pferd mit der Geschwindigkeit von 7 Fuss, wobei es eine Kraft von 25 ℔ ausübt, und ein Arbeiter während derselben Zeit mit der Geschwindigkeit von 1 Fuss und der zugehörigen Kraft von 40 ℔, so verhalten sich nun die Effekte, wie $7 \times 25 : 1 \times 40 = 4{,}375 : 1$. Dieses Verhältniss ist daher viel kleiner, als das früher für die beste Verwendung gefundene.

§. 39.

Wir kommen nun zu dem zweiten Falle, der bei dem Tragen der Lasten statt findet: Ein Arbeiter erhält eine bestimmte Last Q zu tragen, es frägt sich, wie soll er seine Arbeit einrichten, d. h. mit welcher Geschwindigkeit (v) und durch wie viele Stunden (z) muss derselbe gehen, um mit dieser Last in einem Tage so weit als möglich zu kommen?

Die von dem Arbeiter getragene Last ist nach unserer allgemeinen Bestimmung eben so gross, als die Kraft und daher $Q = k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ (I.)

Auf gleiche Weise ist der Raum, welchen der Arbeiter mit dieser Last zurücklegt, $S = 3600.\, z.\, v.$ (II.)

Wir haben daher zwei Gleichungen, welche zur Auflösung der vorstehenden Aufgabe dienen; hierin ist Q nach den Bedingnissen der Aufgabe gegeben, und k, c, t sind nach der individuellen Beschaffenheit des verwendeten Arbeiters ebenfalls bekannt; es bleiben daher die 3 Grössen v, z und S zu bestimmen, wozu wir, da oben bloss zwei Gleichungen angeführt wurden, noch eine dritte finden müssen.

Multiplicirt und dividirt man die letzte Gleichung mit c und mit t, so ist:

$S = 3600.\, t.\, c.\frac{z}{t}.\frac{v}{c}$, welches nach den Bedingungen der Aufgabe ein Maximum werden muss; da nun das Verhältniss $\frac{z}{t}$ zur Vermehrung des Raumes S eben so viel als $\frac{v}{c}$ beiträgt, so muss für den Fall des Maximum $\frac{z}{t} = \frac{v}{c}$ seyn (III.) (*) diess ist die dritte Gleichung, womit wir nunmehr die Aufgabe auflösen können. Substituirt man nämlich den gefundenen Werth in die erste Gleichung, so ist: $Q = k\left(2-\frac{v}{c}\right)^2$ oder $\sqrt{\frac{Q}{k}} = 2-\frac{v}{c}$ woraus $v = c\left(2-\sqrt{\frac{Q}{k}}\right)$, dann $z = t\left(2-\sqrt{\frac{Q}{k}}\right)$, endlich $S = 3600.\, t.\, c\left(2-\sqrt{\frac{Q}{k}}\right)^2$ folgt.

Wäre die Last Q, welche man dem Tagelöhner zu tragen gibt, seiner mittlern Kraft k gleich, so würde: $v = c\,(2-\sqrt{1}) = c$, dann $z = t$ und $S = 3600.\, t.\, c$ seyn, wie sich bereits bei der vorigen Aufgabe §. 35. zeigte.

*) Die Auflösung mittelst der höheren Analysis geschieht auf folgende Art: Soll der Raum $3600.\, z.\, v$ ein Maximum seyn, so folgt nach den Principien der Differentialrechnung $z.\, dv + v.\, dz = o$, sonach $dv = -\frac{v.\,dz}{z}$. Weil aber die Last, welche der Arbeiter zu tragen hat, $Q = k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ eine gegebene Grösse ist, so gibt das Differentiale dieser Gleichung $-\frac{dv}{c}\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{dz}{t}\left(2-\frac{v}{c}\right) = o.$ Wird in dieser Gleichung der vorige Werth $dv = -\frac{v.\,dz}{z}$ substituirt, so erhalten wir $\frac{v.\,dz}{c.\,z}\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{dz}{t}\left(2-\frac{v}{c}\right) = o$, demnach $\frac{v}{c}\left(2-\frac{z}{t}\right) = \frac{z}{t}\left(2-\frac{v}{c}\right)$, woraus folgt $\frac{2v}{c}-\frac{v.z}{c.t} = \frac{2z}{t}-\frac{v.z}{c.t}$ und $\frac{v}{c} = \frac{z}{t}$, d. h. es muss das Verhältniss der wirklichen Geschwindigkeit v zur mittlern c eben dasselbe seyn, welches zwischen den wirklichen Arbeitsstunden z und den mittlern t statt findet.

Wenn jedoch Q kleiner als k ist, so ist $\frac{Q}{k}$, mithin auch $\sqrt{\frac{Q}{k}}$ ein ächter Bruch, folglich $2 - \sqrt{\frac{Q}{k}}$ grösser als 1, demnach v grösser als c und z grösser als t; und umgekehrt: wenn Q grösser als k ist, so ist v kleiner als c und z kleiner als t; d. h. hat ein Arbeiter eine bestimmte, gegebene Last zu tragen, so wird seine vortheilhafteste Verwendung nicht mehr bei der mittlern Geschwindigkeit und mittlern Arbeitszeit erfolgen, sondern derselbe muss sich mit einer grössern oder kleinern Geschwindigkeit und durch eine grössere oder kleinere Arbeitszeit bewegen, je nachdem die gegebene Last kleiner oder grösser, als die mittlere Kraft dieses Arbeiters ist.

§. 40.

Wir wollen diese Aufgabe durch einige Beispiele noch deutlicher machen.

1. Beispiel. Es sey $Q = 16$ ℔ und der Arbeiter von mittlerer Stärke oder $k = 25$ ℔, $c = 2{,}5$ Fuss und $t = 8$ Stunden, so ist nach der gefundenen Formel $v = 2{,}5\left(2 - \sqrt{\frac{16}{25}}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{6}{5} = 3$ Fuss und $z = 8\left(2 - \sqrt{\frac{16}{25}}\right) = 9\tfrac{3}{5}$ Stunden $= 9^h$ $36^{Min.}$, folglich $S = 3600 . 9\tfrac{3}{5} . 3$ Fuss $=$ 4 Meilen 1280 Klafter. Diess ist der weiteste Weg, welchen der Taglöhner mit der gegebenen Last von 16 ℔ in einem Tage machen kann, wie es leicht aus der Berechnung anderer Fälle hervorgeht. Wollte man nämlich $z = 8$ Stunden annehmen, so wäre: $16 = 25\left(2 - \frac{v}{2{,}5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right)$ und $v = 3{,}4$ Fuss, folglich $S = 3600 . 8 . 3{,}4$ Fuss $=$ 4 Meilen 320 Klafter, also schon weniger als oben, und so in jedem andern Falle.

2. Beispiel. Nehmen wir an, die bestimmte Last, welche der Taglöhner zu tragen erhält, sey $Q = 36$ ℔, so ist für den Fall eines mittelstarken Menschen $v = 2{,}5\left(2 - \sqrt{\frac{36}{25}}\right) = 2{,}5\left(2 - \frac{6}{5}\right) = 2$ Fuss und $z = 8\left(2 - \sqrt{\frac{36}{25}}\right) = 6{,}^h4 = 6^h$ $24^{Min.}$, folglich $S = 3600 . 6{,}4 . 2$ Fuss $=$ 1 Meile 3680 Klafter oder nicht ganz 2 Meilen.

3. Beispiel. Ein Bothe bekommt eine äusserst geringe Last z. B. einige Briefe zu tragen, wie weit wird derselbe in einem Tage kommen können?

Da in diesem Falle $Q = o$ angenommen werden kann, so wird $v = c\,(2 - \sqrt{o}) = 2c$ und $z = t\,(2 - \sqrt{o}) = 2\,t$, daher $S = 3600 . 2\,t . 2\,c = 3600 . 4 . t . c$, folglich bei einem mittelmässig starken Menschen $S = 3600 . 4 . 8 . 2{,}5$ Fuss $=$ 12 Meilen, wie wir es bereits §. 20. gesehen haben. Uibrigens ist bei dieser Aufgabe vorausgesetzt, dass auf dem Wege keine Hügel oder Berge vorkommen, weil sonst der Taglöhner, wie später gezeigt wird, noch den Widerstand der schiefen Fläche zu überwältigen hätte, und daher auch den Weg von 12 Meilen in einem Tage nicht mehr zurückzulegen im Stande wäre.

§. 41.

Die Lasten, welche von Menschen oder Thieren auf eine bestimmte oder unbestimmte Entfernung getragen werden sollen, z. B. Getreide, Obst und alle Flüssigkeiten, sind von der Art, dass sie in einen Korb, leinenen oder ledernen Sack, in eine Butte oder in ein Fass gegeben werden müssen; sie können daher von den Arbeitsleuten nicht an und für sich allein, sondern nur mit einem Traggefässe fortgebracht

werden. Es frägt sich daher, welche Anordnung in einem solchen Falle zu treffen sey, um abermals die Frachtkosten für einen Zentner und eine Meile auf ein Minimum zu bringen?

Zur Auflösung dieser Aufgabe wollen wir wieder den leichtesten Fall zuerst behandeln, wo nämlich die Entfernung, bis zu welcher die Last getragen wird, so gross ist, dass man einen oder mehrere Tage hierzu bedarf. Der nämliche Fall müsste gelten, wenn die Entfernung, wohin die Last zu tragen wäre, sich zwar in einem Tage mehreremale zurücklegen liesse, jedoch die Einrichtung bestünde, dass der Arbeiter, ohne sich mehr als seine übliche Ruhezeit aufzuhalten, sogleich wieder eine Rückladung bekäme. Wir erhalten sonach folgende Aufgabe:

Es sey eine theilbare Last z.B. Getreide, Obst in einem Traggefässe auf eine unbestimmte Entfernung zu tragen; wie ist die Arbeit einzurichten, damit bei einem festgesetzten Tagelohne die Tragungskosten für einen Zentner und eine Meile ein Minimum werden; oder wenn die Tragungskosten für einen Zentner und eine Meile gegeben sind, wie hat sich der Arbeiter zu benehmen, um auf einen möglichst hohen Verdienst zu kommen? —

Es sey B das Gewicht des Traggefässes, so wird die Kraft des Arbeiters nebst der Last Q, die er trägt, auch noch das Gewicht B zu übernehmen haben; es ist daher:

$Q + B = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$, woraus $Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - B$ folgt. (I.)

Hiezu erhalten wir, wie in den bisher behandelten Fällen, die Gleichung für den Raum $S = 3600 . z . v$. (II.)

Es sey wieder der tägliche Lohn des Arbeiters $= p$, und der auf einen Zentner und eine Meile ausfallende Trägerlohn $= a$, so kann man schliessen: Für die Last Q auf die Entfernung S zu tragen, wird der Taglohn p gezahlt, welcher Lohn (a) ergibt sich für einen Zentner (100 ℔) und eine Meile (24000 Fuss) oder $Q . S : p = 100 . 24000 : a$, woraus

$$a = \frac{100.24000.p}{Q.S} \quad \text{(III.)}$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth für Q und S aus den Gleichungen I. und II. so ist.

$$a = \frac{100.24000.p}{3600.z.v.\left\{k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-B\right\}}$$

$$= \frac{100.24000.p}{3600.t.c.k.\frac{v}{c}.\frac{z}{t}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}} \quad \text{(IV.)}$$

welcher Ausdruck ein Minimum werden muss. Wäre aber der Trägerlohn für einen Zentner und eine Meile unabänderlich bemessen, so wäre der tägliche Verdienst des Arbeiters

$$p = \frac{a.3600.t.c.k}{24000.100}.\frac{v}{c}.\frac{z}{t}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\} \quad \text{(V.)}$$

welcher Ausdruck ein Maximum werden muss, da der Arbeiter in diesem Falle wie §. 37. auf einen möglichst hohen Taglohn zu kommen wünscht.

Im ersten Falle stehen die Grössen $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ im Nenner, welche im zweiten Falle im Zähler vorkommen; die Forderungen beider Aufgaben werden demnach erfüllt, wenn

der algebraische Ausdruck $\frac{v}{c} \cdot \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k} \right\}$ = Maximum oder wenn $\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{v}{c} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{B}{k}$ zu einem Maximum gemacht wird.

Wäre in diesem Ausdrucke das Gewicht des Tragkorbes oder der Butte $B = 0$, so hätten wir, wie §. 35. für den Fall des Maximum $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1$. Da diess jedoch hier nicht der Fall ist, und die abzuziehende Grösse $\frac{B}{k}$ ebenfalls mit den Verhältnissen $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ multiplizirt erscheint, so ist es einleuchtend, dass der vortheilhafteste Werth für $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ auch von der abzuziehenden Grösse $\frac{B}{k}$ abhängt, und von dem §. 35. gefundenen Werthe 1 verschieden seyn müsse. Weil sowohl $\frac{v}{c}$ als auch $\frac{z}{t}$ in beiden Theilen des obigen Ausdruckes, der ein Maximum werden soll, auf ganz gleiche Weise erscheinen, so können wir hieraus schliessen, dass das Verhältniss von v zu c und von z zu t dasselbe seyn müsse, oder dass $\frac{v}{c} = \frac{z}{t}$. Welcher Werth jedoch der Grösse $\frac{v}{c}$ oder $\frac{z}{t}$ zu geben sey, lässt sich nur entweder durch Versuche, d. h. durch Annahme verschiedener Werthe für v und z oder durch Anwendung der Differentialrechnung finden. Die letztere lehrt uns nämlich, *) dass der obige Ausdruck ein Maximum wird, wenn

*) Nach den Grundsätzen der höheren Analysis ergibt sich dieser Werth auf folgende Art: Da in dem gefundenen Ausdrucke für p die Grössen $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ von einander unabhängig sind, so muss diese Funktion sowohl in Beziehung auf $\frac{v}{c}$ als auch in Beziehung auf $\frac{z}{t}$ zu einem Maximum werden. Hiezu geben die ersten abgeleiteten Funktionen oder die Differentialkoefficienten in Beziehung auf $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ folgende Gleichungen: $\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{2k} = 0$ und $\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{2k} = 0$. Zieht man diese zwei Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{t}\right) = 0 \text{ oder}$$

$$1 - \frac{v}{c} + \left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{t}\right) = 1 - \frac{z}{t} + \left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{t}\right) \text{ woraus } \frac{v}{c} = \frac{z}{t},$$

welches bereits aus dem Umstande zu schliessen war, dass in der Funktion $\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right) \cdot \frac{z}{t} \cdot \left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k} \cdot \frac{v}{c} \cdot \frac{z}{t}$ die Grössen $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ auf ganz gleiche Art vorkommen.

Setzen wir demnach in eine von beiden Gleichungen $\frac{v}{c}$ an die Stelle von $\frac{z}{t}$, so ist:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{v}{c}\right) - \frac{B}{2k} = 0 \text{ oder } \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + 1 - \frac{v}{c} = \frac{B}{2k} \text{ und hieraus}$$

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{B}{2k}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{2B}{k}\right)}, \text{ demnach } \frac{v}{c} = \frac{1}{2}\left\{3 - \sqrt{\left(1 + \frac{2B}{k}\right)}\right\} = \frac{z}{t}$$

Weil jedoch $\sqrt{\left(1 + \frac{2B}{k}\right)} = 1 + \frac{B}{k} - \frac{B^2}{2k^2} \ldots$, so folgt $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k} + \frac{B^2}{4k^2} \ldots =$ $= 1 - \frac{B}{2k}$ beinahe, nachdem $\frac{B}{2k}$ immer ein ächter Bruch ist, und daher das Quadrat gegen die erste Potenz vernachlässigt werden kann.

$$\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \tfrac{1}{2}\left\{3 - \sqrt{\left(1 + \frac{2B}{k}\right)}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{3 - \left(1 + \frac{B}{k} - \frac{B^2}{2k^2} \,.\,.\,.\,.\,.\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{B}{k} + \frac{B^2}{2k^2} \,.\,.\,.\,.\,.\right) = 1 - \frac{B}{2k} + \frac{B^2}{4k^2} \,.\,.\,.\,.\,.\, = 1 - \frac{B}{2k}$$

beinahe. Wir können nämlich bei dem Ausziehen der Wurzel die Grösse $\frac{B^2}{4k^2}$ und alle folgenden höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ gegen die erste Potenz oder $\frac{B}{k}$ vernachlässigen, indem diess ein ächter Bruch ist. Wäre z. B. B = 2 ℔ und k = 25 ℔, so wäre

$$1 - \frac{B}{2k} + \frac{B^2}{4k^2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, = 1 - \frac{1}{25} + \frac{1}{625} \,.\,.\,.\,.\,.$$

wofür man ohne Anstand 1 — $\frac{1}{25}$ setzen, und sonach die höhern Potenzen des Bruches vernachlässigen kann. Es ist daher $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ nicht mehr = 1, sondern wir haben von 1 noch die Grösse $\frac{B}{2k}$ abzuziehen.

Der Trägerlohn für einen Zentner und eine Meile wird daher ein Minimum; oder wenn dieser Lohn gegeben ist, verdient sich der Arbeiter am meisten, wenn seine Geschwindigkeit $\underbrace{v = c\left(1 - \frac{B}{2k}\right)}$ (V.) d. h. wenn der Arbeiter l a n g s a m e r, als mit der mittlern Geschwindigkeit c geht, und dann, wenn die Arbeitsstunden $\underbrace{z = t\left(1 - \frac{B}{2k}\right)}$ (VI.) d. h. wenn der Arbeiter auch w e n i g e r S t u n d e n als seine mittlern Arbeitsstunden t verwendet; dagegen aber hat derselbe nunmehr eine grössere Last zu tragen: denn substituirt man die gefundenen Werthe für v und z in die aufgestellte Gleichung zwischen der Kraft und Last (I.), so ist

$$Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - B = k\left(1 + \frac{B}{2k}\right)^2 - B = k\left(1 + \frac{B}{k} + \frac{B^2}{4k^2}\right) - B.$$

Hier lässt sich die Grösse $\frac{B^2}{4k^2}$ in der Addition gegen $\frac{B}{k}$ eben so weglassen, wie es bereits oben bei der Ausziehung der Wurzel geschehen ist; demnach erhalten wir:

$Q = k\left(1 + \frac{B}{k}\right) - B$ oder $\underbrace{Q = k}$ (VII.) d. h. das Traggefäss macht in der Ladung selbst k e i n e n Unterschied, wohl aber findet ein solcher in der Zeit und Geschwindigkeit statt. Wir können daher als die dritte Regel annehmen, dass der Arbeiter e b e n s o v i e l l a d e n m u s s, als wenn das Traggefäss kein Gewicht hätte oder nicht vorhanden wäre.

Substituirt man die für v und z gefundenen Werthe (V.) und (VI.) in die Gleichung für den Raum (II.), so ergibt sich:

$$S = 3600\,.\,t\,.\,c\left(1 - \frac{B}{2k}\right)^2 = 3600\,.\,t\,.\,c\left(1 - \frac{B}{k} + \frac{B^2}{4k^2}\right)$$

und wenn man wieder das Quadrat des kleinen Bruches $\frac{B}{2k}$ als unbedeutend weglässt, so ist: $S = 3600\,.\,t\,.\,c\left(1 - \frac{B}{k}\right)$ (VIII.). Werden endlich statt Q und S die Werthe (VII.) und (VIII.) in die Gleichung (III.) substituirt, so erhält man den Trägerlohn für einen

Zentner und eine Meile: $a = \frac{24000 . 100 . p}{3600 . t . c . k \left(1 - \frac{B}{k}\right)}$ (IX.) und umgekehrt ist der Tagelohn, den sich der Arbeiter bei dem Tragen der Last in einem Tragkorbe verdient,

$$p = \frac{a . 3600 . t . c . k \left(1 - \frac{B}{k}\right)}{24000 . 100}.$$

Wäre das Gewicht des Traggefässes $B = 0$, so wäre $p = \frac{a . 3600 . t . c . k}{24000 . 100}$ (wie §. 37.)

Es verhält sich also der Verdienst des Arbeiters, wenn die Last ohne Traggefäss getragen werden kann, zu dem Verdienst, wenn die Last in einem Traggefässe getragen wird, wie 1 zu $1 - \frac{B}{k}$ oder wie k zu $k - B$. Wäre z. B. $B = 2$ ℔, so ist $1 - \frac{B}{k} = 1 - \frac{8}{100}$ d. h. der Arbeiter verliert 8 Prozente, und wenn $B = 5$ ℔, so ist $1 - \frac{B}{k} = 1 - \frac{20}{100}$ d. h. der Arbeiter verliert 20 Prozente von seinem Taglohne. Hieraus ersieht man zur Genüge, wie nothwendig es sey, das Traggefäss so leicht als möglich zu machen.

§. 42.

Wir wollen zur grössern Deutlichkeit die vorstehende Aufgabe noch in einem Beispiele auflösen. Es sey das Traggefäss $B = 5$ ℔ und der Arbeiter von mittlerer Stärke oder $k = 25$ ℔, $c = 2{,}5$ Fuss und $t = 8$ Stunden, so ist:

$$\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k} = 1 - \frac{5}{50} = 0{,}9 \text{ folglich } v = 2{,}5 . 0{,}9 = 2{,}25 \text{ Fuss},$$

$z = 8 . 0{,}9 = 7{,}2$ Stunden $= 7^h\ 12^{Min.}$, $S = 3600 . z . v = 3600 . 7{,}2 . 2{,}25$ Fuss $= 9720$ Klafter, endlich $Q = k = 25$ ℔. Hätte man dieselbe Last ohne Traggefäss getragen, so wäre $S = 3600 . 8 . 2{,}5$ Fuss $= 12000$ Klafter gewesen; der Unterschied besteht sonach darin, dass der Arbeiter zwar dasselbe mit und ohne Traggefäss ladet, aber im ersten Falle (nämlich mit dem Traggefässe) langsamer und durch eine kürzere Zeit geht, folglich in einem Tage nicht so weit kommt.

Um sich zu überzeugen, ob der oben für $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ gefundene Werth wirklich der vortheilhafteste sey, wollen wir dasselbe Beispiel noch durch die Staffelrechnung auflösen. Es war $p = \frac{a . 3600 . t . c . k}{24000 . 100} . \frac{v}{c} . \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k} \right\}$ oder

$$p = \frac{3}{4} . a . \frac{v}{c} . \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k} \right\}.$$

Nehmen wir nun für $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ verschiedene Werthe an, so ist:

Für $\frac{v}{c}$ u. $\frac{z}{t}$	der Werth für p
0,6	$p = a \,.\, 0{,}4752$
0,7	$p = a \,.\, 0{,}5476$
0,8	$p = a \,.\, 0{,}5952$
0,9	$p = a \,.\, 0{,}6136$
1,0	$p = a \,.\, 0{,}6000$
1,1	$p = a \,.\, 0{,}5536$
1,2	$p = a \,.\, 0{,}4752$

Hieraus ergibt sich nun, dass der gefundene Werth für $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \frac{9}{10}$ wirklich der vortheilhafteste sey, indem in jedem andern Falle der Verdienst des Arbeiters geringer ausfällt.

§. 43.

In der bereits aufgestellten Gleichung $p = a \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{24000 \,.\, 100}\left(1 - \frac{B}{k}\right) \times k$, die sich auf die Form $p = a \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{24000 \,.\, 100} \times \left(k - B\right)$ zurückbringen lässt, kann man entweder $3600 \,.\, t \,.\, c \left(1 - \frac{B}{k}\right)$ als den Raum betrachten, den der Arbeiter mit der Last k zurücklegt, oder es kann $3600 \,.\, t \,.\, c$ als der Raum angesehen werden, den man mit der Last $k - B$ zurücklegt, d. h. der Arbeiter wird einen gleich grossen Taglohn erhalten, wenn er entweder in das Traggefäss die Last k ladet und den Raum $3600 \,.\, t \,.\, c \left(1 - \frac{B}{k}\right)$ zurücklegt, oder wenn er das Traggefäss mit der Last $k - B$ anfüllt und den Raum $3600 \,.\, t \,.\, c$ zurücklegt.

Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass der obige Werth $p = a \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{24000 \,.\, 100}\left(1 - \frac{B}{k}\right) k$ nur zufolge einer Annäherung gefunden wurde, bei welcher man die höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ vernachlässigte; und nur auf diesen Umstand gründet sich demnach auch die Gleichheit der obigen zwei Werthe. Um zu finden, welchen Einfluss die Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ unter diesen Umständen habe, wollen wir die Rechnung für einen besondern Fall sowohl genau, als auch nach der bereits aufgestellten Formel führen. Wenn z. B. $B = 5$ ℔ und $k = 25$ ℔ ist, so ist $\frac{B}{k} = \frac{5}{25} = 0{,}2$, es ist daher $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \frac{1}{2}\left\{3 - \sqrt{\left(1 + \frac{2\,B}{k}\right)}\right\} = \frac{1}{2}\left(3 - 1{,}183\right) = 0{,}909$, folglich ist der tägliche Raum $= 3600 \,.\, z \,.\, v = 3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, 0{,}909 \,.\, 0{,}909 = 3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, 0{,}8263$ und die Ladung des Trägers $Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - B = k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\} =$ $= k\,(1{,}091 \,.\, 1{,}091 - 0{,}2) = k \,.\, 0{,}9903$. Es zeigt sich also der tägliche Verdienst des Arbeiters $= a \,.\, \frac{3600 \,.\, z \,.\, v \,.\, Q}{24000 \,.\, 100} = a \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k \,.\, 0{,}8263 \,.\, 0{,}9903}{24000 \,.\, 100} = a \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{24000 \,.\, 100} \,.\, 0{,}818$ (I).

Würde man nach der oben aufgestellten zweiten Formel rechnen, so wäre die Ladung des Trägers $Q = k - B = k\left(1 - \frac{B}{k}\right) = k\,(1 - 0{,}2) = 0{,}8\,k$ und der tägliche Raum

$= 3600 . t . c$, daher der tägliche Verdienst des Arbeiters $= a . \frac{3600 . t . c . k . 0{,}8}{24000 . 100}$ (II.)
Wird die Last ohne Traggefäss getragen, so ist der tägliche Verdienst des Arbeiters $= a . \frac{3600 . t . c . k}{24000 . 100}$, der Träger würde daher nach (I) $0{,}182 . \frac{a . 3600 . t . c . k}{24000 . 100}$ und nach (II.) $0{,}200 . a . \frac{3600 . t . c . k}{24000 . 100}$ d. h. im ersten Falle 18 Prozente und im zweiten Falle 20 Prozente von dem Taglohne, welchen er ohne Traggefäss erhält, verlieren. Da aber der Taglohn eines Arbeiters nicht so gross ist, als dass dieses einen merklichen Unterschied geben könnte, so zeigt es sich für den Fall, wenn $\frac{B}{k}$ ein kleiner Bruch ist, immer hinreichend genau, nach einer oder der andern Formel zu rechnen.

§. 44.

Die bisherigen Aufgaben waren für den Fall einer ununterbrochenen Tragung berechnet, wenn nämlich der Arbeiter, Tagelöhner oder Bothe entweder eine sehr grosse Entfernung zu durchschreiten hat, oder aber im Rückwege ebenfalls eine Last zu tragen erhält. Es kommen jedoch häufig Fälle vor, wo Lasten auf kurze Entfernungen getragen werden, oder wo eine gegebene Last z. B. ein Haufen Getreide, Obst in mehreren Gängen von Trägern an einen bestimmten Ort getragen werden muss. So oft jeder Arbeiter seine Ladung an Ort und Stelle gebracht hat, geht er leer zurück, um eine neue Ladung zu holen. Es frägt sich daher, wie die Arbeit in diesem Falle einzurichten sey, damit entweder die Tragungskosten ein Minimum werden, oder wenn dieselben für eine bestimmte Last bemessen sind, der Arbeiter einen möglichst hohen Tagelohn verdiene?

Wir wollen zuerst den einfachsten Fall annehmen, wo die Last ohne Traggefäss fortgebracht werden kann. Es sey die Last, welche der Träger bei jedem Gange auf sich nimmt $= Q$, so hat derselbe ausser dieser Last nichts weiter zu tragen, und verwendet daher seine ganze Kraft nur auf das Tragen von Q; demnach haben wir $Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ (I).

Weil der Arbeiter die Last Q mit der Geschwindigkeit v trägt, so ist die Zeit, in welcher diese Last auf die Entfernung E getragen wird $= \frac{E}{v}$.

Auf dem Rückwege geht der Arbeiter leer und kann demnach mit einer grössern Geschwindigkeit V gehen. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Gleichung $Q = 0 = k\left(2 - \frac{V}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$. In diesem Ausdrucke hat die Grösse k ihren bestimmten, der Kraft des Menschen angemessenen Werth, sie kann daher nicht $= 0$ seyn. Eben so kann nicht $2 - \frac{z}{t} = 0$ seyn, denn dann wäre $z = 2\,t = 16$ Stunden und der Arbeiter könnte, wie wir §. 20. sahen, nichts tragen. Demnach muss $2 - \frac{V}{c} = 0$ oder $V = 2c$ seyn, d. h. der Arbeiter muss, da er im Rückwege nichts trägt,

mit der doppelten mittlern Geschwindigkeit gehen. Die Zeit des Rückweges ist daher $= \frac{E}{V} = \frac{E}{2c}$, sonach die Zeit des Hin- und Rückganges, oder die Zeit, welche auf eine Tracht verwendet werden muss $= \frac{E}{v} + \frac{E}{2c} = \frac{E}{v}\left(1 + \frac{v}{2c}\right)$. Nun kann man sagen: In der Zeit $\frac{E}{v}\left(1 + \frac{v}{2c}\right)$ bringt der Arbeiter die Last einmal hin, wie vielmal (n) geht er in der ganzen Tageszeit (3600 . z) oder $\frac{E}{v}\left(1 + \frac{v}{2c}\right) : 1 = 3600 . z : n$, woraus die Anzahl der Trachten in einem Tage $n = \frac{3600 . z . v}{E\left(1 + \frac{v}{2c}\right)}$ folgt. Da nun der Arbeiter jedesmal die Last Q trägt, so bringt er in einem Tage die Last n Q an Ort und Stelle, und diess ist zugleich der Effekt, der ein Maximum werden muss, nämlich:

$$n\,Q = \frac{3600 . z . v . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{E\left(1 + \frac{v}{2c}\right)} = \frac{3600 . t . c . k . \frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{E\left(1 + \frac{v}{2c}\right)}.$$

In diesem Ausdrucke sind wieder 3600, t, c, k und E gegebene, bestimmte Grössen, es müssen daher die zwei andern Faktoren ein Maximum werden. Da nun das Verhältniss $\frac{v}{c}$ von dem Verhältnisse $\frac{z}{t}$ unabhängig ist, so müssen die Produkte $\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ und $\frac{\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)}{1 + \frac{v}{2c}}$ jedes für sich ein Maximum seyn. Das erste geschieht, wie wir bereits aus der Aufgabe §. 35. wissen, wenn $z = t$ gesetzt wird, woraus wir nun sehen, dass der Umstand des leeren Zurückganges auf die tägliche Arbeitszeit (z) keinen Einfluss hat, und dass es auch hier am vortheilhaftesten sey, sich an die mittlern Arbeitsstunden $(z = t)$ zu halten.

Um zu finden, wenn das zweite Produkt ein Maximum wird *), muss man verschiedene Werthe für $\frac{v}{c}$ annehmen, und man erhält durch die sogenannte Staffelrechnung:

*) Hinsichtlich der Geschwindigkeit wird $\frac{\frac{2v}{c} - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v}{2c}}$ ein Maximum, wenn der Differentialcoefficient $\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{2c}\right) - \frac{v}{2c} + \frac{v^2}{4c^2} = 0$ gesetzt wird, folglich $1 = \frac{v}{c} + \frac{v^2}{4c^2}$ und $\frac{v}{2c} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$, woraus $\frac{v}{c} = 0{,}828 = \frac{5}{6}$ beinahe.

$\frac{v}{c}$	$\dfrac{\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{2c}}$
$^{8}/_{12}$	0,6667
$^{9}/_{12}$	0,6818
$^{10}/_{12}$	0,6863
$^{11}/_{12}$	0,6810
$^{12}/_{12}$	0,6667

Hieraus ersieht man, dass für den Fall des Maximum $\frac{v}{c}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ seyn müsse. Demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Träger die Last an Ort und Stelle bringt $v=\frac{5}{6}c$, d. h. der Arbeiter muss bei dem Tragen der Last eine kleinere Geschwindigkeit, als seine mittlere annehmen.

Substituiren wir nun die gefundenen Werthe $z=t$ und $v=\frac{5}{6}\cdot c$ in die Gleichung zwischen Kraft und Last, so ist: $Q=k\left(2-\frac{5c}{6c}\right)\left(2-\frac{t}{t}\right)=\frac{7}{6}k$ oder $\frac{1}{6}k$ mehr, als der Träger bei der mittlern Geschwindigkeit zu tragen gewohnt ist, d. h. der Arbeiter muss, da seine Geschwindigkeit bei dem Tragen der Last um $\frac{1}{6}$ geringer als seine mittlere Geschwindigkeit ist, dagegen eine eben so viel grössere Ladung nehmen.

Nunmehr ergibt sich die Zeit eines Ganges mit Ladung $=\frac{E}{v}=\frac{6}{5}\cdot\frac{E}{c}$ und die Zeit des leeren Rückganges $=\frac{E}{V}=\frac{E}{2c}$, also beide Zeiten zusammen $=\frac{6}{5}\cdot\frac{E}{c}+\frac{E}{2c}=\frac{17}{10}\cdot\frac{E}{c}$. Die Anzahl Gänge in einem Tage beträgt $n=\dfrac{3600.z.v}{E\left(1+\frac{v}{2c}\right)}=\dfrac{3600.t.c}{E}\cdot\frac{10}{17}$, und die gesammte Last, welche von dem Arbeiter in einem Tage auf die Entfernung E getragen wird, d. h. der Effekt ist: $nQ=\dfrac{3600.t.c}{E}\cdot\frac{10}{17}\cdot\frac{7}{6}k=\dfrac{3600.t.c.k}{E}\cdot\frac{35}{51}$. Da nun $\frac{34}{51}=\frac{2}{3}$ der Abkürzung wegen statt $\frac{35}{51}$ angenommen werden kann, so ist der Effekt $=\dfrac{3600.t.c.k}{E}\cdot\frac{2}{3}$, d. h. man erhält den Effekt, wenn das mittlere Bewegungsmoment des Arbeiters mit der Entfernung dividirt und noch mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt wird. Wenn daher ein Träger auf eine gegebene Entfernung (E) Lasten trägt, und nach jedem Gange leer zurückgeht, so erhält man den Effekt, wenn man von dem Effekte der ununterbrochenen Tragung der Lasten auf die Entfernung E $\left(\text{oder von } \dfrac{3600.t.c.k}{E}\right)$ zwei Drittheile nimmt.

Die Tragungskosten für den Zentner auf die Entfernung E findet man nunmehr aus der Proportion: Für die Last n Q, welche in einem Tage auf die Entfernung E getragen wird, zahlt man den Taglohn p, welcher Lohn (a) wird für einen Zentner auf dieselbe Entfernung E gezahlt? oder

$$\frac{3600.t.c.k}{E}\cdot\frac{2}{3}\times E : p = 100\times E : a, \text{ woraus } a=\frac{100.E.p.3}{3600.t.c.k.2}.$$

Die Tragungskosten betragen demnach anderthalbmal soviel, als für Gänge ohne Rückweg (§. 35); dieses erhellet auch aus dem Umstande, weil die Geschwindigkeit auf dem Rückwege doppelt so gross ist als die mittlere, folglich die Zeit des Rückweges beiläufig nur halb so gross ist, als die Zeit auf dem Hinwege, der Arbeiter aber nach dem Maasse des Zeitaufwandes bezahlt werden muss.

§. 45.

Beispiel. Nehmen wir an, es sey eine theilbare Last auf die Entfernung von 100 Klaftern von einem mittelmässig starken Menschen zu tragen. Es frägt sich, wie seine Arbeit einzurichten sey, und wie viel derselbe in einem Tage an Ort und Stelle bringen könne?

Für diesen Fall ist nach den gefundenen Formeln

die Geschwindigkeit im Hinwege $v = \frac{5}{6} c = \frac{5}{6} . 2{,}5 = 2\frac{1}{12}$ Fuss;

die Geschwindigkeit im Rückwege $V = 2c = 2 . 2{,}5 = 5$ Fuss;

die wirkliche Arbeitszeit $z = 8$ Stunden;

die Ladung im Hinwege $Q = \frac{7}{6} k = \frac{7}{6} . 25 = 29\frac{1}{6}$ ℔;

die Zeit für einen Gang mit Ladung $= \frac{E}{v} = \frac{6 . 600}{5 . 2{,}5} = 288$ Sec.;

die Zeit des leeren Zurückgehens $= \frac{E}{2c} = \frac{600}{2 . 2{,}5} = 120$ Sec.;

die Anzahl der Gänge in einem Tage $= \frac{3600 . z . v}{E\left(1 + \frac{v}{2c}\right)} = \frac{3600 . 8 . \frac{5}{6} . 2{,}5}{600\left(1 + \frac{5 . 2{,}5}{6 . 2 . 2{,}5}\right)} = 70{,}59$

demnach der Effekt in einem Tage $= 70{,}59 \times 29\frac{1}{6}$ oder $= \frac{3600 . 8 . 2{,}5 . 25}{600} \cdot \frac{2}{3} = 2000$ ℔.

Da nun der Arbeiter bloss 70 oder 71 Gänge des Tages machen kann, so wird derselbe nach seinem Belieben bei den letztern Gängen eine etwas grössere Ladung nehmen können, damit er gerade 2000 ℔. in einem Tage an Ort und Stelle bringt, wofür ihm dann der Lohn einer Tagesarbeit zu vergüten wäre. Hätte dieser Arbeiter keine leeren Rückgänge zu machen, sondern bei jedem Rückgange wieder eine Last zu tragen, so würde sein Effekt nach der Berechnung §. 35:

$= \frac{3600 . t . c . k}{E} = \frac{3600 . 8 . 2{,}5 . 25}{600} = 3000$ ℔. seyn, und daher um die Hälfte mehr betragen, als es bei den leeren Rückgängen der Fall ist.

§. 46.

Wir haben bei der vorhergehenden Aufgabe (§. 44) den Fall angenommen, dass ein Arbeiter eine theilbare Last auf eine gegebene Entfernung in mehreren Gängen des Tages zu tragen hat, bei dem Rückwege leer (ohne Belastung) geht, und dass die Last von der Art ist, dass zu ihrer Fortbringung kein Traggefäss benöthigt wird. In den meisten Fällen ist jedoch die Last so beschaffen, dass sie nur in einem Traggefässe fortgeschafft werden kann. Wir erhalten demnach folgende Aufgabe:

Wenn die Entfernung, auf welche eine theilbare Last, z. B. Wasser, ein Haufen Getreide, Obst etc. getragen werden soll, von der Art

ist, dass der Arbeiter in einem Tage mehrere Gänge zu machen hat, jedoch wegen Mangel an Rückladung mit dem leeren Gefässe zurückgehen muss, so ist zu berechnen, welche Ladung für jeden Gang in das Traggefäss genommen werden muss, und wie viel Gänge in einem Tage gemacht werden sollen, damit täglich die grösstmöglichste Last an Ort und Stelle gebracht werde.

Zur Beantwortung dieser Aufgabe setzen wir das Gewicht des Traggefässes abermals $= B$, und die Ladung in dem Traggefässe $= Q$, so erhalten wir, da der Arbeiter beides zu tragen hat, $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) = Q + B$; demnach ist die Ladung

$$Q = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - B = k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\} \text{(I.)}$$

Es versteht sich hiebei von selbst, dass die Kraft k nicht von der Last des Traggefässes B erschöpft werden dürfe, und dass in dieser Hinsicht das Traggefäss möglichst leicht gemacht werden müsse, damit für die Ladung Q ein möglichst grosses Gewicht übrig bleibe; wir können demnach $\frac{B}{k}$ als eine kleine Zahl oder als einen ächten Bruch betrachten, und in dieser Hinsicht zur Erleichterung der Rechnung das $\left(\frac{B}{k}\right)^2$ und alle höhern Potenzen als unbedeutend weglasssen.

Weil der Träger die Last $Q + B$ mit der Geschwindigkeit v trägt, so ist die Zeit, in welcher die gegebene Entfernung oder der Weg E zurückgelegt wird $= \frac{E}{v}$. Bei dem leeren Rückgange kann der Träger eine grössere Geschwindigkeit V anwenden, demnach ist die Zeit des leeren Rückganges $= \frac{E}{V}$. Beide zusammen geben die Zeit einer

$$\text{Tracht} = \frac{E}{v} + \frac{E}{V} = \frac{E}{v}\left(\frac{V + v}{V}\right) \text{(II.)}$$

Wenn wir die Zeit 3600. z, welche der Träger bei seiner Arbeit täglich zubringt, mit der Zeit, die er auf eine Tracht verwendet, dividiren, so ist die Anzahl der Trachten, die er in einem Tage macht, oder $n = \frac{3600.z.v}{E}\left(\frac{V}{V + v}\right)$ (III.)

Wird nun die Last Q mit der täglichen Anzahl der Trachten n multiplizirt, so ist die gesammte Last, welche in einem Tage an Ort und Stelle gebracht wird

$$n\,Q = \frac{3600.\,z.\,v}{E}\left(\frac{V}{V + v}\right).\,k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\} \text{(IV.)}$$

Wir müssen also die Bedingnisse untersuchen, unter welchen n Q oder der algebraische Ausdruck für den Effekt am grössten wird. Die Grössen E, k, c, t und B sind gegebene und unveränderliche Grössen; denn die Entfernung E, auf welche die Last gebracht werden soll, ist in jedem Falle als gegeben zu betrachten, die mittlere Kraft der Arbeitsleute k, ihre mittlere Geschwindigkeit c, und die Anzahl ihrer gewohnten Arbeitsstunden t ist für die vorhandenen Arbeitsleute ebenfalls gegeben, endlich ist auch das Gewicht des Traggefässes B als gegeben anzusehen; es bleiben daher bloss die veränderlichen Grössen V, z und v übrig, deren jede wir besonders untersuchen wollen.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit V dient der Umstand, dass der Träger auf dem Rückwege nur das leere Gefäss zu tragen hat, folglich $k\left(2-\frac{V}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)=B$ seyn muss. Hieraus folgt $\frac{V}{c}=2-\frac{B}{k}\left\{\frac{1}{2-\frac{z}{t}}\right\}$. In der vorigen Aufgabe, wo wir auf das Gewicht des Traggefässes keine Rücksicht nahmen oder wo $B=0$ war, haben wir $\frac{z}{t}=1$ gefunden; es muss also auch hier die Grösse $\frac{z}{t}$ einen solchen Werth erhalten, dass für den Fall $\frac{B}{k}=0$, ebenfalls $\frac{z}{t}=1$ wird. Dieser Bedingniss wird Genüge geleistet, wenn wir $\frac{z}{t}=1-\frac{u.B}{k}$ setzen. Wir werden zwar in der Folge sehen, dass $u=\frac{3}{4}$ seyn müsse; wenn wir aber auch diesen Werth als unbekannt annehmen, und in die Gleichung für die Geschwindigkeit V den Werth $1-\frac{u.B}{k}$ an die Stelle von $\frac{z}{t}$ setzen, so erhalten wir:

$$\frac{V}{c}=2-\frac{B}{k}\left\{\frac{1}{1+\frac{u.B}{k}}\right\}=2-\frac{B}{k}\left(1-\frac{u.B}{k}+\frac{u.^2B^2}{k^2}\ldots\ldots\right)$$

$$=2-\frac{B}{k}+\frac{u.B^2}{k^2}-\frac{u.^2B^3}{k^3}\ldots\ldots$$

Da nun zu Folge der obigen Bemerkung die Glieder $\frac{u.B^2}{k^2}$, $\frac{u.^2B^3}{k^3}$ weggelassen werden können, so ergibt sich $\frac{V}{c}=2-\frac{B}{k}$. Der Träger geht also auf dem Rückwege nur mit der Geschwindigkeit $V=2c\left(1-\frac{B}{2k}\right)$ (V.)

Da in unserer Aufgabe keine Bedingniss gegeben ist, wodurch die Zeit der täglichen Arbeit z, und die Geschwindigkeit v, mit welcher gearbeitet wird, von einander abhängig gemacht würden, so können wir das tägliche Frachtquantum

$$n\,Q=\frac{3600.z.v.V}{E\,(V+v)}.k\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}$$ sowohl in Beziehung auf z als auch in Beziehung auf v zu einem Maximum machen.

In der ersten Hinsicht muss

$$\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)z-\frac{B}{k}.z=\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}\frac{z}{t}.t$$

$$=\left\{2-\frac{z}{t}-\frac{B}{k\left(2-\frac{v}{c}\right)}\right\}\frac{z}{t}\left(2-\frac{v}{c}\right)t$$ ein Maximum seyn. Da nun t eine bestimmte unveränderliche Grösse ist, und $2-\frac{v}{c}$ hier nicht berücksichtigt wird, so muss bloss der

Ausdruck $\left\{2 - \frac{z}{t} - \frac{B}{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}\right\}\frac{z}{t}$ ein Maximum werden. *) Um diess auszumitteln, kann man die Grösse $2 - \frac{B}{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}$ = dem Durchmesser des Halbkreises A D, und $\frac{z}{t}$ = A B setzen, so ist $B D = 2 - \frac{B}{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)} - \frac{z}{t}$ und nach den Grundsätzen der Geometrie $A B . B D = B E^2$. Da nun $B E^2$ oder das Produkt A B. B D am grössten ist, wenn $A B = \frac{A D}{2}$, so muss $\frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}$ genommen werden. Fig. 2. Tab. I.

Wir haben in der vorigen Aufgabe, wo $\frac{B}{k} = 0$ war, für die Geschwindigkeit $\frac{v}{c} = \frac{5}{6}$ gefunden. Weil aber diese Bedingniss auch in unserer Aufgabe statt finden muss, so muss $\frac{v}{c}$ einen solchen Werth haben, welcher für den Fall, wenn $\frac{B}{k} = 0$ ist, den Ausdruck $\frac{v}{c} = \frac{5}{6}$ gibt. Setzen wir demnach $\frac{v}{c} = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{m . B}{k}\right)$, wo m abermals ein später zu bestimmender Bruch ist, so erhalten wir: $\frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k\left(2 - \frac{5}{6} + \frac{5}{6}.\frac{m . B}{k}\right)}$

$$= 1 - \frac{B}{2k}\left\{\frac{6}{7 + \frac{5\,m . B}{k}}\right\} = 1 - \frac{3\,B}{7\,k\left(1 + \frac{5\,m . B}{7\,k}\right)} = 1 - \frac{3\,B}{7\,k} + \frac{3 . 5 . m}{7 . 7}\left(\frac{B}{k}\right)^2 \ldots\ldots$$

und wenn nun wieder die Produkte der drei Brüche $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ und m mit den höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ vernachlässigt werden, so ist $\underbrace{\frac{z}{t} = 1 - \frac{3\,B}{7\,k}}$ (VI.)

In Hinsicht auf $\frac{v}{c}$ muss der Ausdruck $\frac{V}{V + v}\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right) v \left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k} . v\right\}$

$$= \frac{1}{V + v}\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\}\frac{v}{c} . c . V =$$

$$= \left\{\frac{1}{\frac{V}{c} + \frac{v}{c}}\right\}\left\{2 - \frac{v}{c} - \frac{B}{k\left(2 - \frac{z}{t}\right)}\right\}\frac{v}{c} . V\left(2 - \frac{z}{t}\right)$$ ein Maximum werden.

*) Nach den Grundsätzen der Differentialrechnung wird der Ausdruck $\left\{2 - \frac{z}{t} - \frac{B}{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}\right\}\frac{z}{t}$ in Beziehung auf $\frac{z}{t}$ ein Maximum, wenn $2 - \frac{2z}{t} - \frac{B}{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)} = 0$, also $\frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}$

Da nun V und $2 - \frac{z}{t}$ bereits ihre bestimmten Werthe haben, so muss bloss das Produkt $\left\{\frac{1}{\frac{V}{c} + \frac{v}{c}}\right\}\left\{2 - \frac{v}{c} - \frac{B}{k\left(2 - \frac{z}{t}\right)}\right\}\frac{v}{c}$ zu einem Maximum gemacht werden. Setzen wir vorläufig an die Stelle von $\frac{z}{t}$ den gefundenen Werth $\frac{z}{t} = 1 - \frac{3\,B}{7\,k}$, so erhalten wir nach Hinweglassung der höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ das Produkt $\left\{\frac{1}{\frac{V}{c} + \frac{v}{c}}\right\}\left(2 - \frac{v}{c} - \frac{B}{k}\right)\frac{v}{c}$, welches nach den Grundsätzen der höhern Analysis (*) ein Maximum wird, wenn $\frac{v}{c} = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{7\,B}{15\,k}\right)$ (VII.)

Setzen wir nun die gefundenen Werthe V, VI und VII in die Gleichungen I, II, III und IV, so ist die Ladung $Q = k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\}$

$$= \tfrac{7}{6}\,k - \frac{B}{9} = \tfrac{7}{6}\,k\left(1 - \frac{2\,B}{21\,k}\right)$$

die Anzahl Gänge $n = \frac{3600\,.\,z\,.\,v}{E}\left(\frac{V}{V + v}\right) = \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}\cdot\frac{10}{17}\left(1 - \frac{19\,B}{21\,k}\right)$

die tägliche ganze Last $n\,Q = \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}\cdot\frac{35}{51}\cdot k\left(1 - \frac{2\,B}{21\,k} - \frac{19\,B}{21\,k}\right)$

$$= \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}\cdot\frac{2\,k}{3}\left(1 - \frac{B}{k}\right) = \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}\left(k - B\right)\frac{2}{3}.$$

Wenn daher ein Arbeiter mit einem Traggefässe Lasten auf eine gegebene Entfernung trägt und nach jedem Gange leer zurückgeht, so erhält man den Effekt, wenn

*) Der Ausdruck $\frac{2\,c\,v - \frac{B\,c\,v}{k} - v^2}{V + v}$ wird am grössten, wenn

$\left(2\,c - \frac{B\,c}{k} - 2\,v\right)\left(V + v\right) - 2\,c\,v + \frac{B\,c\,v}{k} + v^2 = o$, folglich $\left(2\,c - \frac{B\,c}{k} - 2\,v\right)V - v = o.$

Demnach haben wir $v^2 + 2\,v\,V = 2\,c\,V - \frac{B\,c\,V}{k}$ folglich $v^2 + 2\,v\,V + V^2 =$ $V^2 + 2\,c\,V + c^2 - c^2 - \frac{B\,c\,V}{k}$. Wird beiderseits die Quadratwurzel gezogen, so erhalten wir:

$v + V = V + c - \frac{c^2}{2\,(V + c)}\left(1 + \frac{B\,V}{k\,c}\right)$ beinahe, folglich

$v = c - \frac{c^2}{2\,(V + c)}\left(1 + \frac{B\,V}{k\,c}\right)$. Setzen wir an die Stelle von V den oben gefundenen Werth $V = 2\,c - \frac{B\,c}{k}$, so ist $v = c - \frac{c}{2\left(3 - \frac{B}{k}\right)}\left(1 + \frac{2B}{k}\right)$, folglich mit Hinweglassung der höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ ist: $\frac{v}{c} = 1 - \frac{1}{6}\left\{\frac{1 + \frac{2\,B}{k}}{1 - \frac{B}{3\,k}}\right\} = \frac{5}{6} - \frac{7\,B}{18\,k} = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{7\,B}{15\,k}\right).$

man von dem Effekte der ununterbrochenen Tragung der Lasten $\left(\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}(k-B)\right)$ (§. 41.) zwei Drittheile nimmt.

§. 47.

Wenn für den Transport eines Haufens Getreide, Obst u. dgl., welcher auf die Entfernung E von Menschen oder Thieren getragen werden soll, ein Anschlag über die hiezu erforderlichen Träger und ihre Kosten gefordert wird, so lässt sich diess mit Hülfe der Gleichung $nQ = \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}\left(k-B\right)\frac{2}{3}$ sehr leicht beantworten. Das Gewicht der gesammten Last, welche transportirt werden soll, sey $= M$, und die hiezu erforderliche Anzahl Träger, welche die Last in einem Tage an Ort und Stelle bringen $= N$, so ist offenbar $N \times nQ = M$, demnach die Anzahl der Arbeiter $N = \frac{M}{nQ}$. Wenn nun ein Arbeiter täglich den Taglohn p erhält, so sind die gesammten Transportkosten $= Np = \frac{Mp}{nQ} = \frac{M\,.\,p\,.\,1{,}5\,.\,E}{3600\,.\,t\,.\,c\,(k-B)}$.

Beispiel. Es soll ein Haufen Obst aus einem Garten in die Wohnung des Inhabers, welche 200 Klafter vom Garten entfernt ist, getragen werden. Ein Tragkorb wiegt 4,5 ℔ und man hat von den Arbeitern, welche hiebei verwendet werden sollen, die Erfahrung eingehohlt, dass sie im Stande sind, täglich 30 ℔ auf eine Entfernung von 3 N. Oe. Meilen zu tragen.

Nach diesen gegebenen Grössen ist die Last, welche ein Arbeiter täglich an Ort und Stelle zu bringen im Stande ist: $nQ = \frac{3600\,.\,t\,.\,c\,(k-B)}{1{,}5\,.\,E} = \frac{12000\,(30-4{,}5)}{1{,}5\,.\,200} = 1020$ ℔ $= 10$ Zentner 20 ℔.

Es kommt demnach für 10 Zentner 20 ℔ ein Taglohn p zu entrichten, folglich, wenn das Gewicht des gesammten Obstes, (das nach Strichen oder nach Zentnern gemessen wird) in unserem Falle 200 Strich oder 225 Zentner beträgt, so werden 22 Arbeiter im Stande seyn, diese ganze Last in einem Tage an Ort und Stelle zu bringen. Wäre nun der Taglohn eines Arbeiters $p = 15$ kr., so würden die gesammten Tragungskosten auf 5 fl. 30 kr. anzuschlagen seyn.

Gegen diesen Betrag kann nämlich die verlangte Arbeit in Akkord gegeben, und übrigens den Arbeitern frei gelassen werden, welche Last sie in ihre Tragkörbe nehmen und mit welcher Geschwindigkeit sie gehen, oder wie viel Gänge sie in einem Tage verrichten wollen. Es ist aber ihrem eigenen Vortheile gemäss, sich bei der Bemessung der Ladung und der Anzahl Gänge an diejenigen Werthe zu halten, welche die Rechnung als die vortheilhaftesten angibt, weil sonst die Arbeiter entweder durch die zu grosse auf sich genommene Belastung, oder bei geringerer Belastung durch die nöthige grössere Geschwindigkeit zu sehr ermüden, und in beiden Fällen den gehofften Verdienst nicht zu finden im Stande seyn würden.

§. 48.

Da die bisherigen Rechnungen nur Resultate liefern, welche dem Zwecke nahe kommen, und hauptsächlich nur desshalb aufgestellt wurden, um solche Arbeiten mit einem

schnellen Uiberblicke zu beurtheilen und K o s t e n a n s c h l ä g e z u e n t w e r f e n, über welche mit den Arbeitern noch verhandelt werden kann, so wird es unsern Lesern nicht unangenehm seyn, bei der schwierigen Entwicklung der Rechnungsformeln, mit welcher die genaue Auflösung dieser Aufgabe auf dem analytischen Wege verbunden ist, hier noch eine Anweisung zu finden, wie solche Rechnungen mit aller erwünschten Genauigkeit auf eine bloss elementare Art und ohne besondere Kunstgriffe der höhern Analysis durchgeführt werden können.

Die Methode, eine solche Rechnung auf diese Weise zu führen, besteht in der stuffenweisen Berechnung folgender 6 Gleichungen.

Man nimmt, wenn das Gewicht des Traggefässes (B) sowohl, als die mittlere Kraft des Trägers (k) gegeben ist, für $\frac{v}{c}$ verschiedene Werthe an, setzt diese sowohl gegebenen, als angenommenen Werthe in die Gleichung $\frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k\left(2 - \frac{v}{c}\right)}$ (I.), und bestimmt sich daraus $\frac{z}{t}$. Diesen für $\frac{z}{t}$ gefundenen Werth setzt man in die Gleichung $\frac{V}{c} = 2 - \frac{B}{k\left(2 - \frac{z}{t}\right)}$ (II.), und bestimmt sich daraus $\frac{V}{c}$.

Durch die Substitution dieser Werthe erhält man für jeden angenommenen Werth von $\frac{v}{c}$ die Zeit eines Hinganges mit der Last $\left(\frac{E}{v}\right)$ und die Zeit eines Rückganges ohne Last $\left(\frac{E}{V}\right)$. Die Summe beider Zeiten gibt die Zeit einer Tracht $\frac{E}{v} + \frac{E}{V}$ (III.).

Dividirt man die Arbeitszeit des ganzen Tages (3600 . z) durch die Zeit einer Tracht, so erhält man die Anzahl der Trachten in einem Tage $n = \frac{3600 \,.\, z\,.}{\frac{E}{v} + \frac{E}{V}}$ (IV.)

Die Ladung, die der Träger auf einmal zu nehmen hat, ergibt sich aus der Gleichung $Q = k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\}$ (V.). Wird diese Last Q mit der Anzahl der Trachten n multiplicirt, so ist die in einem Tage an Ort und Stelle gebrachte Last oder der Effekt $= n \,.\, Q$ (VI.)

Die Vergleichung dieser Resultate wird sodann v o n s e l b s t z e i g e n, bei welchem Verhältnisse von $\frac{v}{c}$ der Effect der grösste ist, wie viel in diesem Falle geladen werden muss, und wie viel Trachten in einem Tage zu machen sind.

Ein B e i s p i e l wird diese Verfahrungsart deutlicher machen.

Es sey $\frac{B}{k} = 0{,}15$ d. h. das Gewicht des Traggefässes betrage 15 Prozente der mittlern Kraft. Nimmt man $\frac{v}{c} = 0{,}8$ an, so ist: $\frac{z}{t} = 1 - \frac{0{,}15}{2\,(2 - 0{,}8)} = 0{,}9375$;

$$\frac{V}{c} = 2 - \frac{0{,}15}{2 - 0{,}9375} = 1{,}8588;$$

die Zeit eines Hinganges $= \frac{E}{v} = \frac{E}{c \,.\, 0{,}8} = 1{,}2500 \,.\, \frac{E}{c}$;

die Zeit eines Rückganges $= \frac{E}{V} = \frac{E}{c \,.\, 1{,}8588} = 0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$; daher

die Zeit einer Tracht $= 1{,}2500 \,.\, \frac{E}{c} + 0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c} = 1{,}7880 \,\frac{E}{c}$;

die Zahl der Trachten in einem Tage

$$\text{oder } n = \frac{3600 \,.\, z}{\frac{E}{v} + \frac{E}{V}} = \frac{3600 \,.\, t \,.\, \frac{z}{t}}{1{,}7880 \,.\, \frac{E}{c}} = \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, 0{,}9375}{E \,.\, 1{,}7880} = 0{,}5243 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E};$$

die Ladung $Q = k \left\{ (2 - 0{,}8)(2 - 0{,}9375) - 0{,}15 \right\} = 1{,}125 \,.\, k$;

und der Effekt $n\,Q = \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E} \,.\, 0{,}5243 \,.\, 1{,}125\, k = 0{,}58984 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$.

Wird $\frac{v}{c} = 0{,}79$ und $0{,}78$ u. s. w. angenommen, und die Berechnung auf die angeführte Weise fortgesetzt, so erhält man folgende tabellarische Übersicht:

$\frac{v}{c}$	$\frac{z}{t}$	Zeit eines Ganges mit der Last $\frac{E}{v}$	Zeit eines Ganges ohne Last $\frac{E}{V}$	Ganze Zeit einer Tracht $\frac{E}{v} + \frac{E}{V}$	Anzahl Trachten in einem Tage n	Jedesmalige Ladung Q	Die in einem Tage an Ort und Stelle gebrachte Last oder der Effekt $n\,.\,Q$
0,80	0,9375	$1{,}2500 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}7880 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5243 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1250 \,.\, k$	$0{,}58984 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,79	0,9380	$1{,}2658 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8038 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5200 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1350 \,.\, k$	$0{,}59020 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,78	0,9385	$1{,}2821 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8201 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5156 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1450 \,.\, k$	$0{,}59036 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,77	0,9390	$1{,}2987 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8367 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5112 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1550 \,.\, k$	$0{,}59044 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,76	0,9395	$1{,}3158 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8538 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5068 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1650 \,.\, k$	$0{,}59042 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,75	0,9400	$1{,}3333 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8713 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5023 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1750 \,.\, k$	$0{,}59020 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$
0,74	0,9405	$1{,}3514 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}5380 \,.\, \frac{E}{c}$	$1{,}8894 \,.\, \frac{E}{c}$	$0{,}4978 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$	$1{,}1850 \,.\, k$	$0{,}58939 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, k}{E}$

Vorstehende Tabelle zeigt, dass bei der Annahme von $\frac{B}{k} = 0{,}15$ der Träger am meisten an Ort und Stelle bringt, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}77 \,.\, c$, die Zeit, welche er täglich auf die Arbeit verwendet $= 0{,}939 \,.\, t$, die jedesmalige Ladung $= 1{,}155 \,.\, k$ und die Anzahl Trachten in einem Tage $= 0{,}5112 \,.\, \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{E}$ ist.

Um zu zeigen, dass diese Rechnung wirklich genauere Resultate gibt, als wir nach der bereits aufgestellten Formel §. 47. erhielten, wollen wir das daselbst angeführte Beispiel noch einmal nach den durch die vorstehende Staffelrechnung gefundenen vortheilhaftesten Verhältnissen berechnen.

Es war in diesem Beispiele $3600 . t . c = 12000$ Klafter, $E = 200$ Klafter, $k = 30$ ℔, $B = 4{,}5$ ℔, also der Effekt in einem Tage 1020 ℔. Nach der vorstehenden Tabelle beträgt aber der grösste Effekt: $\frac{12000}{200} . 30 . 0{,}59044 = 1063$ ℔. Man sieht daraus, dass, wenn der Frachtlohn für die tägliche Fracht nach der Formel $\frac{3600 . t . c . (k - B)}{1{,}5 . E}$, §. 47. in Anschlag gebracht wird, der Arbeiter, wenn er sich nach der genauern Rechnung benimmt, den Vortheil finden könne, statt 1020 ℔ eine Last von 1063 ℔ an Ort und Stelle zu bringen, also $4{,}2$ Prozente mehr zu verdienen.

Wollte der Arbeiter, so wie es meistens zu geschehen pflegt, um seine Arbeit schneller zu vollenden, eine grössere Ladung in das Traggefäss nehmen, so würde derselbe (wie bereits oben §. 47. gezeigt worden), mit dieser grösseren Last einen langsamern Gang annehmen müssen, und da das menschliche Kraftvermögen von der Art ist, dass die Folgen der verminderten Geschwindigkeit durch die grössere Ladung nicht ersetzt werden können, so wird sich aus der hieraus ergebenden Verminderung der täglichen Anzahl Trachten eine viel bedeutendere Verminderung für den Effekt oder für die an demselben Tage an Ort und Stelle gebrachte Last ergeben. Wollte der Träger im Gegentheile eine grössere Geschwindigkeit anwenden, sonach einen grössern Verdienst aus der Vermehrung der Trachten erwarten, so würde derselbe dagegen eine viel kleinere Last bei jedem Gange zu tragen im Stande seyn, folglich in beiden Fällen, obgleich mit grösserer Anstrengung, doch seine Hoffnung eines grössern Verdienstes getäuscht finden.

§. 49.

Da überhaupt das tägliche Lasttragen für die menschlichen Kräfte zu beschwerlich und in jeder Hinsicht kostbarer ist, als das Verführen mit Wägen, so werden die Menschen zu solchen Arbeiten gewöhnlich nur auf sehr kurze Strecken, oder wenn die Entfernungen grösser sind, nur zum Tragen einiger Briefe oder anderer geringer Lasten verwendet. Weil aber ähnliche Rechnungen, wie die hier angeführten, auch bei der Verführung der Lasten auf Karren und Wägen und bei allen Maschinen, mit welchen z. B. Baumaterialien auf die obern Stockwerke der Gebäude aufgezogen, oder Erze aus tiefen Bergschachten zu Tage gefördert werden, vorkommen, und die zweckmässige Anordnung solcher Maschinenarbeiten von der grössten Wichtigkeit ist; so hat man die Resultate von mehreren solchen Rechnungen über die vortheilhaftesten Verhältnisse der Geschwindigkeit und Arbeitszeit in der folgenden Tabelle zu der Absicht zusammengestellt, um bei künftigen ähnlichen Arbeiten die vortheilhaftesten Verhältnisse der Maschinenbestandtheile hiernach bestimmen und auch genaue Voranschläge über ihre Leistungen hieraus ableiten zu können.

T a b e l l e

über die vortheilhaftesten Verhältnisse für das Fortschaffen der Lasten mit Rücksicht auf das Gewicht der Traggefässe, Schubkarren, Tonnen, Wägen u. s. w.

$\frac{B}{k}$	Vortheilhafteste Verhältnisse für $\frac{v}{c}$	Vortheilhafteste Verhältnisse für $\frac{z}{t}$	Zeit eines Hinganges $\frac{E}{v}$	Zeit eines Rückganges $\frac{E}{V}$	Ganze Zeit einer Tracht $\frac{E}{v}+\frac{E}{V}$	Anzahl Trachten in einem Tage n	Vortheilhaftest-Ladung Q	Der grösste Effekt in einem Tage $n\,Q$
0,00	0,830	1,0000	$1{,}2048\,\frac{E}{c}$	$0{,}5000\,\frac{E}{c}$	$1{,}7048\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}5866\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1700\,.\,k$	$0{,}6863\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,05	0,810	0,9790	$1{,}2346\,\frac{E}{c}$	$0{,}5126\,\frac{E}{c}$	$1{,}7472\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}5603\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1650\,.\,k$	$0{,}6527\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,10	0,790	0,9587	$1{,}2658\,\frac{E}{c}$	$0{,}5252\,\frac{E}{c}$	$1{,}7910\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}5353\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1600\,.\,k$	$0{,}6209\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,15	0,770	0,9390	$1{,}2987\,\frac{E}{c}$	$0{,}5380\,\frac{E}{c}$	$1{,}8367\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}5112\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1550\,.\,k$	$0{,}5904\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,20	0,750	0,9200	$1{,}3333\,\frac{E}{c}$	$0{,}5510\,\frac{E}{c}$	$1{,}8843\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4882\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1500\,.\,k$	$0{,}5614\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,25	0,735	0,9012	$1{,}3605\,\frac{E}{c}$	$0{,}5642\,\frac{E}{c}$	$1{,}9247\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4682\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1400\,.\,k$	$0{,}5337\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,30	0,720	0,8828	$1{,}3889\,\frac{E}{c}$	$0{,}5775\,\frac{E}{c}$	$1{,}9664\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4439\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1300\,.\,k$	$0{,}5073\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
$\frac{1}{3}$	0,705	0,8713	$1{,}4184\,\frac{E}{c}$	$0{,}5866\,\frac{E}{c}$	$2{,}0050\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4346\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1283\,.\,k$	$0{,}4904\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,35	0,700	0,8654	$1{,}4286\,\frac{E}{c}$	$0{,}5912\,\frac{E}{c}$	$2{,}0198\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4285\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1250\,.\,k$	$0{,}4821\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,40	0,690	0,8473	$1{,}4493\,\frac{E}{c}$	$0{,}6050\,\frac{E}{c}$	$2{,}0543\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}4125\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1100\,.\,k$	$0{,}4579\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,45	0,675	0,8302	$1{,}4815\,\frac{E}{c}$	$0{,}6191\,\frac{E}{c}$	$2{,}1006\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}3952\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}1000\,.\,k$	$0{,}4347\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$
0,50	0,655	0,8141	$1{,}5267\,\frac{E}{c}$	$0{,}6336\,\frac{E}{c}$	$2{,}1603\cdot\frac{E}{c}$	$0{,}3768\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{E}$	$1{,}0950\,.\,k$	$0{,}4126\cdot\frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,k}{E}$

Um den Gebrauch dieser Tabelle deutlich zu zeigen, folgt hier ein **Beispiel.** Auf eine Entfernung von 50 Klaftern sollen mittelst 5 ℔. schweren Traggefässen 1200 N. Oe. Metzen Getreide, wovon der Metzen 76 ℔. wiegt, von mittelmässig starken Menschen

getragen werden. Dieser Fall kann vorkommen, wenn Getreide von Taglöhnern aus dem ebenerdigen Geschosse eines Speichers (Schüttkastens) an das Ufer eines Flusses getragen, und dort in Schiffe geladen wird. Es frägt sich um die Kosten des Transportes und um die vortheilhafteste Einrichtung der Arbeit.

Das Gewicht der gesammten fortzuschaffenden Last beträgt 1200 . 76 = 91200 ℔. Da für diesen Fall k = 25 ℔, B = 5 ℔, folglich $\frac{B}{k} = 0{,}2$ ist, so ist der obigen Tabelle gemäss die grösste Last, die der Arbeiter in einem Tage an Ort und Stelle bringen kann $= \frac{3600 . t . c . k}{E} \cdot 0{,}5614 = \frac{3600 . 8 . 2{,}5 . 25}{50 . 6} . 0{,}5614 = 3368{,}4$ ℔, die vortheilhafteste Ladung $= 1{,}15 . 25 = 28\frac{3}{4}$ ℔ und die Anzahl Trachten in einem Tage $= \frac{3600 . t . c}{E} \cdot 0{,}4882 = \frac{3600 . 8 . 2{,}5}{50 . 6} \cdot 0{,}4882 = 117{,}17$. Da aber 117,17 Gänge nicht geleistet werden können, so nehme man 117 Gänge an, und suche sich aus der Gleichung $117 . Q = 3368{,}4$ die jedesmalige Ladung, welche $Q = 28{,}80$ ℔ beträgt. Da ein Arbeiter in einem Tage 3368,4 ℔ auf die Entfernung von 50 Klaftern trägt, und dafür den Taglohn p erhält, so ist die Anzahl der für die Tragung der gesammten Last zu entrichtenden Taglöhne $= \frac{91200}{3368{,}4} = 27{,}08$; es werden sonach die Kosten dieser Arbeit auf $27{,}08 . p$ anzuschlagen seyn.

Beträgt nun z. B. der Taglohn eines mittelmässig starken, oder solchen Arbeiters, welcher täglich nur 25 ℔ auf eine Entfernung von 3 Nied. Oesterr. Meilen tragen kann, p = 15 kr., so sind die Kosten des Transportes von 1200 Metzen Getreide auf 50 Klafter Entfernung 6 fl. 46 kr. Wären die Arbeiter stärker, und im Stande, so wie das Militär täglich 30 ℔ auf eine Entfernung von 4 N. Oesterr. Meilen oder 16000 Klafter zu tragen, so wäre der obigen Tabelle gemäss die Last, welche ein solcher Arbeiter in einem Tage auf dieselbe Entfernung E = 50 Klafter tragen kann,

$$n\,Q = \frac{3600 . t . c . k}{E} \cdot 0{,}5614 = \frac{16000 . 30}{50} \cdot 0{,}5614 = 5389{,}44 \text{ ℔}.$$

Demnach die Anzahl der erforderlichen Taglöhne $n = \frac{91200}{5389{,}44} = 17$. Beträgt nun der Taglohn eines solchen stärkern Arbeiters z. B. 20 kr., so machen die ganzen Transportskosten 5 fl. 40 kr. aus. Diese Kosten sind um 1 fl. 6 kr. geringer, als im ersten Falle; es ist daher hier vortheilhafter, sich der stärkern Menschen ungeachtet ihres um ein Drittheil höhern Taglohns (gegen mittelstarke Arbeiter) zu bedienen. Wären aber diese stärkern Menschen mit 24 kr. täglich zu bezahlen, so würden die Tragungskosten 6 fl. 48 kr. betragen, also beinahe eben so hoch als mit Arbeitern von mittlerer Stärke zu stehen kommen. Man ersieht hieraus, wie solche Arbeiten in jedem Falle angeschlagen und in Akkord gegeben werden können.

§. 50.

Hiemit wären nun die wichtigsten Fragen über die Verwendung der menschlichen Kräfte bei Arbeiten, welche aus freier Hand oder ohne Beihülfe eines Instrumentes

oder einer Maschine gemacht werden, und somit der Gegenstand des ersten Kapitels ganz abgehandelt *). Die Rechnungen über alle diese Aufgaben haben uns das allgemeine Resultat geliefert, dass die grösste Wirkung oder das grösstmöglichste Arbeitsprodukt nur in dem Falle erreicht wird, wenn sowohl die Geschwindigkeit des Arbeiters v, als auch seine hiebei verwendeten Arbeitsstunden z ihrer mittlern Grösse c und t gleich oder doch möglichst nahe kommen, und dass im Gegentheile die täglichen Arbeitsprodukte um so kleiner ausfallen, je mehr v und z von ihrer mittlern Grösse abweichen. Da dieses Resultat, wie wir später sehen werden, nicht

*) Bevor wir dieses Kapitel über die Grösse der thierischen Kräfte und ihre zweckmässigste Verwendung schliessen, wollen wir noch einen Einwurf beleuchten, welcher gegen die Richtigkeit der angegebenen Kraftformel, vorzüglich in Hinsicht auf ihre beiden Endpunkte nicht ohne Grund gemacht worden ist. Wir haben bereits oben bemerkt, dass ein Ringer den andern zu heben und zu Boden zu werfen vermag, auch ist bekannt, dass Knaben ihre Kräfte daran zu üben pflegen, indem einer den andern vom Boden aufhebt, und auf eine kurze Entfernung trägt. Da nun die mittlern Kräfte der schwächsten und stärksten Arbeiter auf 20 bis 30 Pfunde, und dagegen die Gewichte ihrer Körper auf 100 bis 150 Pfunde angeschlagen werden, so folgt hieraus, dass die grösste Kraft der Menschen nicht viermal (wie §. 20.), sondern fünfmal so gross, als ihre mittlere Kraft angenommen werden könne. Auf gleiche Art hat man hinsichtlich der grössten Geschwindigkeit bemerkt, dass Arbeiter, welche eine ihrer mittlern Kraft gleichkommende Last tragen, und mit derselben 3 bis 4 Meilen täglich zurücklegen, bei ihrer freien Bewegung den vierfachen Raum von 12 bis 16 Meilen (§. 20 und 40) zu gross finden, und gewöhnlich nur beiläufig 8 oder 12 Meilen oder ⅔ dieses berechneten Raumes zurückzulegen im Stande sind.

Um die Folgen dieser Bemerkungen für unsere Rechnung über die wirksamste Verwendung der menschlichen Kräfte zu würdigen, wollen wir vorläufig zu unserer Kraftformel noch so viele Glieder hinzufügen, als nöthig sind, um alle Erfahrungen, welche über die mittlere und grösste Kraft, Geschwindigkeit und Arbeitszeit gemacht worden, mit derselben in Uibereinstimmung zu bringen. Zu dieser Absicht sey die Kraft eines Arbeiters allgemein:

$$K = k\left\{1 + 1 - \frac{v}{c} + M\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 + N\left(1 - \frac{v}{c}\right)^3 \ldots\right\}\left\{1 + 1 - \frac{z}{t} + M\left(1 - \frac{z}{t}\right)^2 + N\left(1 - \frac{z}{t}\right)^3 \ldots\right\}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\frac{v}{c} = 1 = \frac{z}{t}$, so gibt diese Formel die mittlere Kraft $K = k$, so wie es den angeführten Begriffen von mittlerer Kraft, Zeit und Geschwindigkeit (k, t und c) gemäss ist. Da die grösste Kraft nur auf eine kurze Zeit und ohne Anwendung einer merklichen Geschwindigkeit (oder nur bei z und $v = 0$) statt finden kann, so muss diese letztere Kraftformel für denselben Fall die aus Erfahrung bekannte grösste Kraft (oder nach der obigen Bemerkung 5 k) geben; wir erhalten demnach für diesen Fall, $k\,(1 + 1 + M + N)^2 = 5\,k$, folglich $2 + M + N = \sqrt{5} = \frac{9}{4}$ beinahe, sonach $M + N = \frac{1}{4}$. Für den freien Gang, wenn der Arbeiter keine Last trägt, oder wenn $K = 0$ ist, müssen wir an die Stelle von $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ diejenigen Werthe setzen, welche abermals den hierüber gemachten Erfahrungen entsprechen. Da die oben gefundene Zahl 2 hiezu zu gross ist, so wollen wir z. B. $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \frac{5}{3}$ setzen, welches $v = \frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 3} = 5{,}55$ Fuss oder $11\frac{1}{9}$ Meilen in $13\frac{1}{3}$ Stunden gibt; dadurch erhalten wir

$$1 + 1 - \frac{5}{3} + M\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + N\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}M - \frac{8}{27}N = 0,$$ demnach ist

$N - \frac{3}{2}M = \frac{9}{8}$. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen $N + M = \frac{1}{4}$ folgt

nur beim Tragen, sondern auch beim Ziehen oder Führen der Lasten auf Wägen, und auch bei allen Maschinen, welche von menschlichen oder thierischen Kräften in Bewegung gesetzt werden, statt findet: so ergibt sich hieraus sowohl die Wichtigkeit der angegebenen Kraftformel, als auch die Nothwendigkeit sich mit den Rechnungsmethoden, woraus diese Resultate geflossen sind, vollkommen bekannt zu machen, damit selbe auch bei künftigen Rechnungen über Maschinenarbeiten angewendet, und über die hieraus folgenden Regeln für den Bau der Maschinen und ihre Betreibung durch menschliche oder thierische Kräfte nicht nur die vollkommenste Uiberzeugung, son-

$-\frac{5}{2}M=\frac{7}{8}$, demnach ist $M=-\frac{7}{20}$ und $N=\frac{1}{4}+\frac{7}{20}=\frac{3}{5}$. Dieselben Werthe für M und N erfolgen aus der zweiten Gleichung, wo $\frac{z}{t}=\frac{5}{3}$ gesetzt wird. Wäre aber das grösste $\frac{z}{t}$ dem grössten $\frac{v}{c}$ nicht gleich, so müssten wir zur angeführten Kraftformel noch ein Glied hinzusetzen oder

$$K=k\left\{1+1-\frac{v}{c}+M\left(1-\frac{v}{c}\right)^2+N\left(1-\frac{v}{c}\right)^3+P\left(1-\frac{v}{c}\right)^4\right\}$$
$$\left\{1+1-\frac{z}{t}+M\left(1-\frac{z}{t}\right)^2+N\left(1-\frac{z}{t}\right)^3+P\left(1-\frac{z}{t}\right)^4\right\}$$ setzen;

demnach würde der Fall $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}=0$ eine Gleichung von der Form $2+M+N+P=\sqrt{5}$ oder $M+N+P=\frac{1}{4}$ geben und das grösste $\frac{v}{c}=\frac{5}{3}$ gäbe die Gleichung $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}M-\frac{8}{27}N+\frac{16}{81}P=0$. Wäre nun z. B. das grösste $\frac{z}{t}$ nur $=\frac{3}{2}$, so würden wir noch die Gleichung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}M-\frac{1}{8}N+\frac{1}{16}P=0$ erhalten und aus diesen drei Gleichungen die Grössen M, N und P so bestimmen können, wie es bei der angenommenen Gleichheit der Verhältnisse $\frac{v}{c}=\frac{z}{t}=\frac{5}{3}$ bloss für die Grössen M und N der Fall war. Da statt der angenommenen Verhältnisszahlen $\frac{K}{k}=5$, $\frac{v}{c}=\frac{5}{3}$ und $\frac{z}{t}=\frac{3}{2}$ noch andere Zahlen, welche den Erfahrungen mehr entsprechen, angenommen werden können, so ist hieraus ersichtlich, dass die angeführte allgemeine Gleichung für die Kraft der Menschen oder Thiere allen Forderungen entsprechen, und durch gehörige Bestimmung der Grössen M, N, P mit allen Erfahrungen über diese Kräfte in Uibereinstimmung gebracht werden könne. Wir wollen uns demnach derselben in der angeführten allgemeinsten Form bedienen, und unter den bisher berechneten Aufgaben nur die erste §. 37, wo nämlich der grösste Lohn zu bestimmen war, den sich ein Arbeiter verdienen kann, wenn der Lohn für das Fortschaffen eines Zentners (oder 100 ℔) auf eine Meile Wegs (24000 Fuss) gegeben ist, einer genauern Rechnung unterziehen.

Der Weg, den ein Träger täglich mit der Last K zurücklegen kann, ist nach den angeführten Erläuterungen $=3600.z.v$. Setzen wir den für einen Zentner und eine Meile bemessenen Lohn $=a$ und den Taglohn, den sich der Träger verdienen will $=p$, so gibt die Proportion $24000.100:a=3600.z.v.K:p$ den täglichen Verdienst des Arbeiters

$$p=\frac{a.3600.z.v.K}{24000.100}=\frac{a.3600.t.c.k}{24000.100}.\frac{z}{t}.\frac{v}{c}\left\{1+1-\frac{v}{c}+M\left(1-\frac{v}{c}\right)^2+N\left(1-\frac{v}{c}\right)^3+P\left(1-\frac{v}{c}\right)^4\right\}$$
$$\left\{1+1-\frac{z}{t}+M\left(1-\frac{z}{t}\right)^2+N\left(1-\frac{z}{t}\right)^3+P\left(1-\frac{z}{t}\right)^4\right\}.$$

dern auch in praktischen Fällen für ihre richtige Anwendung die nöthige Sicherheit erlangt werden möge.

Uibrigens ist hier noch zu erinnern, dass die Regeln, welche wir über das Tragen von Lasten aufgestellt und durch mehrere Beispiele §. 35 bis §. 47. für besondere Fälle angegeben haben, den bisherigen in der Ausübung gebrauchten Verfahrungsarten nicht immer gleich kommen. Wenn nämlich eine Last auf eine kürzere Entfernung z. B. auf 50 Klafter, wie §. 49 zu tragen ist, wird gewöhnlich die Einrichtung so ge-

Zur Abkürzung der Rechnung wollen wir $1 - \frac{v}{c} = u$ und $1 - \frac{z}{t} = x$ setzen, so ist, wegen $\frac{v}{c} = 1 - u$ und $\frac{z}{t} = 1 - x$ der tägliche Verdienst des Trägers

$$p = \frac{a.3600.t.c.k}{24000.100}\left(1-x\right)\left(1-u\right)\left(1+x+Mx^2+Nx^3+Px^4\right)\left(1+u+Mu^2+Nu^3+Pu^4\right)$$

Dieser Lohn wird also am grössten, wenn $(1-u)(1+u+Mu^2+Nu^3+Pu^4) =$ $= 1 + (M-1)u^2 + (N-M)u^3 + (P-N)u^4 - Pu^5$ ein Maximum ist. Diess geschieht, wenn die erste abgeleitete Funktion oder der Differentialkoeffizient $2(M-1)u + 3(N-M).u^2 + 4(P-N).u^3 - 5.Pu^4 = 0$ ist. Diese Gleichung ist ein Produkt aus $+u\left\{2(M-1) + 3(N-M).u + 4(P-N)u^2 - 5P.u^3\right\}$.

Der erste Faktor $u = 0$ gesetzt, gibt $1 - \frac{v}{c} = 0$, folglich für den Fall des Maximum $\frac{v}{c} = 1$, und eben so wird auch das zweite Produkt $\frac{z}{t}\left\{1 + 1 - \frac{z}{t} + M\left(1-\frac{z}{t}\right)^2 + N\left(1-\frac{z}{t}\right)^3 + P\left(1-\frac{z}{t}\right)^4\right\}$ ein Maximum, wenn $\frac{z}{t} = 1$. Der Träger verdient demnach den grössten Taglohn, wenn er nur mit der mittlern Geschwindigkeit $v = c$ geht und auf seinen Weg nur die mittlern Arbeitsstunden $z = t$ verwendet, und weil durch die Werthe $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1$ auch in der Kraftformel

$$K = k\left\{1 + 1 - \frac{v}{c} + M\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 + N\left(1-\frac{v}{c}\right)^3 + P\left(1-\frac{v}{c}\right)^4\right\}$$
$$\left\{1 + 1 - \frac{z}{t} + M\left(1-\frac{z}{t}\right)^2 + N\left(1-\frac{z}{t}\right)^3 + P\left(1-\frac{z}{t}\right)^4\right\}$$

die Glieder mit den Faktoren M, N und P wegfallen, demnach die Last, die er zu tragen hat, nur der mittleren Kraft k gleich ist, so ist sein grösster Verdienst oder sein grösster Taglohn $a.\frac{3600.t.c.k}{24000.100}$, folglich derselbe, den wir §. 37 aus der obigen einfachern Kraftformel $K = k\left(1 + 1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + 1 - \frac{z}{t}\right) = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ abgeleitet haben.

Von den übrigen drei Faktoren, welche noch in der Gleichung $+u\left\{2(M-1) + 3(N-M).u + 4(P-N)u^2 - 5P.u^3\right\} = 0$ enthalten sind, gibt ein Faktor für u einen negativen Werth, welcher aus dem Grunde nicht zu brauchen ist, weil derselbe den Lohn zu einem Minimum machen würde. Die übrigen zwei Faktoren sind imaginär oder unmöglich. Hieraus ist zu ersehen, dass die Grössen M, N, P, deren Bestimmung von den grössten Verhältnissen $\frac{K}{k}$, $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ abhängt, weder auf die Bedingnisse zur grössten Wirksamkeit der menschlichen Kräfte, noch auf die grösste Tagesarbeit selbst einen Einfluss nehmen; und dass wir in dieser Hinsicht bei allen Aufgaben über die grösstmögliche Benützung der menschlichen oder thierischen Kräfte uns mit der einfachern Kraftformel $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ vollkommen begnügen können.

macht, dass den Trägern ein bedeutendes, ihre Kräfte sehr anstrengendes Gewicht z. B. ein Zentner Getreide, Mehl u. dgl. zu tragen gegeben wird, wie wir es in allen Fällen sehen, wo Magazine oder Speicher entleert und gefüllt werden. Die natürliche Folge hievon ist, dass die Träger kaum einige Stunden des Tages bei solchen Arbeiten aushalten können, und dass man überhaupt nur die stärksten Menschen, die dann auch weit kostspieliger sind, zu solchen Arbeiten verwenden kann.

Nach unsern aufgestellten Regeln werden bei solchen Arbeiten, die eine längere Zeit zu ihrer Ausführung erfordern, die Transportskosten am geringsten ausfallen, wenn man die Arbeiter, sie seyen nun stark oder schwach, mit jenen Geschwindigkeiten und durch jene Anzahl Stunden täglich arbeiten lässt, welche die Formeln bestimmen, und welche, wie wir nunmehr wissen, von den mittlern Werthen k, c, t nicht viel abweichen. Es ist demnach zu wünschen, dass zur Vermeidung fruchtloser Kraftverwendung und unnöthiger Auslagen, die in solchen Fällen vorzüglich bei der Landwirthschaft von Bedeutenheit zu seyn pflegen, unsere Regeln zum Maasstabe der Anordnung solcher Arbeiten angenommen oder doch denselben so nahe als möglich gebracht würden. Versuche hierüber werden zeigen, dass der Erfolg unseren Berechnungen entspricht; auch werden diese Versuche vorzüglich den Wirthschaftsbeamten die Gelegenheit gewähren, die Kräfte der Arbeiter in jeder Gegend gehörig zu schätzen und nach Maassgabe dieser Versuche auch bei andern Arbeiten zweckmässig zu verwenden.

II. Kapitel.

Statik und vortheilhafteste Verwendung der thierischen Kräfte bei einfachen Maschinen.

§. 51.

Wir haben bereits in der Einleitung (§. 4) gesagt, dass Maschinen Vorrichtungen sind, welche zur Erreichung gewisser mechanischer Zwecke ausgedacht wurden, die man ohne dieselben entweder gar nicht oder nur unvollkommen und mit grössern Schwierigkeiten zu erreichen im Stande wäre. Maschinen sind daher die materiellen Mittel, welche zur zweckmässigen Ausübung der arbeitenden Kräfte gebraucht werden.

Man theilt die Maschinen gewöhnlich in einfache und zusammengesetzte ein. Die einfachste Maschine, welche wir zuerst betrachten, ist der Hebel. Hierauf werden wir das Rad an der Welle, die Rollen und Flaschenzüge, die schiefe Fläche, die Schraube und den Keil folgen lassen. Alle diese Maschinen sind einfache Maschinen; die zusammengesetzten bestehen immer aus der Vereinigung mehrerer einfachen Maschinen und werden daher auch erst nach den einfachen abgehandelt werden.

§. 52.

Einen Hebel kann jede Stange, jeder Balken und überhaupt jeder feste Körper abgeben, wenn derselbe an einem Punkte so unterstützt wird, dass er um diesen Punkt frei gedreht, und auf solche Art als Stütz- oder Drehpunkt (Achse) für zwei oder mehrere, auf gegebenen Entfernungen vom Stützpunkte wirkende Kräfte gebraucht werden kann. Zur deutlichern Erklärung dieses Gegenstandes pflegt man in der Mechanik den mathematischen Hebel von dem physischen zu unterscheiden.

Ein mathematischer Hebel ist eine unbiegsame, nicht schwere Linie AB, an deren beiden Endpunkten zwei Kräfte P und Q angebracht sind, welche einander um den unbeweglichen Punkt C entgegen wirken. Der feste Punkt C wird der Unterstützungspunkt, die Unterlage oder auch der Ruhepunkt genannt, weil dieser Punkt bei der Drehung oder Bewegung als Achse des Hebels in Ruhe bleibt; CA und CB heisst man die Hebelsarme. Fig. 3. Tab. 1.

An einem jeden Hebel sind demnach vorzüglich drei Punkte zu bemerken, nämlich der Unterstützungspunkt C und die beiden Punkte B und A, an deren einem P als Kraft und an dem andern Q als Last wirkt.

Wenn der Hebel nebst den vorigen Eigenschaften auch noch schwer ist, so heisst er ein physischer oder materieller Hebel; ein solcher ist daher jede Stange oder jeder Hebebaum, der zum Heben grosser Lasten, zum Fortschaffen grosser Steine, zum Ausreissen von Baumwurzeln u. dgl. m. gebraucht wird.

§. 53.

Man theilt die Hebel in Hebel der ersten und Hebel der zweiten Art ein.

Fig. 3. Tab. 1. Wenn bei einem Hebel der Unterstützungspunkt C zwischen der Kraft P und der Last Q sich befindet, so nennt man diess einen Hebel der ersten Art oder Druckhebel. Zu den Hebeln der ersten Art gehören: die gemeine oder Krämerwaage, die Schnellwaage, die Scheere, die Brechstange, der Geissfuss, die Kneipzange, die Lichtscheere u. dgl.

Wenn aber die Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, und der Unterstützungspunkt sich nicht zwischen denselben, sondern ausserhalb in C befindet, so nennt man diess einen Hebel der zweiten Art. Die Ansicht dieses Hebels zeigt, Fig. 4. dass es wieder zwei Gattungen solcher Hebel gibt, da entweder die Last zwischen dem Ruhepunkte und der Kraft, wie Fig. 4. oder die Kraft zwischen dem Ruhepunkte und der Last liegt, wie Fig. 5. Den ersten nennt man einen Traghebel, den zweiten einen Fig. 5. Wurfhebel. Zur ersten Gattung gehört der Schubkarren oder die Scheibtruhe, das an einem Ende befestigte Schneidemesser, die gewöhnliche Flachsbreche, die Ruderstange an Schiffen u. s. w. Zur zweiten Gattung die Schaufel, die Sense, der Arm des menschlichen Körpers, wenn er eine Last hebt u. s. w.

§. 54.

Fig. 6. Wenn ein gleich dicker prismatischer Körper z. B. ein Balken, eine Stange oder ein Parallellopipedum genau in seiner Mitte C unterstützt wird, so ist kein Grund gedenkbar, aus welchem eine Hälfte des Balkens von der andern eben so langen und eben so schweren Hälfte überwältigt und zum Sinken gebracht werden könnte; auch zeigt die Erfahrung, dass unter solchen Umständen das sich selbst überlassene Parallellopipedum ohne Mittheilung einer Bewegung in Ruhe bleibt, oder dass nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche beide Hälften einander aufwiegen. Hieraus ergibt sich vorerst der Begriff vom Schwerpunkte. Weil nämlich in dieser ruhigen Lage alle Theile des ganzen Körpers mit einander im Gleichgewichte sind, und das Ganze nur von einer in dem Unterstützungspunkte angebrachten Kraft aufrecht erhalten wird, so können wir uns den Stand des Körpers so vorstellen, als ob sein ganzes Gewicht in diesem Punkte vereinigt wäre. Der Schwerpunkt eines Körpers ist sonach derjenige Punkt, durch dessen Unterstützung der ganze Körper in Ruhe, oder in einer solchen Stellung erhalten wird, dass kein Theil den andern in Bewegung setzen kann. Eine kreisrunde gleich dicke Scheibe hat daher ihren Schwerpunkt im Mittelpunkte, wenn nämlich die runde Scheibe aus einer Materie von gleicher Dichte besteht; eben so hat jedes gleich dicke Prisma und jeder Cylinder den Schwerpunkt in der Mitte seiner Länge, Höhe und Breite. Hieraus ersieht man aber auch zugleich, dass der Zustand des Gleichgewichtes um den Schwerpunkt eines Prisma oder Cylinders sich nicht nur auf den horizontalen Stand beschränke, sondern auch in jeder andern schiefen Lage statt finde, weil in einer jeden solchen Lage jedesmal zu beiden Seiten des Schwerpunktes alles gleich ist. Es folgt noch weiters, dass wenn dergleichen Körper sich in einer drehenden Bewegung um ihren Mittel- oder Schwerpunkt befinden, diese Bewegung nicht vom Körper selbst hervorgebracht worden sey und von seinen Theilen weder vermehrt noch vermindert werden kann. Ein solcher in Bewegung gesetzter Körper würde sich daher auch mit unveränderlicher Geschwindigkeit um den Schwerpunkt drehen, und diese Bewegung ohne Aufhören gleich-

förmig fortsetzen, wenn er nicht durch andere von aussen auf ihn einwirkende Kräfte, als von der Reibung, von dem Widerstande der Luft u. dgl. zur Ruhe gebracht würde. Die Lehren vom statischen Gleichgewichte gelten sonach nicht nur für den Zustand der Ruhe, sondern auch für jenen der gleichförmigen Bewegung.

§. 55.

Der Zustand des Gleichgewichtes für ein Prisma um seinen Schwerpunkt (§. 54.) ist aber nicht bloss auf die beiden einander gleichen Hälften CA und CB beschränkt, sondern auch für jeden Theil desselben in Beziehung auf alle übrigen wahr.

Es ist nämlich in diesem Zustande des Gleichgewichtes nicht bloss die Hälfte des Prisma CA mit der andern Hälfte CB, sondern auch ein jedes Stück AM mit dem Uiberreste MB gleichfalls im Gleichgewichte; denn wäre diess nicht der Fall und würde z.B. MB von einer Seite stärker als AM von der andern drücken, so würde der Balken dem Drucke des Stärkern folgen, von der einen Seite herabgedrückt und der schwächere Gegendruck der andern Seite gehoben, folglich eine Bewegung bewirkt, und auf solche Art auch die eine Hälfte des Prisma CA von der andern gleichen Hälfte CB überwältiget werden. Der Schwerpunkt des Stückes AM befindet sich aber in der Mitte D desselben und der Schwerpunkt des Stückes MB in seiner Mitte E, und wir können uns von diesen Schwerpunkten abermals denken, dass das ganze Gewicht des Stückes AM in D und von MB in E vereinigt sey, oder was eben so viel ist, wir können uns einen mathemathischen Hebel DE denken, in dessen Endpunkten D und E zwei Gewichte P und Q von derselben Schwere, welche die Stücke AM und MB besitzen, angebracht sind, welche sich daher an diesem mathematischen Hebel ebenfalls im Gleichgewichte befinden. Wir wollen nun sehen, wie sich die Entfernungen CD und CE dieser Gewichte verhalten? Fig. 7. Tab. 1. Fig. 8.

Da das Prisma nach unserer Annahme in allen Theilen eine gleichförmige Stärke und gleich schwere Materie besitzt, und da sich die Gewichte solcher Körper wie ihre Längen verhalten, so haben wir die Proportion:

$P : Q = AM : MB = \frac{AM}{2} : \frac{MB}{2}$; ferner ist $\frac{AM}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{MB}{2} = BC - BE = CE$ Fig. 7.

und $\frac{MB}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{AM}{2} = AC - AD = CD$; demnach verhält sich auch:

$P : Q = CE : CD$, d. h. ein Hebel ist dann im Gleichgewichte, wenn die an ihm angebrachten Gewichte oder Kräfte sich umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Unterstützungspunkte verhalten. Da man diese Entfernungen in der Statik Hebelsarme nennt, so lautet dieser Satz mit andern Worten: An einem Hebel ist Gleichgewicht, wenn die Kräfte oder Gewichte sich verkehrt wie ihre Hebelsarme verhalten.

§. 56.

Zur Bestättigung dieses Lehrsatzes dienet folgendes Experiment: Man nehme einen prismatischen Stab a b, der auf der scharfen Kante eines andern dreieckigen Prisma c so lange hin und her geschoben wird, bis er das Gleichgewicht hält. Ferner lege man auf diesen viereckigen Stab a b einen andern ebenfalls gleich starken, der in meh- Fig. 9.

Fig. 9. Tab. 1. rere gleich grosse Theile zerschnitten ist, z. B. in vier, als m, n, o, p, so wird der Schwerpunkt des Stabes a b sammt den zerschnittenen Theilen, wenn Alles gleich gemacht ist, sich wieder in der Mitte (oberhalb c), folglich das Ganze im Gleichgewicht befinden.

Dasselbe Gleichgewicht wird aber auch noch statt finden, wenn jeder Theil auf dem darunter befindlichen Stabe so umgedreht oder gewendet wird, dass seine Mitte noch auf der Mitte der darunter befindlichen Abtheilung zu liegen kommt, weil der Druck oder die Schwerkraft jedes Körpers auf das unterliegende Prisma unverändert bleibt, ob er sich in dieser oder jener Lage befindet, wenn nur sein Schwerpunkt nicht verrückt wird. Legt man endlich die drei Theile n, o und p auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in e zusammen, so wird dasselbe Gleichgewicht noch immer statt finden, und es werden sonach die drei Theile n, o, p auch dem einen Theil m das Gleichgewicht halten, dagegen aber die Entfernung oder der Hebelsarm des Theiles m dreimal so gross seyn, als der Hebelsarm der drei auf einander gelegten Theile n, o und p.

Fig. 10. Fig. 11.

In unserem Falle macht nämlich c e eine halbe Abtheilung und d c anderthalb Abtheilungen aus, und es verhält sich das Gewicht der drei Theile zu dem Gewichte des einen Theiles, wie die Entfernung $1\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 3 : 1$, wo also die Entfernungen vom Ruhepunkte im verkehrten Verhältnisse zu den Gewichten stehen. Da nun diess überhaupt bei jeder willkührlichen Anzahl Abtheilungen und aufeinander gelegter Theile statt findet, so wird, wenn man sich statt der einzelnen Theile Gewichte oder Kräfte vorstellt, auch allemal die Kraft zur Last sich verhalten, wie der Hebelsarm der Last zum Hebelsarme der Kraft.

§. 57.

Es leuchtet übrigens von selbst ein, dass dasselbe Gleichgewicht, welches in der horizontalen Stellung des Prisma um seinen Mittelpunkt statt findet, auch in jeder andern schiefen Lage statt finden müsse, weil auch in der schiefen Stellung, wenn nämlich der mathematische Hebel durch die Mitte des Prisma gezogen gedacht wird, alle Umstände beiderseits einander gleich sind, wie schon erinnert wurde. Eben dieser Satz gilt aber auch von den zwei Gewichten P und Q. Es kann folglich keines von beiden das andere in Bewegung setzen, oder dessen Bewegung beschleunigen. Hieraus ergibt sich, dass diese beiden Körper P und Q, welche in einer Lage des Hebels z. B. in der Lage D C E im Gleichgewichte sind, auch in jeder andern Lage z. B. D′ C E′ im Gleichgewichte seyn müssen, folglich in jeder Stellung wechselseitig einen gleichen Druck und Gegendruck gegen einander ausüben, demnach auch, falls sie in Bewegung sind, sich in keiner der übrigen Stellungen beschleunigen, und daher entweder in Ruhe seyn oder nur eine gleichförmige Bewegung haben können.

Fig. 12.

§. 58.

Aus der Proportion $P : Q = CE : CD$ folgt die Gleichung $P \cdot CD = Q \cdot CE$. Man sieht hieraus, dass das Gleichgewicht zweier an einem Hebelsarme angebrachter Kräfte durch zwei verschiedene, von einander unabhängige Dinge bewirket wird, nämlich 1stens von der Grösse der Kräfte und 2tens von der Entfernung derselben vom

Fig. 12.

Ruhepunkte, d. i. von der Grösse der Hebelsarme der Kräfte. Das Produkt aus diesen zwei Dingen bestimmt die Wirkung einer Kraft. Ein solches Produkt heisst das statische Moment. So ist hier P.C D das Moment der Kraft P und Q.C E das Moment der Kraft Q und nur gleiche Momente von Kräften halten einander das Gleichgewicht. Fig. 12. Tab. 1.

Man nennt diese Momente insbesondere statische zum Unterschiede von mechanischen Momenten, von welchen wir in der eigentlichen Mechanik noch sprechen werden. Das statische Moment eines jeden schweren Körpers ist sonach das Produkt aus dem Gewichte desselben in den Abstand seines Schwerpunktes vom Umdrehungspunkte, und es erfolgt dann an einem Hebel Gleichgewicht, wenn die statischen Momente der beiden Kräfte gleich sind.

§. 59.

Die Gleichung P. C D = Q. C E enthält vier Grössen, nämlich die zwei Kräfte P und Q und ihre Hebelsarme C D und C E. Wenn nun drei von diesen Grössen gegeben sind, so können wir hieraus die vierte unbekannte Grösse finden.

1. Beispiel. Ein Arbeiter will mittelst eines Geissfusses einen Stein von 20 Zentnern Schwere heben. Der Hebelsarm des Arbeiters C D beträgt 40 Zoll, der Hebelsarm der Last oder C E nur 2 Zoll; es frägt sich, welche Kraft der Arbeiter anwenden, oder wie gross P seyn müsse, damit der Stein mittelst des Hebels wirklich gehoben werden könne. Fig. 13.

Wenn wir die Werthe in die obige Gleichung substituiren, so ist: P . 40′ = 2000 ℔. 2″, woraus P = 100 ℔ folgt; der Arbeiter muss daher eine Kraft von 100 ℔ anwenden, oder mit dem Gewichte seines ganzen Körpers auf das Ende des Hebels wirken, wenn er hiemit den Stein von 20 Zentnern Schwere heben will.

2. Beispiel. Man erzählt, dass *Archimedes* nach der Erfindung des (§. 55) angeführten Hauptsatzes vom Hebel vor Freude ausgerufen habe, die Götter möchten ihm nur einen Hebel und einen festen Unterstützungspunkt geben, und er werde hiemit im Stande seyn, die ganze Erde zu heben. Man soll nun bestimmen, wie lang dieser Hebel seyn müsste, wenn das Gewicht des Mannes, der die Erde bewegen wollte, zu 150 ℔ und die Entfernung des Anhangpunktes der Erde bis zum Unterstützungspunkte nur mit einem Zoll in Anschlag genommen wird.

Wir wissen, dass die Erde eine kugelförmige Gestalt hat, und dass ein Grad des Aequators oder grössten Kreises um die Erde beinahe 15 deutsche Meilen Länge hat. Wir wollen der leichtern Rechnung wegen eine deutsche Meile zu 4000 Wiener Klafter anschlagen. Nach den Versuchen des englischen Physikers *Cavendish* ist die Erde beinahe viermal so schwer, als ein gleich grosser Wasserkörper, folglich wiegt ein Kubikfuss 4.56,5 = 226 ℔, wofür wir 2¼ Zentner annehmen. Demnach wird die grösste Peripherie der Erde = 15.360 = 5400 Meilen und ihr Durchmesser = 1718,874837 Meilen oder 6875499,348 Klafter betragen. Da der Kubikinhalt einer Kugel gefunden wird, wenn man den vierfachen grössten Durchschnittskreis $4\pi r^2 = \pi d^2$ mit dem dritten Theile des Halbmessers $\frac{r}{3} = \frac{d}{6}$ multiplicirt, so beträgt der Kubikinhalt des Erdkörpers, wenn man $\pi = 3{,}14159$ nimmt, 170180968597523042642 Kubikklafter, und da wir einen Kubikfuss zu 2¼ Zentner

oder eine Kubikklafter zu 486 Zentner annehmen, so beträgt das Gewicht des Erdkörpers Q 82707950738396198724012 Zentner. Dieses Gewicht Q muss mit der Entfernung von 1 Zoll multiplicirt werden, um das statische Moment Q.CE zu erhalten. Wird nun dieses Moment mit der Kraft P = 150 ℔ = 1,5 Zentner dividirt, so erhält man die gesuchte Länge des Hebelarmes der Kraft $CD = \frac{Q.CE}{P}$

= 55138633825597465816008 Zolle

= 765814358688853691889 Klafter

= 191453589672213423 Meilen, d. h.

so gross müsste die Länge des Hebels seyn, womit eine Kraft von 150 ℔ sich mit dem Gewichte der Erde um einen hinlänglich festen Unterstützungspunkt ins Gleichgewicht zu setzen im Stande seyn würde *).

§. 60.

Fig. 12. Tab. 1. Wenn nebst der Kraft P und der Last Q an einem Hebel noch die ganze Länge D E desselben bekannt ist, und gefragt wird, wohin der Unterstützungspunkt gelegt werden soll, damit die beiden Kräfte P und Q einander das Gleichgewicht halten, so dient hiezu die Proportion $P : Q = CE : CD$.

Wird hier das erste und zweite Glied addirt, so ist: $P + Q : P = CE + CD : CE$ und hieraus $CE = \frac{P.DE}{P+Q}$; eben so ist auch $P + Q : Q = CE + CD : CD$ und hieraus $CD = \frac{Q.DE}{P+Q}$. Diese zwei Gleichungen geben zur Auflösung unserer Aufgabe die

*) Mit Logarithmen wird die Rechnung auf folgende Art gemacht:

Da $d = 6875499{,}348$ so findet man $\left(\frac{\pi d^3}{6}\right)$, wenn $\pi = 3{,}1415926536$ gesetzt wird

3. log. d = 20,5119127356	
log. π = 0,4971498727	
Compl. log. 6 = 0,2218487496 — 1	
log. (des kubischen Inhaltes) = 20,2309113579;	Kubischer Inhalt in Kubikklaftern = 170181112340000000000
log. 486 = 2,6866362693	
log. Q = 22,9175476272	Q = 82708020587000000000000 Zentner
Compl. log. 1,5 = 0,8239087409 — 1	
log. C D = 22,7414563681;	C D = 55138680387000000000000 Zolle
Compl. log. 12 = 0,9208187540 — 2	
$\log. \left(\frac{CD}{12}\right) = 21{,}6622751221$	C D = 4594890032500000000000 Fuss
Compl. log. 6 = 0,2218487496 — 1	
$\log. \left(\frac{CD}{72}\right) = 20{,}8841238717$	C D = 765815005460000000000 Klafter
Compl. log. 4000 = 0,3979400087 — 4	
$\log. \frac{CD}{72 . 4000} = 17{,}2820638804$;	C D = 191453751420000000 Meilen

allgemeine Regel: Wenn zwischen zwei gegebenen Kräften der Unterstützungspunkt gesucht wird, so findet man seine Entfernung von dem einen Endpunkte des Hebels, wenn man das am entgegengesetzten Ende angebrachte Gewicht mit der ganzen Länge des Hebels multiplicirt und dieses Produkt durch die Summe beider Gewichte dividirt.

1. Beispiel. Es sey die Kraft $P = 30$ ℔, $Q = 50$ ℔ und die ganze Länge des Hebels $a = 80$ Zoll, so findet man den Hebelsarm des Gewichtes $P = \frac{50 . 80}{30 + 50} = 50$ Zoll und jenen von $Q = \frac{30 . 80}{30 + 50} = 30$ Zoll.

2. Beispiel. Dieselbe Regel dienet auch zur Bestimmung des Ortes, wohin eine Last zu hängen ist, wenn dieselbe von zwei Arbeitern an einer Stange oder einem Hebel getragen, und jedem eine verhältnissmässige Last aufgebürdet werden solle. Fig. 14. Tab. 1.

Es sey nämlich die Kraft des einen Trägers $= Q$, die Kraft des andern $= P$ und das Verhältniss der Kräfte dieser beiden Arbeiter $Q : P = 3 : 2$, oder der Träger Q sey anderthalbmal so stark, als der Träger P. Setzen wir die Länge des Hebels $D E = l$, so ist die Entfernung der Last vom stärkern Arbeiter oder

$C E = \frac{P}{P + Q} \cdot D E = \frac{2}{2 + 3} . l = \frac{2}{5} l$ und die Entfernung derselben Last vom schwächern Arbeiter oder $D C = \frac{3}{5} l$. Es muss also die Länge der Stange l oder die Entfernung der beiden Arbeiter in 5 gleiche Theile getheilt, und die Last auf den zweiten Theilungspunkt vom stärkern, und auf den dritten Theilungspunkt vom schwächern Arbeiter gelegt werden. Es sey $l = 7{,}5$ Fuss, so ist $\frac{1}{5} l = 1{,}5$ Fuss, demnach $C E = \frac{2}{5} l = 3$ Fuss und $D C = \frac{3}{5} l = 4{,}5$ Fuss. Die Last, welche beide Träger zusammen tragen sollen, sey $= 80$ ℔ $= P + Q$, so ist $P = \frac{2}{5}(P + Q) = 32$ ℔ und $Q = \frac{3}{5}(P + Q) = 48$ ℔ d. h. der schwächere Träger wird 32 ℔, der stärkere 48 ℔ tragen müssen.

§. 61.

Der oben (§. 55.) erwiesene Satz, dass sich die zwei Kräfte am Hebel im Zustande des Gleichgewichtes zu einander verkehrt wie ihre Hebelsarme verhalten, findet nicht bloss bei einem Hebel der ersten, sondern auch bei einem Hebel der zweiten Art statt.

Bei einem Hebel der ersten Art trägt offenbar der Unterstützungspunkt oder die Unterlage C die beiden Gewichte $P + Q$, indem sie von diesen beiden Gewichten gedrückt wird. Die Unterlage erleidet daher einen eben so starken Druck, als wenn das Gewicht $P + Q$ in C angebracht wäre. Denken wir uns nun von C die Unterlage weggenommen Fig. 14.
und statt derselben eine aufwärts ziehende Kraft mit der Grösse $P + Q$, so wird auch itzt noch zwischen den drei Kräften P, Q und $P + Q$ an diesem Hebel Gleichgewicht vorhanden seyn. Da nun früher $P : Q = C B : C A$ war, so folgt hieraus $P : P + Q := C B : C B + C A = C B : A B$, oder die Kraft P am Endpunkte des Hebels in A verhält sich zur Kraft $P + Q$ im Punkte C, wie die Entfernung der Kraft $P + Q$ vom dritten Punkte B zur Entfernung der Kraft P von demselben Punkte B. Wir

können uns also diesen dritten Punkt B als den Unterstützungs- oder Ruhepunkt vorstellen und haben nun einen Hebel der zweiten Art.

§. 62.

Diesen Satz kann man sich ebenfalls leicht versinnlichen. Man stelle sich wieder ein Fig. 16. Tab. 1. Prisma H G vor, welches in seiner Mitte C unterstützt ist. Man theile diess z. B. in 8 gleiche Theile, und es sey das Gewicht eines solchen Theiles = 1 ℔. Es werden demnach drei solche Theile H B = 3 ℔ = P und die übrigen fünf Theile G B = 5 ℔ = Q wiegen. Denkt man sich diese Gewichte 3 ℔ und 5 ℔ in ihren Schwerpunkten D und E befestigt, so bleibt alles im Gleichgewichte und die Unterlage trägt in der Mitte C die ganze Last des Hebels P + Q = 8 ℔ = R. Diese 8 ℔ binde man mit einem Faden an das Ende N eines gleicharmigen Hebels M N und den Punkt C an M, so wird der Faden C M mit einer gleichen Kraft R = P + Q = 8 ℔ in die Höhe gezogen. Es werden also nicht nur die Gewichte P und Q um den Unterstützungspunkt C im Gleichgewichte seyn, sondern auch die Zugkraft R in C den beiden Gewichten P und Q das Gleichgewicht halten und da sich in unserem Falle

$$R : Q \text{ oder } 8 : 5 = HG : BG = HB + BG : HG - HB = \frac{HB}{2} + \frac{BG}{2} : \frac{HG}{2} - \frac{HB}{2}$$

$$= DB + BE : HC - HD = DE : DC$$

und auf gleiche Art $R : P$ oder $8 : 3 = HG : HB = \frac{HB + BG}{2} : \frac{HG - BG}{2}$

$$= DB + BE : CG - EG = DE : CE.$$

verhält, so folgt hieraus der allgemeine Satz, dass überhaupt drei an einem Hebel angebrachte Kräfte P, Q und R (oder P + Q) einander das Gleichgewicht halten, wenn sich je zwei derselben verhalten, wie umgekehrt ihre Entfernungen von der dritten Kraft.

§. 63.

Wir wollen nun die Bedingnisse des Gleichgewichtes untersuchen, wenn an einem Fig. 17. Hebel der ersten Art drei Kräfte P, Q und R angebracht sind, welche um einen gemeinschaftlichen Unterstützungspunkt einander das Gleichgewicht halten sollen. Zur Beantwortung dieser Frage sey A O C ein mathematischer Hebel, der in O unterstützt ist; es ziehen auf der einen Seite des Unterstützungspunktes O die zwei Kräfte Q und R herab und diese sollen mit der dritten in A angebrachten Kraft P im Gleichgewichte seyn.

Man stelle sich die Kraft oder das Gewicht P in zwei Kräfte x und y zerlegt vor, d. h. man denke sich, es seyen statt P die zwei Gewichte x und y in A aufgehängt und von diesen Gewichten halte x das Gleichgewicht mit Q und y das Gleichgewicht mit R. Wir können demnach den Satz §. 58. vom einfachen Hebel anwenden, und erhalten die Gleichungen:

$$x . AO = Q . BO$$
$$y . AO = R . CO \text{ folglich,}$$

$(x + y) AO = Q . BO + R . CO$; da aber $x + y = P$ ist, so haben wir auch

$P . AO = Q . BO + R . CO$, d. h. das statische Moment des einen Gewichtes P muss der Summe der statischen Momente der beiden andern Gewichte Q und R gleich seyn.

§. 64.

Aus diesem Satze lässt sich sehr leicht eine Regel für die Bestimmung des Schwerpunktes der zwei Gewichte Q und R ableiten; wenn wir nämlich das Gewicht $P = Q + R$ setzen, so wird auch $(Q + R) AO = Q . OB + R . OC$ seyn. Wenn wir sonach den Hebelsarm AO von O nach M übertragen oder $AO = OM$ machen, so ergibt sich von selbst, dass, wenn wir in M ein Gewicht anhängen, welches der Summe der beiden Gewichte Q und R gleich ist, auch $(Q + R) OM = P . AO = Q . OB + R . OC$ seyn werde. Demnach ist $OM = \frac{Q . OB + R . OC}{Q + R}$. Da nun der Punkt M die Eigenschaft hat, dass wir in demselben die zwei Gewichte Q und R zusammenlegen können, und dadurch ein eben so grosses statisches Moment für die Umdrehung des Hebels um den Punkt O erhalten, als wenn die Gewichte Q und R, jedes an seinem Orte, nämlich Q in B und R in C den Hebel belasten, so folgt von selbst, dass eine im Punkte M angebrachte, aufwärts wirkende Kraft, welche der Summe der beiden Gewichte $Q + R$ gleich ist, den Hebel in Ruhe zu bringen, oder ein eben so vollkommenes Gleichgewicht zwischen P, R und Q herzustellen im Stande seyn werde, wie diess bei dem zuerst erklärten Hebel der Fall war, wo der gemeinschaftliche Unterstützungspunkt C (Fig. 15.) die Summe der beiden Gewichte P und Q zu tragen hatte. Fig. 17. Tab. 1.

Aus der Gleichung $(Q + R) OM = Q . OB + R . OC$ folgt $Q . OM - Q . OB = R . OC - R . OM$ oder $Q . BM = R . CM$. Hieraus ist ersichtlich, dass die Gewichte Q und R im Schwerpunkte M vereinigt, nicht nur ein eben so grosses Moment um den Punkt O hervorbringen, als sie in B und C mit ihren Hebelsarmen OB und OC gehabt haben, sondern auch, dass diese Gewichte zugleich unter sich um ihren Schwerpunkt M im Gleichgewichte stehen.

§. 65.

Mit Hülfe des im §. 63. erwiesenen Satzes können wir nun auch die Bedingnisse für das Gleichgewicht bei einem schweren oder physischen Hebel angeben. Die bisherigen Sätze beruhen nämlich auf der Voraussetzung, dass der Hebel selbst keine Schwere besitze, oder wie eine mathematische Linie betrachtet werden könne. Allein eine solche Linie bestehet nur in unserer Vorstellung, indem alle Hebel ein eigenes Gewicht haben, welches demnach noch in Rechnung genommen werden muss. Hiezu muss vorläufig nicht nur der Hebel gewogen, sondern auch der Ort seines Schwerpunktes durch Versuche oder auf andere Art ausfindig gemacht werden. Da man sich nämlich das ganze Gewicht des Hebels in seinem Schwerpunkte vereinigt denken kann, so wird das Produkt aus dem Gewichte des Hebels in die Entfernung seines Schwerpunktes vom Umdrehungspunkte sein statisches Moment geben, welches, wenn der Schwerpunkt sich auf der Seite der Kraft befindet, zum Momente der Kraft, oder wenn er sich auf der Seite der Last befindet, zum Momente der Last addirt werden muss.

Betrachten wir z. B. eine Brechstange, oder den sogenannten Geissfuss AC, der Schwerpunkt desselben sey in B, seine Entfernung vom Unterstützungspunkte sey OB und das Gewicht desselben = G, so ist im Zustande des Gleichgewichtes $Q . AO = G . BO + P . CO$. Es sey z. B. $AO = 3$ Zoll, $BO = 6$ Zoll, $OC = 36$ Fig. 18.

Zoll, P = 50 ℔ und das Gewicht des Hebels G = 12 ℔; so ist, wenn man diese Wer-
Fig. the in die gefundene Gleichung substituirt, $Q.3 = 12.6 + 50.36$, also Q = 624 ℔ d. h.
18. Tab. ein Mensch kann mit Anwendung einer Kraft von 50 ℔ am Ende dieser Brechstange eine
1. Last von 624 ℔ gewältigen. Die gefundene Gleichung $Q.AO = G.BO + P.CO$ zeigt, dass in unserem Falle das Moment des physischen Hebels dem Momente der Kraft bei der Gewältigung der Last zu Hülfe komme, dass es demnach vortheilhaft sey, **bei der Hebung grosser Lasten schwere und starke Hebel zu gebrauchen.** Will man umgekehrt bei einem physischen Hebel die nöthige Kraft P finden, wenn nämlich die Entfernung derselben vom Unterstützungspunkte, das Moment der Last und jenes des schweren Hebels gegeben ist, so ergibt sich aus $Q.AO = G.BO + P.CO$ die Kraft $P = \frac{Q.AO - G.BO}{CO}$.

Wäre in dieser Gleichung $Q.AO = G.BO$, so wäre $P = 0$, d. h. in diesem Falle stände der Hebel durch sein eigenes Gewicht G schon im Gleichgewichte mit Q.

§. 66.

Fig. 19. Wenn eine Kraft P mehr als zwei Kräften z. B. dreyen, wie Q, R und S das Gleichgewicht halten soll, so zerlege man die Kraft P in drei Theile x, y und z, wovon der erste das Gleichgewicht mit Q, der zweite mit R und der dritte mit S halten muss. Dem zufolge hat man folgende vier Gleichungen:

$$P = x + y + z$$
$$x.AO = Q.BO$$
$$y.AO = R.CO$$
$$z.AO = S.DO \text{ und}$$
$$\overline{(x + y + z)AO = P.AO = Q.BO + R.CO + S.DO.}$$

Auf ähnliche Art findet man, wenn z. B. von der einen Seite zwei, von der andern Seite aber 3 Gewichte vorhanden sind, dass ein Gleichgewicht statt finden werde, wenn
Fig. $P.AO + Q.BO = R.CO + S.DO + T.EO$ ist. Es geht daher überhaupt hieraus
20. hervor, dass: **Wenn an einem Hebel mehr als zwei Kräfte wirken, so halten sie einander das Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente von der einen Seite gleich ist der Summe der Momente von der andern Seite.**

§. 67.

Die Bestimmung des Schwerpunktes mehrerer Gewichte P, Q, R, S, T ergibt
Fig. sich aus der Eigenschaft, dass man sich im Schwerpunkte das gesammte Gewicht aller
21. einzelnen Körper vereinigt denken kann, dass demnach das Moment des Schwerpunktes den gesammten Momenten der einzelnen Gewichte gleich seyn muss. Denken wir uns z. B. das Gewicht P am Hebelbsarme OB, das Gewicht Q am Hebelsarme OC, das Gewicht R am Hebelsarme OD...... angebracht, und den Schwerpunkt aller dieser Gewichte in M, so muss nach dem Begriffe des Schwerpunktes die Summe der Momente $P.OB + Q.OC + R.OD + S.OE + T.OF$ dem Momente $(P + Q + R + S + T)OM$ gleich seyn. Hieraus ergibt sich von selbst die Entfernung des Sehwerpunktes M von der gemeinschaftlichen Achse O oder

$$OM = \frac{P.OB + Q.OC + R.OD + S.OE + T.OF}{P + Q + R + S + T} \text{ d. h.}$$

die Entfernung des Schwerpunktes von der gemeinschaftlichen Achse wird gefunden, wenn die Summe der statischen Momente mit der Summe der Gewichte derselben Körper dividirt wird. Aus der Gleichung

$$P.OM + Q.OM + R.OM + S.OM + T.OM =$$
$$P.OB + Q.OC + R.OD + S.OE + T.OF$$

folgt durch zweckmässige Uibersetzung und Vereinigung der Glieder mit gleichen Faktoren

$$P.OM - P.OB + Q.OM - Q.OC =$$
$$R.OD - R.OM + S.OE - S.OM + T.OF - T.OM \text{ oder}$$
$$P.BM + Q.CM = R.DM + S.EM + T.FM$$

d. h. die statischen Momente der Gewichte um ihren Schwerpunkt sind von beiden Seiten gleich; so wie es dem Begriffe vom Schwerpunkte gleichfalls gemäss ist.

§. 68.

Bisher haben wir die Bedingnisse des Gleichgewichtes nur für den Fall angegeben, wenn die schweren Körper P, Q, R unmittelbar an den Endpunkten ihrer Hebelsarme in A, B, C angebracht sind und sammt ihrem Unterstützungspunkte O in einer und derselben geraden Linie liegen. Es ist demnach noch nöthig, Körper, die nicht in einer geraden Linie liegen, zu betrachten und allgemeine Regeln für ihr Gleichgewicht aufzustellen. Fig. 20. Tab. 1.

Zu dieser Absicht dient die vorläufige Bemerkung, dass die Regel, welche für das Gleichgewicht der Körper in einer geraden Linie (§. 66.) angegeben worden, auch noch in dem Falle statt finde, wenn die Gewichte P, Q, R mittelst Schnüren an dieselben Punkte der geraden Linie AOC befestigt werden. Da nämlich alle Punkte einer Schnur von dem daran hängenden Gewichte überall gleich stark herab gezogen werden, so ist es offenbar einerlei, ob diese Gewichte an dem untern Ende der Schnur oder oben an den Punkten A, B, C des geraden Hebels ABC angebracht werden. Da diese Schnüre aber auch zugleich die Richtung zeigen, nach welcher die Körper von der Schwerkraft gezogen werden, so gibt uns dieser Umstand noch Anlass zu folgender Betrachtung: Fig. 22.

Es befinde sich der Hebel in der schiefen Lage AC; man ziehe durch den Unterstützungspunkt O eine horizontale Linie und verlängere die Richtungslinien der Zugkräfte, bis sie diese horizontale Linie schneiden, so werden die Linien Oa, Ob und Oc die horizontalen Entfernungen oder die Abstände des Unterstützungspunktes O von den Richtungen der angebrachten Zugkräfte vorstellen. Die Aehnlichkeit der Dreiecke BOb und COc mit AOa gibt die Proportionen:

$$OA : OB = Oa : Ob, \text{ woraus } OB = \frac{OA . Ob}{Oa} \text{ und}$$

$$OA : OC = Oa : Oc, \text{ woraus } OC = \frac{OA . Oc}{Oa}$$

Setzt man diese Werthe in die §. 63. gefundene allgemeine Gleichung $P . OA = Q . OB + R.OC$, Fig. 17.

Fig. 22. so ergibt sich $P.OA = \frac{Q.OA.Ob}{Oa} + \frac{R.OA.Oc}{Oa}$, und wenn alle Glieder dieser Glei-
Tab. 1. chung mit O a multiplicirt und mit O A dividirt werden, so erhalten wir: $P.Oa = Q.Ob + R.Oc$. Hieraus ist zu ersehen, dass nicht nur die Momente der Gewichte in der geraden Linie A O C (Fig. 17.), sondern auch (Fig. 22.) die Produkte derselben Gewichte in die horizontalen Abstände des Unterstützungspunktes O von den Richtungslinien dieser Zugkräfte von beiden Seiten gleich sind. Auch folgt noch weiter, dass wir durch den gemeinschaftlichen Unterstützungspunkt O noch unzählig viele andere Linien
Fig. 23. unter- und oberhalb der horizontalen a O c ziehen können, und dass dieselbe Gleichheit der Momente noch immer statt finden werde, nämlich:

$$P.AO = Q.OB + R.OC \text{ und}$$
$$P.A'O = Q.OB' + R.OC'$$

u. s. w.

Alle diese Gleichungen beruhen jedoch nur auf der Aehnlichkeit der Dreiecke, wobei vorausgesetzt wird, dass die Punkte A, B, C oder A′, B′, C′, an welchen die Kräfte angebracht sind, sich in einer und derselben geraden Linie befinden. Wenn wir aber die Gewichte an und für sich selbst betrachten, so ist ersichtlich, dass z. B. das Gewicht Q, dasselbe mag in B′, B, b, b′ oder in was immer für einem Punkte derselben senkrechten Linie angebracht seyn, nur dieselbe Kraftäusserung auf die Umdrehung des Ganzen hervorbringen kann, welche von demselben Gewichte in b bewirkt wird. Wenn man sich nämlich statt der Hebelsarme O C′, O C eine Fläche (ohne eigene Schwere) denkt, welche um den Punkt O gedreht werden kann, und durch den Zusammenhang ihrer Theile die Stelle der Schnur vertritt, so werden die Gewichte Q oder R in jedem Punkte B oder B′, C oder C′ nur dieselbe Wirkung hervorbringen können, welche sie in b oder c derselben Zugslinien äussern. Wir können also für die Momente der Kräfte P, Q, R um den Punkt O nun die Produkte derselben in die Abstände ihrer Richtungslinien von dem gemeinschaftlichen Unterstützungspunkte O annehmen, und erhalten auf solche Art die allgemeine Gleichung $P.Oa = Q.Ob + R.Oc\ldots$, in welcher die Orte A, B, C, wo sich die Kräfte befinden, nicht mehr vorkommen und wir erhalten dadurch den Vortheil, dass wir itzt die Momente von zwei oder mehr Gewichten, die sich in verschiedenen, jedoch pararellen Zuglinien befinden, addiren kön-
Fig. 24. nen. Es sey z. B. in Fig. 24. der Unterstützungspunkt O gegeben, an welchem mehrere Kräfte oder Gewichte P, Q, R, S an verschiedenen Punkten A, B, C, D mittelst der Hebelsarme A O, O B, O C, O D in Verbindung gesetzt sind. Man ziehe gegen ihre paralellen Zuglinien A a, B b, C c, D d die gemeinschaftliche wagrechte a O b c d, so wird im Zustande des Gleichgewichtes dieser 4 Körper $P.Oa = Q.Ob + R.Oc + S.Od$ seyn
Fig. 25. müssen, und auf gleiche Weise wird das Gleichgewicht mehrerer Körper, die sich in einer Fläche befinden und Kräfte besitzen, die nach paralellen Richtungen wirken, durch die Gleichheit der Momente oder der Produkte aus den Kräften in die winkelrechten Abstände ihrer Zuglinien vom gemeinschaftlichen Unterstützungspunkte bedingt, nämlich durch die Gleichung $P.Oa + Q.Ob \ldots\ldots = R.Oc + S.Od \ldots\ldots$

§. 69.

Es seyen P, Q, R, S, T....schwere Körper, die an einer aufrecht gestellten Fläche so befestigt sind, dass sie bei der Umdrehung der Fläche um einen gemeinschaftlichen Punkt O ihre wechselseitigen Entfernungen AB, AC, BC, BD.....nicht ändern können. Fig. 26. Tab. 1.
Man ziehe in derselben Fläche die wagrechte oder horizontale Linie Oe und aus den Mittelpunkten dieser Körper die senkrechten Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee...., so wird die Summe der Momente dieser Körper um den Punkt O durch die Summe der Produkte P.Oa + Q.Ob + R.Oc + S.Od + T.Oe..... vorgestellt. Der Schwerpunkt dieser Körper sey in M, man ziehe durch denselben die senkrechte Mm. Da man sich die Summe aller Körper im Schwerpunkte vereinigt denken kann, so wird auch das Moment dieses Schwerpunktes der angeführten Summe der einzelnen Momente gleich seyn; wir haben demnach

$$(P + Q + R + S + T....)\,Om = P.Oa + Q.Ob + R.Oc + S.Od + T.Oe.....$$

und hieraus die Entfernung der Linie Mm von O oder

$$Om = \frac{P.Oa + Q.Ob + R.Oc + S.Od + T.Oe......}{P + Q + R + S + T......}$$

Wenn in der Gleichung

$$(P + Q + R + S + T....)\,Om = P.Oa + Q.Ob + R.Oc + S.Od + T.Oe....$$

die Glieder mit gleichen Faktoren vereinigt, oder die Momente P.Oa + Q.Ob + R.Oc.... mit negativen Zeichen auf die linke Seite, und eben so die Glieder (S + T....) Om auf die rechte Seite der obigen Gleichung gesetzt werden, so erhalten wir:

$$P(Om - Oa) + Q(Om - Ob) + R(Om - Oc)... = S(Od - Om) + T(Oe - Om)...$$

oder $P.ma + Q.mb + R.mc.... = S.md + T.me. ...$ Wenn wir demnach durch den Schwerpunkt M eine wagrechte oder auf die Richtung der Zugkräfte winkelrechte Linie a'Me' ziehen, so ist wegen Gleichheit der Grössen $ma = Ma'$, $mb = Mb'$, $mc = Mc'$.... die Summe der Momente der Gewichte von der einen Seite des Schwerpunktes, der Summe der Momente von der andern Seite gleich.

Wird die Fläche sammt den daran befestigten Körpern um den vierten Theil der Peripherie des Kreises gedreht, so werden die Linien γC, εE, μM, αA, δD, βB... die paralellen Richtungen der Zugkräfte vorstellen, und wir erhalten aus dem gleichen Grunde, wie zuvor

$$(P + Q + R + S + T...)\,O\mu = P.O\alpha + Q.O\beta + R.O\gamma + S.O\delta + T.O\varepsilon...,$$

folglich die senkrechte Entfernung des Schwerpunktes von dem Umdrehungspunkte O oder

$$O\mu = \frac{P.O\alpha + Q.O\beta + R.O\gamma + S.O\delta + T.O\varepsilon....}{P + Q + R + S + T....}$$

Da sich nun der Schwerpunkt M im Durchschnittspunkte der Linien mM und μM befinden muss, so ergibt sich, dass zur Bestimmung des Schwerpunktes mehrerer in einer gemeinschaftlichen Fläche befindlichen Körper nur nöthig sey, die Entfernungen des Schwerpunktes von zwei auf einander winkelrecht gestellten Richtungslinien Om und Oμ zu bestimmen, dann durch m eine senkrechte und durch μ eine horizontale Linie zu ziehen, so gibt der Durchschnitt dieser beiden Linien den gesuchten Schwerpunkt für alle in Rechnung genommenen Körper.

Zur umständlichen Erklärung dieses Verfahrens ist zu bemerken, dass die Lage der Punkte A, B, C.... in der gemeinschaftlichen Fläche vorläufig gegeben, folglich die Entfernungen dieser Punkte von den zwei Richtungslinien Oβ und Oe bekannt seyn müssen. Es kann demnach keiner weitern Schwierigkeit unterliegen, die Produkte dieser Entfernungen in die Gewichte derselben Körper durch die Summe derselben Gewichte zu dividiren, und auf solche Art die Entfernungen des Schwerpunktes von den beiden Richtungslinien Oβ und Oe zu finden.

§. 70.

Fig. 27. Tab. 1. Wenn mehrere Hebel zu dem Zwecke mit einander in Verbindung gesetzt werden, um Lasten an ihren beiderseitigen Endpunkten bequemer als durch übermässig lange Hebel in das nöthige Gleichgewicht zu bringen, so nennt man diese Vorrichtung einen **zusammengesetzten Hebel**. Hiebei finden dieselben Gesetze statt, die wir für den einfachen Hebel aufgestellt haben. Ist z. B. Fig. 27. eine solche, aus mehrern einfachen Hebeln zusammengesetzte Vorrichtung, so werden sich die Bedingnisse für das Gleichgewicht der Kraft P mit der Last Q durch folgende Gleichungen ergeben.

Man kann sich zuerst in b an dem Hebel a c b eine Kraft x wirkend denken, die mit der Last Q um den Unterstützungspunkt c im Gleichgewichte ist; in diesem Falle ist $Q.ac = x.bc$ (I). Wir nehmen ferner im Punkte f noch eine Kraft y an, welche der Kraft x um den Unterstützungspunkt e das Gleichgewicht hält, so haben wir abermals $x.de = y.ef$. (II.). Endlich wird das Gleichgewicht der Kraft P mit der Last y durch die Gleichung $y.gm = P.mn$ (III.) bestimmt. Werden nun die Gleichungen I, II, III, zusammen multiplicirt, so erhält man:

$$Q.ac.de.gm = P.bc.ef.mn. \text{(IV.)}$$

d. h. **es ist an einem zusammengesetzten Hebel die Kraft multiplicirt mit den Hebelsarmen von Seite der Kraft gleich der Last multiplicirt mit den Hebelsarmen von Seite der Last.**

Wird die Gleichung IV in eine Proportion aufgelöst, so ist

$$Q : P = bc.ef.mn : ac.de.gm$$

§. 71.

Fig. 28. Wir haben bisher die Kräfte am Hebel im Zustande der Ruhe betrachtet, und wollen nun annehmen, der einfache Hebel Fig. 28. befinde sich zu irgend einem Zwecke in Bewegung. Da die Stange ECD **unbiegsam** ist, so müssen auch die beiderseitigen Drehungswinkel einander gleich, oder $ECe = DCd$ seyn. Da nun wegen der Gleichheit der Arme $DC = dC$, $EC = eC$ und der eingeschlossenen Winkel auch die Sektoren DCd und ECe einander ähnlich seyn müssen, so folgt hieraus die Proportion: $Ee : Dd = EC : DC$, d. h. **die Räume, welche die 2 Körper P und Q in gleicher Zeit zurücklegen, sind ihren Hebelsarmen proportional.** Nach dem ersten Satze vom Hebel §. 55. verhalten sich aber die Hebelsarme $EC : DC = P : Q$, demnach ist auch $P : Q = Ee : Dd$; oder **die an den beiden Endpunkten des Hebels angebrachten Kräfte stehen im umgekehr-**

ten Verhältnisse sowohl der Hebelsarme, als auch der in gleicher Zeit beschriebenen Räume. Wenn z. B. der Hebelsarm der Kraft P (so wie im ersten Beispiele §. 59.) oder $CD = 40$ Zoll und dagegen der Hebelsarm der Last Q oder $CE = 2$ Zoll angenommen wird, sonach die Kraft P zur Last Q sich verhält, wie $2 : 40$, so wird dagegen der Raum, welchen die Kraft zurücklegen muss, 40 Zoll betragen, wenn die Last durch einen Raum von 2 Zoll bewegt wird. Man sieht hieraus, dass man gerade so viel an Raum verliert, als man an der Kraft gewinnt, dass also der Hebel, so vortheilhaft er für die Kraft bei der Erhebung grosser Lasten zu seyn scheint, doch für die zu Stand gebrachte Arbeit keinen eigentlichen Gewinn gibt, sondern uns nur die Möglichkeit gewährt, Lasten zu heben, die wir ohne denselben gar nicht zu gewältigen im Stande wären.

Auf dieselbe Weise lässt sich auch die Zeit berechnen, welche dazu erfordert wird, um die Erde nur einen Zoll hoch mit dem Hebel des Archimedes (§. 59. zweites Beispiel) zu bewegen. Wenn nämlich die Länge des Hebelsarmes der Last = 1 Zoll und die Höhe, auf welche diese Last gehoben wird, auch 1 Zoll beträgt, so muss auch der Raum, welchen die Kraft zurücklegen muss, eben so gross als der Hebelsarm der Kraft oder 191453589672213423 Meilen lang seyn. Nehmen wir nun an, dass der Mensch, welcher sich mit seinem ganzen Gewichte von 150 ℔ auf das Ende des Hebels legt, täglich einen Raum von 3 Meilen zurücklegen könne, so würde derselbe 63817863224071141 Tage oder 17727184228908 Jahre benöthigen, um die Erde nur einen Zoll hoch zu bewegen.

§. 72.

Der Satz §. 71, dass nämlich die an den Endpunkten eines Hebels angebrachten Kräfte sich umgekehrt, wie ihre gleichzeitigen Räume verhalten, findet auch bei der Zusammensetzung mehrerer Hebel statt. Es sey nämlich an dem Endpunkte A des Hebels Fig.
A C B die Last Q angebracht, und mit diesem ersten Hebel der zweite B E D und mit 29.
diesem der dritte D F G in Verbindung gesetzt. Zur Erklärung dieses Gegenstandes denke man sich an B eine Kraft y, welche der Last Q das Gleichgewicht hält, und eben so am Endpunkte des zweiten Hebels D die Kraft x, so haben wir nach §. 70.

am ersten Hebel $Q . AC = y . BC$ und eben so für die Kräfte y und x
am zweiten Hebel $y . BE = x . DE$ und für die Kräfte x und P
am dritten Hebel $x . DF = P . GF$. Das Produkt dieser drei Gleichungen
gibt: $Q . AC . BE . DF = P . BC . DE . GF$ und hieraus erhalten wir
$Q : P = BC . DE . GF : AC . BE . DF$ (I.) wie bereits oben §. 70, gezeigt worden.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke G F g und D F d folgt für die Räume
$$Gg : Dd = GF : DF$$
Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke D E d und B E b folgt $Dd : Bb = DE : BE$ und
aus der Aehnlichkeit der Dreiecke B C b und A C a folgt $Bb : Aa = BC : AC$
Das Produkt dieser drei Proportionen gibt
$$Bb . Dd . Gg : Aa . Bb . Dd = BC . DE . GF : AC . BE . DF$$
oder wenn das erste und zweite Glied dieser Proportion mit $Bb . Dd$ dividirt wird,
$Gg : Aa = BC . DE . GF : AC . BE . DF$ (II.)

Da wir nun an die Stelle der Produkte der Hebelsarme nach I. das einfachere Verhältniss Q : P setzen können, so erhalten wir die allgemeine Proportion Q : P = G g : A a, d. h. die an den Endpunkten der äussersten Hebel angebrachten Kräfte Q und P sind ihren Räumen umgekehrt proportional. Aus der Gleichheit der Produkte der äussern und innern Glieder dieser Proportion folgt noch: Q . A a = P . G g. Die Produkte der Kräfte in ihre Räume pflegt man in der Mechanik allgemein die mechanischen Momente zu nennen; wir sehen demnach, dass bei jeder aus mehreren Hebeln zusammengesetzten Maschine nicht nur die statischen Momente oder die Produkte der im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in ihre Hebelsarme, sondern auch die mechanischen Momente oder die Produkte der einander entgegenwirkenden und in gleichförmiger Bewegung befindlichen Kräfte in ihre zu gleicher Zeit zurückgelegten Räume einander gleich sind.

Da in der letzten Proportion Q : P = G g : A a die mannigfaltigen Hebel, aus welchen die Maschinen zusammengesetzt sind, gar nicht erscheinen, sondern nur die von den beiden Kräften in gleichen Zeiten beschriebenen Räume, so wird von dieser Gleichung vorzüglich bei der Bestimmung der Effekte, welche von gegebenen Kräften zu bewirken sind, ein sehr vortheilhafter Gebrauch gemacht; so wie im Gegentheil aus der Gleichheit der statischen Momente die Verhältnisse der Hebelsarme bestimmt werden, mittelst welcher die gegebenen Kräfte in den Stand gesetzt werden, nicht nur die entgegenstehenden Widerstände zu gewältigen, sondern auch unter den zuträglichsten Verhältnissen von Geschwindigkeit und Zeit ihr Kraftvermögen zu äussern, und auf solche Art den gröstmöglichen Effekt hervorzubringen.

§. 73.

Ein jeder physische Körper hat einen Schwerpunkt, d. i. einen solchen Punkt, in welchem man sich die ganze Masse des Körpers vereinigt denken kann, und von welchem Punkte sonach auch die Hebelsarme zu bemessen sind, wenn derselbe Körper mit andern ins Gleichgewicht gebracht oder auch in Bewegung gesetzt werden soll.

Der Ort oder die Stelle, wo sich der Schwerpunkt im Körper befindet, wird bei regulären Körpern durch Rechnung, bei den übrigen durch ein praktisches Verfahren bestimmt, wovon sich beide auf die Eigenschaft gründen, dass um den Schwerpunkt alle Theile des Körpers im Gleichgewichte stehen müssen. Wenn man daher einen schweren Körper an einen Faden befestigt und ihn daran frei aufhängt, oder wie ein Bleiloth der Wirkung der Schwere überlässt, so wird sich der Schwerpunkt in der Richtung dieser verlängerten Linie befinden. Wird der Versuch noch an einem andern Punkte der Oberfläche wiederhohlt und darauf gesehen, dass die zweite Durchschnittsfläche mit der ersten beinahe einen rechten Winkel bilde, so wird der Durchschnitt der verlängerten Linien oder der an der Oberfläche bezeichneten Durchschnittsflächen den Schwerpunkt des Körpers angeben.

Die Anwendung dieses Verfahrens, den Schwerpunkt fester Körper zu finden, gibt zu erkennen, dass dieser Punkt auch ausser der festen Masse der Körper liegen könne, wie diess bei einem Ringe oder bei einer hohlen Kugel der Fall ist.

§. 74.

Mathematische Linien und Flächen haben zwar im eigentlichen Verstande keinen Schwerpunkt, weil sie ihrer Natur nach kein Gewicht haben; wenn wir uns jedoch statt einer Linie ein sehr dünnes Prisma, oder einen Cylinder von sehr kleinem Durchmesser und gleichförmig dichter Materie denken, so wird diese Linie allerdings einen Schwerpunkt und zwar in ihrer Mitte haben. Eben so wird eine **Fläche** einen Schwerpunkt haben, wenn wir uns statt derselben eine Scheibe von unbedeutender Dicke und durchaus gleichförmig dichter Materie denken.

Wir wollen annehmen, es sey zuerst der Schwerpunkt der **Fläche des Dreieckes** A B C Fig. 30. zu bestimmen. Man halbire eine Seite z. B. B C in a und ziehe A a, so wird auch eine jede Linie, welche man innerhalb des Dreieckes paralell zu B C zieht, von der Linie A a halbirt werden. Es enthält demnach die Gerade A a die Schwerpunkte aller zu B C paralellen Streifen, in welche man die ganze Dreiecksfläche zerlegen könnte; folglich muss auch der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes A B C in der Linie A a liegen. Aus demselben Grunde enthält die andere Gerade B b, welche die zweite Dreiecksseite A C in zwei gleiche Theile theilt, ebenfalls den Schwerpunkt des Dreieckes A B C. Es muss sich daher in dem Durchschnittspunkte S der zwei Linien A a und B b der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes A B C befinden. Fig. 30. Tab. 1.

Um die Entfernung dieses Schwerpunktes durch Rechnung zu finden, verbinde man die Punkte a und b durch eine gerade Linie. Da sich nun die Seiten
$C\,b : C\,A = C\,a : C\,B = 1 : 2$ oder
$C\,b : C\,a = C\,A : C\,B$ verhalten, so muss a b paralell zu A B seyn, demnach wird auch das Dreieck b S a dem Dreiecke B S A ähnlich seyn und sich verhalten:
$S\,a : S\,A = a\,b : A\,B = C\,a : C\,B = 1 : 2$. Werden in dieser Proportion die ersten zwei Glieder addirt, so ist auch $S\,a : S\,A + S\,a = 1 : 2 + 1$ oder $S\,a : A\,a = 1 : 3$,
woraus $S\,a = \frac{1}{3}(S\,A + S\,a)$ oder $S\,a = \frac{1}{3} A\,a$ folgt;

auf gleiche Weise ist $S\,b = \frac{1}{3} B\,b$.

Hieraus ergibt sich folgende einfache **Construktion zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreieckes.** Man theile irgend eine von den drei Seiten des Dreieckes in zwei gleiche Theile und ziehe von diesem Theilungspunkte zu der gegenüberliegenden Spitze des Dreieckes eine gerade Linie; wird diese nun in drei gleiche Theile getheilt, so ist der, der getheilten Dreiecksseite zunächst liegende Theilungspunkt zugleich der Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

§. 75.

Der Schwerpunkt eines **Trapezes** MNOP wird auf folgende Art gefunden: Es sey $N\,O = l$, $M\,N = b$ und $P\,O = B$. Man ziehe aus M die Linie M Q paralell zu N O, so wird das Trapez in ein Rechteck M N O Q und ein Dreieck M Q P abgetheilt. Der Schwerpunkt des Rechteckes M N O Q befindet sich in der Mitte m desselben, er ist nämlich von M N um $m\,r = \frac{l}{2}$ und von N O um $m\,s = \frac{b}{2}$ entfernt; der Schwerpunkt Fig. 31.

(n) des Dreiecks M Q P ist von M N um $Mt = \frac{2}{3} l$ und von N O um $nu = b + \frac{1}{3} PQ = b + \frac{1}{3}(B - b)$ entfernt. Es wird also nach §. 69.
$rm \times$ Fläche M N O Q + $Mt \times$ Fläche M P Q = $oq \times$ Fläche M N O Q P seyn, und wenn hier alle Werthe substituirt werden, ist: $\frac{1}{2} \times b . l + \frac{2}{3} l \times \frac{l (B - b)}{2} = x \times l \frac{(B + b)}{2}$ woraus $x = \frac{1}{3}\left(\frac{2B + b}{B + b}\right)$ folgt.

Auf gleiche Weise ist nach demselben §. 69.
$ms \times$ Fläche M N O Q + $nu \times$ Fläche M P Q = $op \times$ Fläche M N O Q P, oder wenn wieder die Werthe substituirt werden,

$$\frac{b}{2} \times b . l + \left\{b + \frac{1}{3}\left(B - b\right)\right\} l . \frac{(B - b)}{2} = y . l \frac{(B + b)}{2},$$

woraus $y = \frac{B^2 + B . b + b^2}{3 (B + b)}$ folgt.

Setzt man in diesem Ausdrucke $b = o$, so verwandelt sich das Trapez in ein Dreieck, dessen Spitze in N sich befindet, und wir erhalten $x = \frac{2}{3} l$ und $y = \frac{B}{3}$ wie nach §. 74 bekannt ist.

Ist $B = b$, so verwandelt sich das Trapez in ein Rechteck und wir erhalten $x = \frac{l}{2}$ und $y = \frac{b}{2}$ d. i. der Schwerpunkt liegt in der Mitte des Rechteckes, wie es ebenfalls bekannt ist.

§. 76.

Hat man nun den Schwerpunkt irgend einer von mehreren geraden Linien eingeschlossenen Figur zu finden, so zerlege man diese Figur durch Diagonallinien in Dreiecke und suche von diesen einzelnen Dreiecken nach dem §. 74 beschriebenen Verfahren die Schwerpunkte. Sind z. B. S′, S″, S‴ die drei Schwerpunkte der Dreiecke A B C, A C D, A D E, in welche man das Fünfeck A B C D E zerlegt hat, und man verlangt nun die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes S von einer angenommenen Linie F G, so fällt man von den Schwerpunkten der drei Dreiecke S′, S″, S‴ und von dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte S Perpendikeln auf diese Linie F G. Es sey nun $Ss = y$, $S's' = y'$, $S''s'' = y''$, $S'''s''' = y'''$; dann $Fs = x$, $Fs' = x'$, $Fs'' = x''$, $Fs''' = x'''$ und die Flächeninhalte der Dreiecke $ABC = F'$, $ACD = F''$, $ADE = F'''$, so findet man die Abstände F s und S s oder die Coordinaten x und y für den Schwerpunkt des ganzen Fünfecks nach §. 69.

Fig. 32. Tab. 1.

$$x = \frac{F'.x' + F''.x'' + F'''.x'''}{\text{Fläche von } ABCDE}$$

$$y = \frac{F'.y' + F''.y'' + F'''.y'''}{\text{Fläche von } ABCDE}.$$

Trägt man nun $Fs = x$ auf die Abscissenlinie auf, errichtet in s eine Lothrechte, und trägt auf derselben noch $sS = y$ auf, so hat man den Schwerpunkt des Fünfecks. Auf

gleiche Weise wird nun der Schwerpunkt einer jeden andern, von mehreren Seiten umschlossenen Fläche gefunden. *)

§. 77.

Nach dieser Bestimmung des Schwerpunktes von einem Dreiecke, einem Trapeze und andern mit geraden Linien begränzten Flächen wollen wir nun zur Bestimmung des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide übergehen. Es sey die Grundfläche

*) Der Schwerpunkt krummer Linien und jener Flächen und Körper, die von krummen Linien begränzt sind, wird auf dieselbe Art gefunden, welche bereits in §. 69 angegeben wurde.

Es sey nämlich die Stellung aller Punkte der krummen Linie ANnP durch eine Gleichung zwischen den Abscissen $AM = x$ und den Ordinaten $MN = y$ gegeben. Man ziehe eine zweite Ordinate mn und setze den Unterschied der Abscissen $Mm = No = dx$, den Unterschied der Ordinaten $no = dy$ und den dazwischen liegenden Bogen $Nn = ds$, so wird man aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung auch die Verhältnisse zwischen den Grössen dx, dy und ds ableiten können. Fig. 37. Tab. 1.

Da wir annahmen, dass die Linien, Flächen und Körper, für welche die Schwerpunkte zu bestimmen sind, eigentlich Scheiben von sehr geringer Stärke und von einer gleichförmig dichten Materie sind, so können wir die Gewichte ihrer Bestandtheile der Grösse derselben proportional setzen. Sucht man demnach den Schwerpunkt des Bogens ANnP, so ist das Moment des Elementes Nn offenbar $NM \times Nn = y.ds$, demnach die Höhe des Schwerpunktes für alle Elemente in der krummen Linie ANP oder $VU = \frac{\int y.ds}{s}$, und eben so wird die Entfernung des Schwerpunktes U für denselben Bogen von einer Linie, die durch A senkrecht auf AC oder paralell zu UV gezogen wird, nämlich $AV = \frac{\int x.ds}{s}$ seyn.

Beispiel. Es sey der Bogen ANP ein aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $AC = a$ beschriebener Kreisbogen und der Winkel $ACN = \lambda$, so ist $NM = y = a.\mathrm{Sin}.\lambda$ und $AM = x = a - a\,\mathrm{Cos}.\lambda$, der Bogen $AN = a.\lambda = s$, folglich $Nn = a.d\lambda$; und die Höhe des Schwerpunktes für den Bogen $AN = \frac{\int a.\mathrm{Sin}.\lambda.a.d\lambda}{a.\lambda} = a^2\left(\frac{1-\mathrm{Cos}\,\lambda}{a.\lambda}\right) = \frac{AC \times AM}{AN}$, folglich für den ganzen Bogen ANP oder die Höhe $VU = \frac{AC.AQ}{ANP}$. Eben so findet man die Entfernung des Schwerpunktes für den Bogen AN von der Richtungslinie $AR = \frac{\int x.ds}{s} = \frac{\int(a - a\,\mathrm{Cos}\,\lambda)\,a.d\lambda}{a.\lambda} = \frac{(a.\lambda - a.\mathrm{Sin}\,\lambda)}{a.\lambda}.a = \frac{(AN - NM)AC}{AN}$, folglich ist die Entfernung des Schwerpunktes für den ganzen Bogen ANP oder $TU = AV = \frac{(ANP - PQ)AC}{ANP} = AC - \frac{AC.PQ}{ANP}$. Daraus folgt die Entfernung desselben Schwerpunktes vom Mittelpunkte $CV = \frac{AC.PQ}{ANP}$.

Z. B. Es sey der Bogen $ANP = \frac{1}{2}a.\pi$ oder der 4te Theil des ganzen Kreises, so ergibt sich $VU = \frac{a.a}{\frac{1}{2}a.\pi} = \frac{2a}{\pi} = \frac{7}{11}a$ und $CV = \frac{a.a}{\frac{1}{2}a.\pi} = \frac{7}{11}a$. Wäre der Bogen ANP ein halber Kreis oder $= a\pi$, so ist $VU = \frac{a.2a}{a\pi} = \frac{2a}{\pi} = \frac{7}{11}a$ und die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte $CV = \frac{a.o}{a\pi} = 0$, wie es auch seyn muss.

Wäre der Bogen $ANP = 2a.\pi$ oder die Peripherie des ganzen Kreises, so ist $VU = \frac{a.o}{2a\pi}$ und die Entfernnng $CV = \frac{a.o}{2a.\pi} = o$, d. i. der Schwerpunkt befindet sich im Mittelpunkte, wie es für sich offenbar ist.

Fig. 33. Tab. 1. dieser Pyramide ABC, ihr Scheitel in O. Man suche zuerst den Schwerpunkt der Grundfläche ABC. Dieser wird gefunden, wenn man die Linie AB in zwei gleiche Theile theilt, den Theilungspunkt a mit C verbindet, dann die Linie aC in drei gleiche Theile theilt, wornach sich der Schwerpunkt auf dem ersten Drittheile der Linie aC nämlich in f ergibt. Auf gleiche Art bestimmt man den Schwerpunkt des Dreiecks AOB, indem man von dem Theilungspunkte a der Linie AB die Linie aO zieht, welche in drei Theile getheilt, den Schwerpunkt in d gibt.

Fig. 37. Der Schwerpunkt einer von dem Bogen ANP und den Coordinaten AQ und QP begränzten Fläche wird gefunden, wenn man erstlich die Fläche $MNnm = y \cdot dx$ mit der Höhe ihres Schwerpunktes $\frac{1}{2}y$ multiplicirt, und dann die Summe aller dieser Produkte durch die ganze Fläche APQ dividirt, oder $VU = \frac{\int \frac{1}{2}y^2 \cdot dx}{\int y \cdot dx}$ und die Entfernung des Schwerpunktes dieser Fläche von der Richtungslinie AR wird gefunden, wenn erstens das Element der Fläche $MNnm = y \cdot dx$ mit $AM = x$ multiplicirt, und dann die Summe aller dieser Momente durch die Fläche APQ dividirt wird, oder $AV = \frac{\int x \cdot y \cdot dx}{\int y \cdot dx}$.

Beispiel. Es sey die krumme Linie ANP eine Parabel, für welche die Gleichung $y^2 = p \cdot x$ gegeben ist, so folgt $\int y \cdot dx = \int y \cdot \frac{2y \cdot dy}{p} = \int \frac{2y^2 \cdot dy}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{p}$ oder $= \frac{2}{3} x \cdot y$; eben so

$$\int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx = \int \frac{1}{2} y^2 \cdot \frac{2y \cdot dy}{p} = \int \frac{y^3 \cdot dy}{p} = \frac{y^4}{4p} = \frac{x \cdot y^2}{4}, \text{ endlich}$$

$$\int x \cdot y \cdot dx = \int \frac{y^2}{p} \cdot y \cdot \frac{2y \cdot dy}{p} = \int \frac{2y^4 \cdot dy}{p^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{y^5}{p^2} = \frac{2}{5} x^2 \cdot y; \text{ demnach ist}$$

$VU = \frac{\frac{1}{4} x \cdot y^2}{\frac{2}{3} x \cdot y} = \frac{3}{8} y$ und die Entfernung vom Scheitel $AV = \frac{\frac{2}{5} x^2 \cdot y}{\frac{2}{3} x \cdot y} = \frac{3}{5} x$.

Fig. 38. Für die Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers, der durch die Umdrehung einer Fläche APQ um die Achse AQ entsteht, ist zu bemerken, dass die Schwerpunkte aller Kreise NN′ bis PP′ sich in den Mittelpunkten, folglich sämmtlich in der Achse AQ befinden, dass man demnach nur nöthig habe, den Schwerpunkt des Körpers in der Linie AQ vom Scheitel A zu finden.

Die Fläche des Kreises NN′ ist wie bekannt $\pi \cdot y^2$; folglich der kubische Inhalt eines Elements von diesem Körper $\pi \cdot y^2 \cdot dx$, sonach das Moment desselben Elementes $x \cdot \pi \cdot y^2 \cdot dx$, demnach ist die Entfernung des Schwerpunktes $AV = \frac{\int \pi \cdot x \cdot y^2 \cdot dx}{\int \pi \cdot y^2 \cdot dx} = \frac{\int x \cdot y^2 \cdot dx}{\int y^2 \cdot dx}$.

Beispiel. Es sey der Körper ein Paraboloid, so ist $y^2 = px$ die Gleichung für die krumme Linie ANP, folglich $\int \pi \cdot y^2 \cdot dx = \int \pi \cdot p \cdot x \cdot dx = \frac{\pi \cdot p \cdot x^2}{2}$ und

$\int \pi \cdot x \cdot y^2 \cdot dx = \int \pi \cdot p \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\pi \cdot p \cdot x^3}{3}$; demnach ist die Entfernung des Schwerpunktes

$AV = \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot p \cdot x^3}{\frac{1}{2} \pi \cdot p \cdot x^2} = \frac{2}{3} x$; mithin für den ganzen Körper $= \frac{2}{3} AQ$.

In den Lehrbüchern der Mechanik werden zwar gewöhnlich noch die Schwerpunkte für sehr viele andere, sowohl massive als hohle geometrische Körper bestimmt; da jedoch alle diese Rechnungen auf eine ähnliche Art, wie die bereits angeführten gemacht werden und ihre weitere Auseinandersetzung hier nur als Beispiele zur Uibung für Anfänger anzusehen seyn würden, indem von ihren Resultaten in diesem Lehrbuche kein Gebrauch vorkömmt, so glauben wir, sie übergehen zu können.

Wenn man nun den Schwerpunkt f der Grundfläche ABC mit dem Scheitel der Pyramide O verbindet, so ist offenbar, dass der Schwerpunkt des ganzen Körpers in der Linie fO liegen muss, weil man sich die Pyramide OABC aus sehr vielen, zur Grundfläche ABC paralellen Scheiben zusammengesetzt denken kann, welche insgesammt den Schwerpunkt in Of haben. Wenn man auf gleiche Art den Schwerpunkt d der Seitenfläche OAB mit C verbindet und sich die Pyramide aus sehr vielen zu dieser Fläche AOB paralellen Scheiben zusammengesetzt denkt, so wird der Schwerpunkt der ganzen Pyramide abermals in der Linie dC liegen. Hieraus folgt, dass sich der *Schwerpunkt der ganzen Pyramide* in dem Durchschnitte e der beiden Linien Of und dC befinden müsse. Weil aber diese beiden Linien Of und dC sich in dem Dreiecke aCO befinden, so haben wir nur nöthig, den Schwerpunkt dieses Dreiecks aCO zu suchen, indem derselbe zugleich der Schwerpunkt der ganzen Pyramide seyn wird. Zu dieser Absicht verbinde man die Punkte d und f, so wird die Linie df zu OC paralell seyn, weil sich $af : aC = 1:3$ und ebenfalls $ad : aO = 1:3$ verhält; demnach werden die Dreiecke def und OeC einander ähnlich seyn, und es wird sich $fe : df = eO : OC$ verhalten. Nun ist aber $df : OC = af : aC = 1 : 3$ oder $df = \frac{1}{3} OC$; es muss daher auch $fe = \frac{1}{3} \cdot eO = \frac{1}{3}\left(fO - ef\right)$ seyn; hieraus ergibt sich $fe = \frac{1}{4} fO$.

Zieht man nun aus O die Linie Og perpendikulär auf die Grundfläche ACB und verbindet f mit g, zieht man dann die Linie ei paralell zu fg, so wird sich auch $gi : gO = fe : fO = 1:4$ verhalten; demnach wird *die Höhe des Schwerpunktes oberhalb der Grundfläche dem vierten Theile von der senkrechten Höhe der Pyramide gleich seyn.*

§. 78.

Der vorstehende Satz dient auch zur Bestimmung des *Schwerpunktes einer jeden vielseitigen Pyramide.*

Man fälle nämlich aus dem Scheitel O dieser Pyramide ein Perpendikel Og auf die Grundfläche ABCDEFG und verbinde den Punkt g, wo das Perpendikel hinfällt, mit allen Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G der Grundfläche der Pyramide. Hiedurch wird die Pyramide in eben so viele dreiseitige Pyramiden AgBO, BgCO, CgDO..... getheilt, als die Peripherie der Grundfläche Seiten AB, BC, CD..... hat, und eine jede dieser Pyramiden wird ihren Schwerpunkt auf dem vierten Theile der Höhe des zuerst herabgelassenen Perpendikels gO haben. Es wird sich daher auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide auf der Höhe $gi = \frac{1}{4} . gO$ befinden. Verbindet man nun den *Schwerpunkt der Grundfläche* f mit dem Scheitel O durch die Linie fO, so wird die paralelle ie den *Schwerpunkt der ganzen Pyramide* in e angeben. Fig. 34. Tab. 1.

Dasselbe Verfahren wird angewendet, wenn das von dem Scheitel herabgefällte Perpendikel ausser der Grundfläche nach m fällt. Man verbindet nämlich ebenfalls den Schwerpunkt n mit dem Scheitel O, theilt das Perpendikel Om in vier gleiche Theile, zieht aus dem ersten Theilungspunkte p die Linie pq paralell zur Grundfläche mn, so wird der Schwerpunkt der schiefen Pyramide in q und ebenfalls $mp = \frac{1}{4}$ mO seyn. Fig. 35.

Da ein Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann, so findet man nach derselben Methode auch den Schwerpunkt eines Kegels.

§. 79.

Wenn mehrere Körper mit einander in einer festen Verbindung sind, so lässt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller dieser Körper auf dieselbe Art, wie §. 69. finden; nur ist hier zu bemerken, dass, so wie zur Bestimmung der Stellung aller dieser Körper drei Flächen angenommen werden müssen und die Entfernung eines jeden Körpers von diesen drei Flächen gegeben seyn muss, auf dieselbe Art auch die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes dieser Körper von jeder dieser drei Flächen bestimmt wird. Man multiplicirt nämlich das Gewicht eines jeden Körpers mit seiner Entfernung von der Fläche, und dividirt das Produkt mit der Summe der Gewichte aller Körper, der Quozient gibt nun den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der ersten Fläche; eben so erhält man den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der zweiten und auf gleiche Art von der dritten Fläche.

§. 80.

Der Schwerpunkt eines abgestutzten Kegels T wird nach §. 78. gefunden. Es
Fig. 36. Tab. 1. sey nämlich das Gewicht eines Cub. Fusses $= g$, $cC = a$, $CO = H$, $AC = R$, $Dc = r$, so muss das Gewicht des abgestutzten Kegels $(k . g)$ multiplicirt mit der unbekannten Entfernung seines Schwerpunktes $(x = CT)$ + dem Gewichte des fehlenden Kegels $(k' . g)$ multiplicirt mit der Entfernung seines Schwerpunktes $\left(a + \frac{h}{4}\right)$ = seyn dem Gewichte des ganzen Kegels $(K . g)$ multiplicirt abermals mit der Entfernung seines Schwerpunktes $\left(\frac{H}{4}\right)$ oder

$$k . g \times x + k' . g \left(a + \frac{h}{4}\right) = K . g \times \frac{H}{4}.$$

In diesem Ausdrucke lassen sich die Werthe für die Grössen h, H, k, k' und K berechnen, und zwar verhält sich

$$R - r : a = r : h \text{ woraus } h = \frac{a . r}{R - r}; \text{ ferner ist } R - r : a = R : H \text{ und } H = \frac{a . R}{R - r},$$

der Kubikinhalt des ganzen Kegels ist $K = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}$ (wo $\pi = 3{,}14159\ldots$)

der Kubikinhalt des fehlenden Kegelstückes $k' = \pi . r^2 \cdot \frac{h}{3}$

der Kubikinhalt des abgestutzten Kegels $k = K - k'$.

Wir erhalten daher, wenn alle diese Werthe substituirt werden:

$$\left(\frac{\pi . R^2}{3} \times \frac{a . R}{R - r} - \frac{\pi . r^2}{3} \times \frac{a . r}{R - r}\right) x + \frac{\pi . r^2}{3} \times \frac{a . r}{R - r}\left(a + \frac{a . r}{4 (R - r)}\right) =$$

$$\frac{\pi . R^2}{12}\left(\frac{a . R}{R - r}\right)^2.$$ Dividirt man alle Glieder dieser Gleichung durch $\frac{\pi . a}{3 (R - r)}$, so ist:

$$(R^3 - r^3)\, x + r^3\left(\frac{4 . R . a - 3 . r . a}{4 (R - r)}\right) = \frac{a . R^4}{4 (R - r)} \text{ oder}$$

$$x = a\left(\frac{R^4 - 4 R r^3 + 3 r^4}{4 (R - r)(R^3 - r^3)}\right) = a\left(\frac{R^3 + R^2 . r + R . r^2 - 3 r^3}{4 (R^3 - r^3)}\right),$$

welches die gesuchte Höhe des Schwerpunktes ist.

Setzt man in diesem Ausdrucke den obern Halbmesser $r = o$, so ist die Höhe des Schwerpunktes $x = \frac{a}{4}$, dieselbe, welche wir §. 77. und 78. bei der Pyramide und bei dem Kegel fanden.

§. 81.

Wenn Waaren von Krämern über Land zum Verkaufe verführt werden, so bedienen sich dieselben des bekannten Schubkarrens oder Schiebbockes. Fig. 39. Tab. 1.

Es sey der Schwerpunkt der Ladung in D; man ziehe durch D die Senkrechte DB (in welcher auch der Schwerpunkt des Schubkarrens angenommen wird) und verbinde die Achse des Rädchens C mit dem Angriffe A, so kann offenbar dieser Schubkarren als ein Hebel der zweiten Art betrachtet werden, wobei der Unterstützungspunkt sich in der Achse des Rädchens C befindet, und die Entfernungen $CD = r$ und $CA = R$ die Hebelsarme der Last und Kraft sind.

Die Last besteht aus dem Gewichte des Karrens B und aus dem Gewichte der Ladung Q. Nun verhält sich, nach §. 61. bei einem Hebel der zweiten Art die Kraft in A oder $K : Q + B = r : R$ oder $K = \frac{(Q+B)\,r}{R}$ d. h. die Kraft in A hat den Theil der Last $= (Q + B)\,\frac{r}{R}$ und dagegen die Achse in C den übrigen Theil $(Q + B)\,\frac{AB}{AC} = (Q+B)\left(\frac{R - r}{R}\right)$ zu tragen. Beide Theile machen zusammen $(Q + B)\,\frac{r}{R} + (Q + B)\left(\frac{R - r}{R}\right) = Q + B$ aus, wie es sich von selbst versteht.

Da der zweite Theil dieser Last, den die Achse zu tragen hat, mittelst des Rädchens von der Strasse übernommen und durch das Verhältniss $\frac{r}{R}$ des Rades zur Achse vermindert wird, so wollen wir diesen Theil des Widerstandes, von dem wir erst in der Folge handeln werden, hier noch unberücksichtigt lassen.

Wir haben also die Kraft $K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) = (Q + B)\,\frac{r}{R}$, woraus

$$Q = \frac{R}{r}\cdot k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - B \text{ folgt (I).}$$

Wenn nun gefragt wird, wie der Karrenführer seine Arbeit einzurichten habe, um seine Ladung am leichtesten von einem Orte zum andern fortzuschaffen, so ergibt sich diess aus folgender Berechnung:

Der Weg, den der Arbeiter mit der Last Q in einem Tage zurücklegt, ist $S = 3600 . z . v$ (II).

Um die Führungskosten (a) für einen Zentner auf die Meile zu finden, schliesst man: für die Führung der Last Q auf die Entfernung S zahlt man den Taglohn p, welcher Lohn (a) entfällt für die Führung von einem Zentner (100 ℔) auf eine Meile (24000 Fuss) Entfernung? oder

$$Q \times S : p = 100 \times 24000 : a,$$

$$\text{woraus } a = \frac{100 . 24000 . p}{S . Q} \text{ (III).}$$

Die Substitution der Werthe aus den Gleichungen (I) und (II) in (III) gibt:

$$a = \frac{100\ 24000 . p}{3600 z . v . \frac{R}{r} k \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{r.B}{R.k} \right\}}$$

$$\text{oder } a = \frac{100 . 24000 . p}{3600 . t . c . \frac{R}{r} . k . \frac{v}{c} . \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{r.B}{R.k} \right\}} \quad \text{(IV)}$$

Dieser Lohn wird am geringsten, wenn das veränderliche Produkt

$\frac{v}{c} . \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{r.B}{R.k} \right\}$ ein Maximum wird.

Diese ganze Rechnung zeigt, dass wir hier genau den Fall, wie §. 41. haben, nur kömmt in unsern Formeln $\frac{R.k}{r}$ statt k vor. Setzen wir daher $\frac{R.k}{r} = k'$, so muss $\frac{v}{c} . \frac{z}{t} \left\{ \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k'} \right\}$ ein Maximum werden. Diess ist nach §. 41. der Fall, wenn man für eine annäherungsweise Rechnung $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1 - \frac{B}{2k'}$ (V) oder genauer nach pag. 51. $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \frac{1}{2}\left\{3 - \sqrt{\left(1 + \frac{2B}{k'}\right)}\right\}$ setzt.

Nach Substitution der Werthe aus der Gleichung (V) in die Gleichungen (I), (II), (III) ergibt sich:

die Ladung, welche der Arbeiter zu nehmen hat $Q = k' = \frac{k.R}{r}$

der Raum, welchen er täglich zurücklegt $S = 3600 . t . c \left(1 - \frac{B}{k'}\right)$

und die Frachtkosten eines Zentners auf die Meile $a = \frac{100 . 24000 . p}{3600 . t . c . (k' - B)}$.

Beispiel. Es frägt sich um die Frachtkosten eines Zentners auf die Meile, wenn von einem Bothen, Krämer, der im Stande ist, in einem Tage 30 ℔ auf eine Entfernung von 4 Meilen zu tragen, Lasten auf eine grosse (unbestimmte) Entfernung mittelst des Schubkarrens, dessen Gewicht 25 ℔ ist, geführt werden sollen.

Es sey die Entfernung vom Angriffspunkte bis zum Rädchen R = 5 Fuss und die Entfernung vom Schwerpunkte der Last bis zum Rädchen r = 1 Fuss, so ist $\frac{R}{r} = 5$ und $\frac{B}{k'} = \frac{B.r}{k.R} = \frac{25.1}{30.5} = \frac{1}{6}$, folglich

die Geschwindigkeit, womit der Mann zu fahren hat $v = {}^{10}/_{3}\left(1 - \frac{1}{12}\right) = 3{,}056$ Fuss,

die tägliche Arbeitszeit $z = 8\left(1 - \frac{1}{12}\right) = 7\frac{1}{3}^{h} = 7^{h}\ 20^{Min.}$;

der tägliche Raum $S = 4\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 3\frac{1}{3}$ Meilen;

die Ladung $Q = k' = k . \frac{R}{r} = 30 . 5 = 150$ ℔;

der Lohn für den Zentner und die Meile $a = \frac{100 . 1 . p}{4(30.5 - 25)} = 0{,}2 . p$.

Würde sich der Arbeiter nach der genauern Rechnung benehmen, so wäre

$\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = \frac{1}{2}\left\{3 - \sqrt{\left(1 + \frac{2.25}{5.30}\right)}\right\} = 0{,}923$, folglich $v = 3{,}077$; $z = 7{,}4^{h}$

die Ladung $Q = 150 \left\{\left(2 - 0{,}923\right)^2 - \frac{25}{150}\right\} = 149$ ℔;

der tägliche Raum $S = 3600 . t . c . \frac{v}{c} . \frac{z}{t} = 4 \left(0{,}923\right)^2 = 3{,}41$ Meilen; und

der Lohn für den Zentn. und die Meile $a = \frac{100 . 1 . p}{4 . \left(0{,}923\right)^2 . 150 . \left\{\left(2 - 0{,}923\right)^2 - \frac{25}{150}\right\}} = 0{,}197 . p.$

Daraus ist abermals ersichtlich, dass man sich in solchen Fällen mit der leichtern Berechnungsart §. 41 begnügen könne, dass jedoch der Arbeiter, wenn er sich nach der genauern Rechnung benimmt, 2 Prozent in einem Tage mehr verdienen könne.

§. 82.

Sind theilbare Lasten auf eine kleine Entfernung zu führen, so bedient man sich gewöhnlich der Scheibtruhen oder Schuttkarren. Diess ist der Fall, wenn Baumaterialien z. B. Steine, Sand, Erde zu Gebäuden geführt werden sollen, oder wenn Erde aus Abgrabungen in Dämme verführt wird, u. dgl. Bei den in Böhmen üblichen Schuttkarren beträgt die Entfernung vom Angriffspunkte bis zur Achse des Rädchens $R = 4' 6''$, die Entfernung von der Mitte des Kastens bis zur Achse des Rädchens $r = 1' 6''$ und ein solcher Karren wiegt 30 bis 34 ℔. Dieser Karren wird gewöhnlich mit 2 bis 3 Kubikfuss Erde oder Schotter gefüllt. Fig. 40. Tab. 1.

Es frägt sich nun abermals, wie solche Arbeiten einzurichten sind? Diese Aufgabe kommt offenbar mit jener §. 46 überein, weil hier ebenfalls leere Rückfahrten statt finden, indem der Karrenführer, wenn er die Erde oder den Schotter an Ort und Stelle gebracht hat, mit dem leeren Gefässe zurückkehrt, um eine neue Ladung zu holen.

Vermög der frühern Aufgabe (§. 81) ist die Last, die der Arbeiter in den Karren zu nehmen hat

$$Q = \frac{k . R}{r} \left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B . r}{k . R}\right\} = k' \left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k'}\right\}.$$

Die Zeit einer Hinfahrt mit der Last $= \frac{E}{v}$;

die Zeit einer Rückfahrt ohne Last $= \frac{E}{V}$, folglich die Zeit, in welcher die Last einmal auf die Entfernung E geführt wird $= \frac{E}{v} + \frac{E}{V}$.

Dividirt man die Arbeitszeit des ganzen Tages $3600 . z$ durch die Zeit, in welcher die Last einmal auf die Entfernung E geführt wird, so erhält man die Anzahl Fuhren in einem Tage $n = \frac{3600 . z}{\frac{E}{v} + \frac{E}{V}}$ und den Effekt $n . Q = \frac{3600 . z}{\frac{E}{v} + \frac{E}{V}} . k' \left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k'}\right\}$.

Dieser Ausdruck kommt auch pag. 60 vor, und er wird am grössten, wenn $\frac{v}{c} = \frac{5}{6}$ und $\frac{z}{t} = 1$ wird, daher der grösste Effekt $= n . Q = \frac{3600 . t . c}{E} \left(k' - B\right) \frac{2}{3}$.

Beispiel. Es sollen 20 Kubikklafter Erde auf eine Entfernung von 50 Klaftern von Menschen, welche im Stande sind, täglich 30 ℔ auf 4 Meilen Entfernung zu tragen, mittelst Schuttkarren, deren Gewicht B = 30 ℔ ist, geführt werden.

Nehmen wir das Gewicht von einem Kubikfuss Erde zu 100 ℔ und das Verhältniss der Hebelsarme bei dem Schuttkarren $\frac{R}{r} = 3$ an, so findet man für einen beiläufigen Kostenanschlag den Effekt eines Arbeiters nach der Formel

$$\frac{3600 . t . c}{E}\left(k' - B\right)\frac{2}{3} = \frac{16000}{50}\left(30 . 3 - 30\right)\frac{2}{3} = 128 \text{ Zentner};$$ d. h. so viel kann der Arbeiter in einem Tage an Ort und Stelle führen.

Da das Gesammtgewicht der zu verführenden Erde 20 . 216 = 4320 Zentner beträgt, und für die Verführung von 128 Zentnern ein Taglohn (p) zu entrichten kommt, so sind die Frachtkosten für die auf die Entfernung von 50 Klaftern zu führende Erde $= \frac{4320 . p}{128} = 33{,}75\ p$. Es würden demnach 6 Arbeiter im Stande seyn, diese 20 Kubikklafter in 5⅝ Arbeitstagen auf die Entfernung von 50 Klaftern zu bringen.

Wäre der Taglohn p = 15 kr., so betragen die Frachtkosten 8 fl. 26¼ kr., und gegen diesen Betrag könnte die Arbeit in Akkord gegeben werden.

Benimmt sich hingegen der Arbeiter nach einer genauern Rechnung, wozu die pag. 67 aufgestellte Tabelle benützt werden kann, (wo aber für diesen Fall das dort angezeigte $\frac{B}{k}$ hier $\frac{B}{k'} = \frac{B . r}{k . R} = \frac{30}{30} . \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ist) so könnte er in einem Tage die Last

$$0{,}4904 . \frac{3600 . t . c . k'}{E} = 0{,}4904 . \frac{16000}{50} . 30 . 3 = 141 \text{ Zentner},$$ daher in einem Tage 13 Zentner mehr an Ort und Stelle bringen, folglich 10 Prozent mehr verdienen.

Die Anzahl Fuhren, die der Arbeiter täglich zu machen hätte, wäre nun

$$n = 0{,}4346 . \frac{3600 . t . c}{E} = 0{,}4346 . \frac{16000}{50} = 139,$$ und die Ladung, die er jedesmal in den Schuttkarren zu nehmen hat $= 1{,}1283 . k' = 1{,}1283 . 30 . 3 = 101{,}6$ ℔.

§. 83.

Fig. 1. Tab. 3. Unter einem Rade an der Welle versteht man einen Cylinder oder eine Welle BE, die mit einem Rade AD so verbunden ist, dass sich beide um die gemeinschaftliche Achse C herumdrehen. An dem Rade AD wirkt gewöhnlich die Kraft P und an der Welle BE die Last Q, welche mit einem um selbe herumgeschlungenen Seile in die Höhe gezogen wird. Die Achsen (Zapfen) sind von Eisen, im Mittelpunkte der Welle befestiget, und nur so stark, als nöthig ist, um die angehängte Last mit Sicherheit tragen zu können. Die eisernen Unterlagen, auf welchen sich die Achsen drehen, werden gewöhnlich Zapfenlager genannt.

Die Räder an der Welle zerfallen in zwei Arten: hat nämlich die Welle eine horizontale Lage, so heisst die Maschine ein Haspel; ist sie aber senkrecht aufgestellt, so heisst sie eine Winde.

§. 84.

Die **Haspeln** erhalten nach der Art, wie die Kraft dabei als wirkend angebracht ist, verschiedene Benennungen, und zwar:

1tens. **Hornhaspel**, wenn der Zapfen der Welle verlängert und zweimal gebogen ist, so dass der zweite Arm B, an welchem die Kraft wirkt, mit der Achse paralell läuft. Dem zweimal gebogenen Zapfen wird der Name **Krummzapfen**, **Kurbel** beigelegt. Fig. 1. Tab. 2.

2tens. **Kreuzhaspel**, wenn durch die Welle zwei Stäbe kreuzweis durchgesteckt werden, so dass sie vier unter rechten Winkeln zusammengesetzte Hebelsarme bilden. Der erste wird bei Bergwerken, Ziehbrunnen u. dgl. angewendet; der zweite dient zum Aufziehen grösserer Lasten, wo die Kurbelarme, deren Grösse durch den menschlichen Arm nur auf 12 bis 15 Zoll beschränkt ist, zu klein seyn würden. Fig. 2.

3tens. **Spillenrad**, **Spindelrad**, **Radhaspel** wird jene Art von Haspeln genannt, die ein vertikales Rad hat, in dessen Kranz kurze Stäbe oder Spillen befestigt sind, die so weit auseinander stehen, dass ein Mensch bei der Umdrehung des Rades bequem von einer Spille zur andern greifen kann. Das Spillenrad wird dann angewendet, wenn bei dem Kreuzhaspel die Arme für die Kraft zu gross seyn müssten, so dass die Arbeiter nicht mehr im Stande seyn würden, von einem Arme zum andern zu reichen. Fig. 3.

Die Spillen stehen auf der Peripherie des Rades in der Richtung der Halbmesser, wie Fig. 3., wenn aber die Räder grösser sind und mehr als zwei Arbeiter erfordert werden, so pflegt man sie durch den Radkranz wagrecht durchzustecken und so weit zu verlängern als nöthig ist, um eine bestimmte Anzahl Arbeiter dabei verwenden zu können.

§. 85.

Die **Winde**, welche man zuweilen auch **stehenden Haspel** nennt, wird hauptsächlich zum Aufziehen grösserer Lasten, als Bauhölzer, grosser Werkstücke u. dgl. verwendet, und zu diesem Zwecke auch oft mit einem sogenannten Flaschenzuge verbunden. Fig. 4.

Der **Schiffswinde** bedient man sich zu allen Arbeiten, die auf Schiffen vorkommen, z. B. zum Lichten der Anker, Anziehen der Schiffe ans Land u. dgl.; hiezu werden gegenwärtig auch **Kraniche** oder eine Zusammensetzung mehrerer Räder an der Welle gebraucht, von welchen später gehandelt werden wird.

Die **Erdwinde** wird zum Fortschaffen grosser Lasten auf der Erde angewendet. Sie wird nämlich an dem Orte, wohin die Last zu bringen ist, an eingeschlagene Pfähle befestigt, und die Last mittelst eines Seiles herangezogen. Ist die Last auf grössere Entfernungen fortzuschaffen, so wird die Entfernung in mehrere Stationen eingetheilt, und auf jeder Station das obige Verfahren wiederholt. Man pflegt zu dieser Absicht die Erdwinde auf Räder oder Rollen zu stellen, um sie leichter von einem Orte zum andern fortbringen zu können. Diese Maschine wird überhaupt nur in dem Falle gebraucht, wenn sehr grosse Lasten, welche man nicht auf Wägen aufladen kann, fortzuschaffen sind. Man unterlegt sodann der Last Balken, welche statt eines Wa- Fig. 5.

gengestelles dienen, womit auch die Fahrbahn belegt wird, um die Last über die Unebenheiten des Bodens leichter fortzubringen. Statt der Wagenräder werden massive Walzen angewendet, und die zu beiden Seiten der Fahrbahn aufgestellten Erdwinden, werden noch durch Flaschenzüge verstärkt, so wie es bei der Fortschaffung des Felsens, auf welchen das Monument Peter des Grossen zu St. Petersburg gestellt wurde, geschehen ist.

Bei Bergwerken, wo die Tiefe sowohl als auch die Last, die in einem Tage herausgebracht werden muss, sehr gross ist, pflegt man zur Betreibung der Winde die Kraft der Pferde anzuwenden, und in diesem Falle wird sie Göpel oder Treibmaschine genannt. Wir werden diesem Gegenstande später eine eigene Abhandlung widmen.

§. 86.

Bei allen angeführten Maschinen wird die Last mittelst eines um die Welle geschlungenen Seiles angezogen oder in Bewegung gesetzt, und da dieses Seil in allen Punkten seiner Länge gleichstark gespannt ist, so ist der Ort, wo die Last ihre Wirkung gegen die Maschine äussert, eigentlich der Punkt B, wo nämlich das Seil den Umkreis der Welle berührt. Die Richtung der Last kommt offenbar mit der Richtung des Seiles überein, nnd da diese mit dem Halbmesser der Welle einen rechten Winkel bildet, so können wir uns unter der Last eine Kraft vorstellen, die in dem Punkte B an dem Hebelsarme BC rechtwinkelig angebracht ist. Hiebei ist zugleich ersichtlich, dass unter dem Hebelsarme der Last BC eigentlich die Summe der Halbmesser der Welle und des Seiles verstanden werden müsse, und dass der letztere nur in dem Falle ausser Acht gelassen werden dürfe, wenn der Durchmesser der Welle so gross und dagegen der Durchmesser des Seiles so klein ist, dass der letztere als unbedeutend vernachlässigt werden kann. Auf gleiche Art muss auch die in D angebrachte Kraft ihre Wirkung nach der Richtung der Peripherie, folglich winkelrecht auf den Halbmesser CD äussern, wir können uns demnach auch den Halbmesser des Rades DC als einen Hebelsarm vorstellen, an welchem die Kraft winkelrecht wirkt, und da die Achse C für beide den unveränderlichen Stützpunkt abgibt, so gab der Umstand, dass alle Halbmesser eines jeden Kreises einander gleich sind, den Anlass, das Rad an der Welle als einen Hebel ohne Ende zu betrachten, mittelst welchen die Last von der an einer und derselben Stelle verharrenden Kraft auf eine willkührliche Höhe gehoben werden kann; ein Vortheil, welcher dem einfachen Hebel nicht zukommt. Daraus ist nun ersichtlich, dass sich in allen Punkten die Kraft zur Last verhält, wie der Hebelsarm BC zu DC, oder wie der (um den Halbmesser des Seils vermehrte) Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Fig. 1. Tab. 3.

§. 87.

Wir kommen nun zur Erklärung der Regeln, welche bei dem Gebrauche aller dieser Maschinen und zur Bewirkung ihres grösstmöglichen Effektes zu beobachten sind. Zur nöthigen Deutlichkeit wollen wir sogleich einen besondern Fall annehmen, hiebei aber auch die Abweichungen für die übrigen Fälle erklären. Es seyen mittelst eines Hornhaspels Baumaterialien auf das Baugerüst eines Gebäudes, oder

Erze aus einem Bergschachte auf die sogenannte Hängebank zu heben; die Höhe, auf welche diese Baumaterialien oder Erze gehoben werden sollen, wollen wir allgemein mit H bezeichnen; es frägt sich nun, wie viel bei jedem Aufzuge in die Tonne geladen, mit welcher Geschwindigkeit und durch wie viel Arbeitsstunden täglich gearbeitet werden soll, dann welches Verhältniss der Hebelsarme hiebei nothwendig oder zur Vermehrung des Effektes am zuträglichsten, und wie gross endlich das tägliche Arbeitsprodukt oder die Anzahl Zentner sey, welche von einer gegebenene Anzahl Arbeiter auf die gegebene Höhe H gehoben werden kann.

An dem Hornhaspel hat die Kraft bei jeder Umdrehung einen Kreis zu beschreiben, Fig. 2.
welcher den Arm der Kurbel $AC = R$ zum Halbmesser hat. In derselben Zeit wird die Tab.
Last auf eine Höhe gehoben, welche demjenigen Theile des Seiles gleich ist, der bei ei- 3.
ner Umdrehung auf die Welle aufgewunden wird, und daher die Summe der Halbmesser der Welle und des Seiles zum Halbmesser hat.

Da hiebei die Last immer nur an einem und demselben Punkte D oder Hebelsarme $CD = r$ angebracht ist, sonach ihre Erhebung einen gleichförmigen Widerstand entgegen setzt, so folgt, dass auch die Kraft an allen Punkten der Peripherie des Rades A, E, F, G.... einen gleichen Druck und zwar nach der Richtung der Peripherie oder winkelrecht auf die Hebelsarme CA, CE, CF, CG..... äussern müsse*). Wir haben demnach für die Kraft K an der Peripherie des Rades und für die Last Q an der Peripherie der Welle nach §. 86. die Gleichung $K.R = Q.r$. Setzen wir die Anzahl der Haspelzieher, welche zu gleicher Zeit den Bau- oder Berghaspel in Bewegung setzen $= N$, so ist

$$K = N.k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right).$$

Die aufzuziehenden Baumaterialien und Erze werden gewöhnlich in Tonnen geladen und am untern Ende des Seiles oder mittelst der sogenannten Quenzelkette befestigt. Setzen wir die Last, welche in die Tonne geladen wird $= Q$, das Gewicht der Tonne $= B$ und das Gewicht des Seiles $= S$, so würde für die ganze Last die Summe $Q + B + S$ anzunehmen seyn; da jedoch dieser Fall die Folgen nach sich ziehen würde, dass die leere Tonne nach ihrem Ausladen, wie auch das Seil wieder herabgelassen werden müsste, so pflegt man zur Verhüthung des hieraus entstehenden Zeit- und Kraftverlustes gewöhnlich zwei Tonnen anzuwenden, so, dass während des Ausladens der obern Tonne, die untere wieder eingeladen und auf solche Art die Kraft fortwährend ohne Unterbrechung nützlich beschäftigt wird. Die Ungleichheiten, welche bei sehr tiefen Bergschachten aus dem Gewichte des Seiles noch übrig bleiben, werden wir erst später bei dem Pferdegöpel besonders in Rechnung nehmen, und hier wegen der Unbedeutenheit der Gewichte der

*) Die Bedenklichkeit, ob auch der menschliche Arm diess zu thun im Stande sey, was für Ungleichheiten in der Bewegung des Rades hieraus erfolgen, und die Mittel, wie dieselben zu verhüthen und eine möglichst gleichförmige Bewegung zu bewirken sey, werden wir später bei der ungleichförmigen Bewegung und bei den Schwungrädern abhandeln. Indess ist bei der Winde, wo die Kraft um die stehende Welle herumgeht, wie auch bei dem Tret- und Spillenrade, wo sich die Kraft immerfort an einer und derselben Stelle befindet, für die winkelrechte Richtung der Kraft vollkommen gesorgt.

Seile und der Höhe eines Baugerüstes ausser Acht lassen. Wir haben demnach die Ladung $Q = K \cdot \frac{R}{r} = \frac{R}{r} \cdot N \cdot k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$.

Da hier angenommen wird, dass die Kraft K an dem Hebelsarme $AC = R$ in einer Sekunde den Raum v zurücklegt, so wird in derselben Zeit die Last Q an dem Hebelsarme r einen Raum v' beschreiben, welcher sich zu dem Raume der Kraft (v) verhält, wie r zu R oder $v' : v = r : R$, hieraus folgt $v' = \frac{r}{R} \cdot v$. Wir finden demnach die Zeit eines Aufzuges aus folgender Proportion: Der Raum v' oder $\frac{r}{R} \cdot v$ wird in einer Sekunde zurückgelegt, folglich die Höhe H in der Zeit eines Aufzuges $\tau^{Sec.} = \frac{H \cdot R}{v \cdot r}$.

Wird nun die Anzahl Sekunden (3600 . z), welche in einem Tage zur wirklichen Arbeit verwendet wird, mit der Zeit eines Aufzuges $\left(\frac{H \cdot R}{v \cdot r}\right)$ dividirt, so ist die Anzahl der täglichen Aufzüge $n = \frac{3600 \cdot z \cdot v \cdot r}{H \cdot R}$.

Bei jedem Aufzuge wird die Last Q auf die Höhe H gebracht, es wird also in einem Tage die Last n . Q aufgezogen. Setzen wir nun statt n und Q die oben gefundenen Werthe, so ist der Effekt $n \cdot Q = \frac{3600 \cdot z \cdot v \cdot r}{H \cdot R} \cdot \frac{R}{r} \cdot N \cdot k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$
$= \frac{3600 \cdot z \cdot v}{H} \cdot N \cdot k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$.

Diese Tagesarbeit wird, so wie wir bereits bei dem Tragen der Lasten §. 35 gezeigt haben, am grössten, wenn $\frac{v}{c} = 1$ und auch $\frac{z}{t} = 1$ gemacht wird; folglich ist **die Wirkung der Maschine am grössten, wenn sie von den Arbeitern mit der mittlern Geschwindigkeit c und durch die mittlere Arbeitszeit t betrieben wird.** Der grösste Effekt oder die Last, welche in einem Tage auf die Höhe H gehoben wird, ist daher $= \frac{3600 \cdot t \cdot c}{H} \cdot N \cdot k$;

die Last, welche einmal in die Tonne geladen wird $= \frac{R}{r} \cdot N \cdot k$; die Geschwindigkeit der Haspelzieher bei der Arbeit $v = c$; die Anzahl ihrer täglichen Arbeitsstunden $z = t$; die Zeit eines Aufzuges $\tau^{Sec.} = \frac{H \cdot R}{c \cdot r}$, endlich die Anzahl der Aufzüge in einem Tage $= \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot r}{H \cdot R}$.

§. 88.

In der Gleichung für den Effekt $n \cdot Q = \frac{3600 \cdot t \cdot c}{H} \cdot N \cdot k$ ist 3600 . t . c offenbar der Raum, den die Kraft in einem Tage zurücklegen kann, also für einen mittelmässigen Arbeiter, dessen Geschwindigkeit $c = 2\frac{1}{2}$ Fuss ist, 3 deutsche Meilen oder 12000 Klafter,

und für einen stärkern Arbeiter, dessen mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{10}{3}$ Fuss ist, 4 Meilen oder 16000 Klafter. Wird nun diese Entfernung mit der Höhe H, auf welche die Last zu heben ist, dividirt, und der Quozient mit der mittlern Kraft (k) multiplicirt, so ergibt sich der Effekt oder die gesammte Last, die in einem Tage von einem Arbeiter auf die Höhe H gebracht wird. Es versteht sich hiebei von selbst, dass diese Last für zwei Arbeiter verdoppelt und überhaupt für N Arbeiter N mal genommen werden müsse.

Beispiel. Es sey die Höhe, auf welche Baumaterialien zu heben sind, $H = 8$ Klafter, und wir wollen annehmen, dass die Arbeiter, welche bei der Maschine verwendet werden, das Vermögen haben, 25 ℔ täglich auf die Entfernung von 3 Meilen oder 12000 Klafter zu tragen.

Für diesen Fall gibt die Gleichung $n.Q = \frac{3600.t.c}{H} \cdot N.k = \frac{12000}{8}.25 ℔ = 37500 ℔$ oder 375 Zentner für einen Arbeiter. Wenn aber 2 Arbeiter verwendet werden, so ist ihr tägliches Arbeitsprodukt 2 mal 375 Zentner, oder sie sind im Stande, auf die gegebene Höhe von 8 Klaftern täglich 750 Zentner zu heben. Wäre die Höhe $H = 15$ Klafter, so würden dieselben zwei Menschen nur die Last $n.Q = \frac{12000}{15} \cdot 2.25 = 400$ Zentner, und für den Fall, wenn z. B. die Tiefe eines Bergschachtes 25 Klafter beträgt, täglich bloss die Last $n.Q = \frac{12000}{25} \cdot 2.25$ ℔ $= 240$ Zentner zu heben im Stande seyn

§. 89.

Wenn wir in der Gleichung für das tägliche Arbeitsprodukt $n.Q = \frac{3600.t.c}{H} \cdot N.k$ zu beiden Seiten mit H multipliciren, so erhalten wir $n.Q \times H = 3600.t.c \times N.k$. Hieraus ist zu ersehen, dass bei allen solchen Arbeiten das Bewegungsmoment, welches sich ergibt, wenn das täglich aufgezogene Quantum n.Q mit der Höhe H multiplicirt wird, genau so gross ist, als dasjenige Bewegungsmoment, welches dieselben Arbeiter beim Tragen der Lasten auf horizontalem Wege besitzen, folglich **mittelst der Maschine genau dasselbe thun, was sie ohne Maschine zu leisten vermögen.**

Hiebei fällt es zwar Jedermann auf, wie es komme, dass die Maschine zur Vermehrung der täglichen Arbeit gar nichts beitrage, da doch bekannt ist, dass die Hebelsarme auf die Grösse der zu hebenden Last von dem grössten Einflusse sind.

Dieser Einwurf verschwindet aber bei der Betrachtung, dass die Kraft z. B. durch einen dreimal grösseren Hebelsarm zwar in Stand gesetzt wird, eine dreimal grössere Last zu heben; da jedoch in demselben Falle die Kraft einen dreimal grösseren Raum zurückzulegen hat, folglich hiezu dreimal mehr Zeit verwenden muss, so wird die Anzahl der Aufzüge in jedem Tage dreimal kleiner werden, demnach bei der Multiplikation der grössern Last in die eben sovielmal kleinere Anzahl Aufzüge dasselbe Produkt zum Vorschein kommen müssen.

Dagegen gewährt aber die Maschine den **wesentlichen Vortheil**, dass man durch eine angemessene Bestimmung der Verhältnisse ihrer Bestandtheile eine jede Kraft

in den Stand setzen kann, sehr grosse oder solche Lasten in Bewegung zu setzen, und an Ort und Stelle zu bringen, die sie ohne Hilfe der Maschine ganz und gar nicht zu bewegen im Stande wäre. Werkstücke oder grosse Quadersteine, Glocken, Obelisken oder andere Denkmale der ältern oder neuern Zeit, die nicht zerschlagen und stückweise an Ort und Stelle geschafft werden dürfen, und auch an ihrem Umfange nicht den Raum gewähren, so viele Menschen daran anzustellen, als zum Tragen einer so grossen Last nöthig wären, lassen sich mittelst Maschinen von der gegebenen Anzahl Arbeiter gewältigen und auf jede Höhe hinaufbringen. In allen diesen Fällen wird nämlich das Verhältniss der Hebelsarme durch die Gleichung $\frac{r}{R} = \frac{N.k}{Q}$ bestimmt.

§. 90.

Es kann jedoch hiebei der Fall vorkommen, dass dieses Verhältniss für die Aus-
Fig. führung zu gross wird. In diesem Falle wird eine V e r b i n d u n g von m e h r e r e n R ä-
3. Tab. d e r n angewendet. Es sey zu dieser Absicht die Last Q an dem Halbmesser der Welle
3. EM angebracht, statt der Spillen befinden sich an der Peripherie des Rades Z ä h n e. In diese greifen die an einer zweiten Welle DD′ angebrachten sogenannten T r i e b s t ö c k e p, p, p ein, welche durch die am Punkte A des zweiten Rades OO′ angebrachte Kraft P in Bewegung gesetzt werden. Es seyen die Halbmesser $EM = a$, $DM = A$, $CD = b$ und $AC = B$. Man denke sich an dem Punkte D eine Kraft (y) angebracht, welche die Last Q mittelst des ersten Rades zu heben im Stande seyn würde, so haben wir nach §. 86. $Q \cdot a = y \cdot A$ und eben so für das zweite Rad $y \cdot b = P \cdot B$. Die Multiplikation dieser beiden Gleichungen gibt: $Q \cdot a \cdot b = P \cdot A \cdot B$.

Setzen wir statt P die mittlere Kraft N.k, so folgt $\frac{A \cdot B}{a \cdot b} = \frac{Q}{N \cdot k}$. Es sey z. B. $Q = 50$ Zentner und N.k wie zuvor $= 50$ ℔, so ist $\frac{A \cdot B}{a \cdot b} = \frac{5000}{50} = 100$. Nehmen wir nun für $\frac{A}{a} = 10$ und $\frac{B}{b} = 10$, so ist für den Fall, wo $a = 6$ Zoll und $b = 4$ Zoll gesetzt wird, $B = 40$ Zoll $= 3$ Fuss 4 Zoll und $A = 60$ Zoll $= 5$ Fuss. Bei diesen Hebelsarmen verhält sich die Kraft N.k zur Last Q wie a.b zu A.B oder 50 ℔ : 5000 ℔ $= 4'' \cdot 6'' : 40'' \cdot 60'' = 1 : 100$; es wird also die Kraft von 50 ℔ die 100mal grössere Last von 50 Zentnern zu heben im Stande seyn. Die Zeit eines Aufzuges ist in diesem Falle $= \frac{H \cdot A \cdot B}{c \cdot a \cdot b}$; setzen wir also die Höhe $H = 8$ Klafter $= 48$ Fuss, so ist die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H}{c} \cdot \frac{A \cdot B}{a \cdot b} = \frac{48}{2{,}5} \cdot \frac{100}{1} = 1920^{\text{Sec.}}$ oder $32^{\text{Min.}}$ Mithin können in 8 Arbeitsstunden $\frac{8 \cdot 3600}{1920} = 15$ Aufzüge geschehen, und die in dieser Zeit hinaufgeschaffte Last beträgt 15×50 Zentner $= 750$ Zentner, also eben soviel, wie in der letzten Aufgabe von zwei Arbeitern bewirkt wurde.

§. 91.

Ein anderer wesentlicher Vortheil der Maschine besteht noch darin, dass die dabei angestellten Arbeitsleute während ihrer Arbeit an einem und demselben Orte verbleiben,

folglich von Seite ihres Körpers kein Hinderniss zu gewältigen haben, welches sehr gross seyn würde, wenn sie dieselbe Last über eine schiefe Fläche oder über ein Baugerüst hinauf zu tragen hätten, wovon später bei der schiefen Fläche umständlicher gehandelt werden wird.

§. 92.

Bei den bisherigen Rechnungen ist das Aufziehen allein, ohne Rücksicht auf andere Nebenumstände in Betrachtung gezogen worden. Hiebei ist aber noch zu bemerken, dass vor jedem Aufzuge die Last Q unten in die Tonne eingeladen und nach vollendetem Aufzuge oben aus der Tonne ausgestürzt und weggeführt werden müsse. Da die Haspelzieher auf dem Gerüste verbleiben, so ergibt sich von selbst, dass das Einladen und Herbeiführen der Baumaterialien von andern Arbeitern zu geschehen habe. Eben so kann das Ausstürzen und Wegführen der aufgezogenen Last von denselben oder auch von andern Arbeitern besorgt werden. Im ersten Falle, wenn die Haspelzieher zugleich die heraufgebrachte Ladung wegführen oder den übrigen Arbeitern auf dem Baugerüste zuführen, ergibt sich von selbst, dass hierüber ein eigener Anschlag gemacht werden und sonach die hierauf verwendete Zeit dem Aufziehen entgehen müsse. Wenn jedoch der Zweck dieser Arbeiten dahin gerichtet ist, dass eine möglichst grosse Last von den am Haspel angestellten Arbeitern auf das Baugerüst gebracht, oder aus einem Bergwerke zu Tag gefördert werde, so können diese Umstände nicht berücksichtigt und nur der Fall betrachtet werden, wenn die Haspelzieher das Aufziehen allein zu besorgen haben.

Hiebei ist nun zu bemerken, dass den Arbeitern nach jedem Aufzuge eine Zeit zur Erholung gegönnt werden müsse, und wir haben in dieser Hinsicht bereits §. 19 angeführt, dass von den Arbeitern zwar gefordert wird, täglich 12 Stunden in der Arbeit zu verbleiben, dass jedoch von diesen 12 Stunden nur 8 Stunden auf die wirkliche Arbeit, sonach 4 Stunden für die dazwischen vorkommenden Stillstände anzuschlagen sind; es wird demnach die Ruhezeit nach jedem Aufzuge die Hälfte der Zeit des Aufzuges oder der wirklichen Arbeit betragen.

Es kann sich jedoch der Fall ergeben, dass diejenigen, welche die Baumaterialien zuzuführen und in die Tonne einzuladen haben, mit dieser Arbeit in der für die Haspelzieher bemessenen Ruhezeit nicht fertig werden. Auch kann der entgegengesetzte Fall eintreten, dass man von den Haspelziehern eine möglichst ununterbrochene Arbeit fordert, wie dieses bei den Bergwerken der Fall ist, wo die Arbeiter erst nach vollbrachten 8 Arbeitsstunden ihrer Ruhe pflegen, jedoch nach jedem Aufzuge durch die kurze Zeit, welche zum Anschlagen und Ausstürzen der Tonne erfordert wird, unbeschäftigt bleiben und auf solche Art nebst den bis zu 12 Stunden noch übrigen 4 Tagesstunden auch noch diese kurzen Stillstandszeiten ohne Beschäftigung sind. Weil aber jedem Bauherren daran liegt, die aufgenommenen Arbeiter ohne übermässige Anstrengung dennoch vollkommen zu beschäftigen; so ist es nöthig, die Ladung Q in die Tonne grösser als das vorhin berechnete $N.k.\frac{R}{r}$ zu nehmen, um dadurch den Verlust, der durch die längere Ruhezeit dem Effekte entgeht, soviel als möglich zu ersetzen.

Zu dieser Absicht sey im ersten Falle die nach jedem Aufzuge nöthige Stillstands- oder Ruhezeit $= \varrho$ gegeben. Es wird nun am zweckmässigsten seyn, diese Ruhezeit der halben Zeit des Aufzuges oder $\varrho = \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{2c}$ zu setzen, aus dieser Gleichung das Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r} = \varrho \cdot \frac{2c}{H}$ zu bestimmen, und dadurch die Bedingnisse der bisherigen Auflösung, dass nämlich die Ruhezeit der halben Zeit des Aufzuges gleich seyn solle, zu erfüllen.

Beispiel. Es sey die nöthige Stillstandszeit $\varrho = 2^{\text{Min.}} = 120^{\text{Sec.}}$, die Höhe, auf welche die Last gebracht werden soll $H = 8$ Klafter $= 48$ Fuss und die mittlere Geschwindigkeit der Arbeiter $c = 2{,}5$ Fuss, so wird die Zeit eines Aufzuges $\frac{H.R}{c.r} = 2 \times 120 = 240^{\text{Sec.}}$ seyn müssen; hieraus folgt $\frac{R}{r} = \frac{240.2{,}5}{48} = \frac{50}{4}$. Wenn also $r = 4$ Zoll ist, so wird $R = 50$ Zoll $= 4$ Fuss 2 Zoll seyn müssen; folglich wird die Last, welche für zwei Arbeiter in die Tonne zu laden ist, $Q = \frac{R}{r}.N.k = \frac{50}{4}.2.25 = 625$ ℔ betragen. Da die Zeit eines Aufzuges $= 2 \times 2 = 4^{\text{Min.}}$ ist, so werden in 8 Arbeitsstunden $\frac{8.60}{4} = 120$ Aufzüge geschehen, und daher die aufgebrachte Last 625mal 120 oder 75000 ℔ oder 750 Zentner seyn, so wie es §. 90. für dieselben 2 Arbeiter gefunden wurde.

§. 93.

Wäre aber nebst der Ruhezeit ϱ auch noch das Verhältniss $\frac{R}{r}$ gegeben, so würde man auf die im §. 87. gegebenen Gleichungen zurückgehen müssen; dort war nämlich die jedesmalige Ladung $Q = N.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)\frac{R}{r}$ (I), die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H.R}{v.r}$ (II), die Anzahl der täglich zu machenden Aufzüge $n = \frac{3600.z.v.r}{H.R}$ (III), und endlich das ganze in einem Tage gehobene Quantum $n.Q = \frac{3600.t.c}{H}.N.k.\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ (IV).

Den grösstmöglichen Effekt haben wir erhalten, indem wir sowohl $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)$ als auch $\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ ein jedes für sich zum Maximum machten. Dieses konnte geschehen, weil in den bisherigen Aufgaben keine Bedingniss enthalten war, wodurch auf eine Abhängigkeit dieser beiden Verhältnisse $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ von einander hätte geschlossen werden können. Wenn aber die Zeit der Ruhe ϱ nach jedem Aufzuge gegeben ist, so lässt sich die Anzahl der Aufzüge auch aus der Zeit des ganzen Arbeitstages berechnen, und da diese mit der oben (in III) gefundenen übereinstimmen muss, so folgt hieraus noch eine Gleichung, wodurch die Verhältnisse $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ von einander abhängig werden.

Wenn wir nämlich zur Zeit eines Aufzuges $\frac{H.R}{v.r}$ noch die Zeit der Ruhe hinzusetzen, so ist die ganze auf einen Aufzug verwendete Zeit $\frac{H.R}{v.r} + \varrho$, und da in jedem Tage die Zeit der Arbeit sammt Ruhe 12 Stunden $= \frac{3}{2}t$ ist, so haben wir zur Berechnung der An-

zahl der Aufzüge in jedem Tage noch die Proportion: In der Zeit eines Aufzuges $\left(\frac{H.R}{v.r}\right)$ und der hiezu kommenden Ruhezeit (ϱ) wird die Last einmal aufgezogen, also wird in der Zeit eines ganzen Tages $(12^h = 3600.\tfrac{3}{2}.t^{Sec.})$ die Anzahl der Aufzüge n betragen, oder $\frac{H.R}{v.r} + \varrho : 1 = 3600.\tfrac{3}{2}.t : n$. Hieraus ist die Anzahl der täglichen Aufzüge $n = \frac{3600.\tfrac{3}{2}t}{\frac{H.R}{v.r} + \varrho}$ (V), und da diese der oben (in III) angeführten Anzahl Aufzüge gleich seyn muss, so erhalten wir die Gleichung $\frac{3600.z.v.r}{H.R} = \frac{3600.\tfrac{3}{2}t}{\frac{H.R}{v.r} + \varrho}$; demnach ist:

$$\frac{z}{t} = \frac{3}{2\left(1 + \frac{\varrho.v.r}{H.R}\right)} = \frac{3}{2 + 2\varrho.\frac{r.c}{R.H}.\frac{v}{c}} \text{ (VI)}.$$

Setzen wir nun die Zeit eines Aufzuges, so wie sie für die mittlere Geschwindigkeit ausfällt, $\frac{H}{c}.\frac{R}{r} = \alpha$, so ist auch $\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + \frac{2\varrho}{\alpha}.\frac{v}{c}}$, welche Gleichung die Abhängigkeit der Verhältnisse $\frac{z}{t}$ und $\frac{v}{c}$ ersichtlich macht. Weil wir aber anstatt v die Grösse $c - (c - v)$ setzen können, so ist auch

$$\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + \frac{2\varrho}{\alpha}.\frac{c}{c} - \frac{2\varrho}{\alpha}\left(\frac{c-v}{c}\right)} = \frac{3}{2 + \frac{2\varrho}{\alpha} - \frac{2\varrho}{\alpha}\left(\frac{c-v}{c}\right)}.$$

In dieser Gleichung kann die Grösse $\frac{2\varrho}{\alpha}\left(\frac{c-v}{c}\right)$ gegen die Grössen $2 + \frac{2\varrho}{\alpha}$ um so mehr weggelassen werden, weil aus allen bisherigen Aufgaben hinlänglich erhellet, dass die Geschwindigkeit v von der mittlern nicht viel verschieden seyn darf, folglich $\frac{c-v}{c}$ ein möglichst kleiner Bruch werden muss. In dieser Hinsicht wollen wir dieses Glied einstweilen aus der Rechnung weglassen, demnach $\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + \frac{2\varrho}{\alpha}}$ setzen.

Nach den Bedingnissen unserer Aufgabe ist die Ruhezeit ϱ grösser als die halbe Zeit eines Aufzuges $\frac{\alpha}{2}$, wir wollen demnach $\varrho = \frac{\alpha}{2}(1 + \mu)$ setzen.
Dadurch wird $\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + 1 + \mu} = \frac{3}{3 + \mu} = 1 - \frac{\mu}{3 + \mu}$ und $2 - \frac{z}{t} = 1 + \frac{\mu}{3 + \mu}$; daher ist $\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right) = 1 - \left(\frac{\mu}{3 + \mu}\right)^2$.

Diese Werthe in die allgemeine Gleichung für den Effekt gesetzt, geben:

$$n.Q = \frac{3600.t.c}{H}.N.k.\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right) =$$

$$\frac{3600.t.c}{H}.N.k.\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left\{1 - \left(\frac{\mu}{3 + \mu}\right)^2\right\}.$$

Da hier ausser dem Produkte $\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)$ alle Grössen gegeben sind, so ist für den

grössten Effekt nur noch $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)$ zu einem Maximum zu machen, welches geschieht, wenn $\frac{v}{c}=1$ ist, wodurch also auch die obige Bedenklichkeit wegen Weglassung der Grösse $\frac{2}{\alpha}\left(\frac{c-v}{c}\right)$ von selbst entfällt.

Aus den Bestimmungen $\frac{v}{c}=1$ und $\frac{z}{t}=1-\frac{\mu}{3+\mu}$ ergeben sich nun folgende Werthe: für die Ladung $Q=N.k\cdot\frac{R}{r}\left(1+\frac{\mu}{3+\mu}\right)$, für die Zeit eines Aufzuges $\alpha=\frac{H.R}{c.r}$, für die Anzahl der Aufzüge in einem Tage $n=\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}\left(1-\frac{\mu}{3+\mu}\right)$, und endlich für den Effekt $n.Q=\frac{3600.t.c}{H}\cdot N.k\left\{1-\left(\frac{\mu}{3+\mu}\right)^2\right\}$.

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, dass für den Fall, wenn die Stillstandszeit nach jedem Aufzuge grösser ist als die halbe Zeit eines Aufzuges, die Ladung in der Tonne um $N.k\cdot\frac{R}{r}\left(\frac{\mu}{3+\mu}\right)$ vermehrt, dagegen aber die Anzahl der Aufzüge um die Grösse $\frac{3600\,t.c.r}{H.R}\left(\frac{\mu}{3+\mu}\right)$ vermindert werden müsse.

B e i s p i e l. Es sey wie im vorigen Beispiele die Höhe $H=48$ Fuss, $\frac{R}{r}=\frac{50}{4}$, die Zeit des Stillstandes nach jedem Aufzuge 4mal so gross als die halbe Aufzugszeit oder 2mal so gross als die Zeit eines Aufzuges, oder $\varrho=\frac{4\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}(1+\mu)$, folglich $\mu=3$. Mit diesen Werthen erhalten wir die jedesmalige Ladung für zwei Arbeiter oder für $N=2$
$Q=N.k.\frac{R}{r}\cdot\left(1+\frac{\mu}{3+\mu}\right)=50\cdot\frac{50}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)$ ℔ $=625\left(1+\frac{1}{2}\right)=937\frac{1}{2}$ ℔ statt der vorigen 625 ℔;
die Zeit eines Aufzuges $\frac{H.R}{c.r}=\frac{48}{2{,}5}\cdot\frac{50}{4}=240^{\text{Sec.}}$, wie zuvor; die Anzahl der Aufzüge $n=\frac{3600.t.c.r}{H.R}\left(1-\frac{\mu}{3+\mu}\right)=\frac{12000}{8}\cdot\frac{4}{50}\left(1-\frac{1}{2}\right)=120\left(1-\frac{1}{2}\right)=60$ statt der vorigen 120; endlich den Effekt $n.Q=60\times937{,}5$ ℔ $=56250$ ℔.

Daraus sehen wir, dass in die Tonne zwar um die Hälfte mehr, oder $625\cdot\frac{3}{2}$ ℔ geladen, dagegen aber um die Hälfte weniger oder nur $\frac{1}{2}\cdot120$ Aufzüge gemacht, im Ganzen also nur $\frac{3}{4}\cdot625.120$ ℔ auf die Höhe H gebracht werden könne.

§. 94.

Die bisherige Rechnung beruht auf der Voraussetzung, dass in der Gleichung $\frac{z}{t}=\frac{3}{2+\frac{2\varrho}{\alpha}\cdot\frac{v}{c}}$ die Geschwindigkeit $v=c$ gesetzt oder das Verhältniss der Arbeitsstun-

den nach der mittlern Geschwindigkeit berechnet werden könne. Obwohl dagegen nicht viel einzuwenden seyn dürfte, weil die Geschwindigkeit in jedem Falle von der mittlern c nicht viel abweichen darf, so können wir doch zur grössern Genauigkeit auch noch diesen Umstand in Rechnung nehmen. Wir haben bereits gefunden, dass das Verhältniss der Arbeitszeit $\frac{z}{t}$ durch die Gleichung $\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + \frac{2\varrho}{\alpha} \cdot \frac{v}{c}}$ zu bestimmen sey. Zur Abkürzung wollen wir $\frac{2\varrho}{\alpha} = p$, sonach $\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + p \cdot \frac{v}{c}}$ und so wie Anfangs

die jedesmalige Last $Q = N.k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)\frac{R}{r}$,

die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H.R}{v.r} = \frac{H.R}{c.r} \cdot \frac{c}{v} = \frac{\alpha . c}{v}$,

die Anzahl der Aufzüge $n = \frac{3600.t.c}{H} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{v}{c} \cdot \frac{z}{t} = \frac{3600.t.c}{H} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{v}{c} \left\{\frac{3}{2 + p \cdot \frac{v}{c}}\right\}$

und den Effekt $= \frac{3600.t.c}{H} \cdot N.k \cdot \frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ setzen.

In dieser letzten Gleichung muss noch der Werth von $\frac{z}{t}$ substituirt und mittelst der Differentialrechnung derjenige Werth von $\frac{v}{c}$ bestimmt werden, bei welchem das Produkt $n.Q$ ein Maximum wird *).

*) Das Produkt $\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ wird am grössten, wenn der Logarithmus dieses Produktes nämlich $\log \frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right) + \log. \frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ ein Maximum ist; hiezu ist erforderlich, dass

$$\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)} 2\, d\, \frac{v}{c} + \frac{\left(1 - \frac{z}{t}\right)}{\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)} 2\, d\, \frac{z}{t} = 0$$

gesetzt werde. Oben wurde gefunden

$$\frac{z}{t} = \frac{3}{2 + p \cdot \frac{v}{c}};$$

demnach ist

$$1 - \frac{z}{t} = \frac{p \cdot \frac{v}{c} - 1}{p \cdot \frac{v}{c} + 2} \text{ und } 2 - \frac{z}{t} = \frac{\frac{2p.v}{c} + 1}{\frac{p.v}{c} + 2} \text{ und}$$

$$d\,\frac{z}{t} = \frac{-3p \cdot \frac{dv}{c}}{\left(\frac{p.v}{c} + 2\right)^2}.$$

Diese Werthe in die obige Differentialgleichung gesetzt, geben

$$\frac{1 - \frac{v}{c}}{\frac{v}{c}\left(2 - \frac{v}{c}\right)} - \frac{\left(\frac{p.v}{c} - 1\right) p}{\left(\frac{p.v}{c} + 2\right)\left(\frac{2p.v}{c} + 1\right)} = 0.$$

Hieraus folgt die Gleichung

§. 95.

Um die weitläufigen Rechnungen, welche in jedem besondern Falle nöthig seyn würden, zu ersparen, haben wir die beiliegende Tabelle berechnen lassen, worin in der ersten Columne die Verhältnisse der Ruhezeit nach jedem Aufzuge zur halben Zeit eines Aufzuges $\left(p = \frac{\varrho}{\frac{\alpha}{2}}\right)$ für die öfter vorkommenden Fälle angeführt sind. In der 2ten Columne ist das Verhältniss der Geschwindigkeiten $\frac{v}{c} = 1 - u$ durch Auflösung der unten angeführten, mittelst der Differentialrechnung gefundenen Gleichung

$$u^3 - 3u^2\left(\frac{p+2}{p}\right) + u\left(\frac{3p+2}{p}\right)\left(\frac{p+1}{p}\right) - \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0$$

berechnet worden. Man hat die Rechnung bis auf 4 Decimalstellen richtig zu stellen gesucht, um bei dem Gebrauche dieser Tabelle noch von der dritten Decimalstelle, oder in gewöhnlichen Fällen noch von den Pfunden versichert zu seyn. Die 3te Columne oder das Verhältniss der Arbeitsstunden $\frac{z}{t}$ ist nach der Gleichung

$$\frac{3}{2\left(1 + \frac{\varrho}{\alpha} \cdot \frac{v}{c}\right)} = \frac{3}{2 + p \cdot \frac{v}{c}}$$

berechnet worden. Für die künftigen Columnen sind die Berechnungsformeln in der obern Reihe angeführt, und in denselben nur die in der 2ten und 3ten Columne gefundenen Werthe für $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ substituirt worden.

$\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(\frac{p.v}{c} + 2\right)\left(\frac{2\,p.v}{c} + 1\right) = p\left(\frac{p.v}{c} - 1\right)\left(2 - \frac{v}{c}\right)\frac{v}{c}$. Zur Abkürzung wollen wir setzen $1 - \frac{v}{c} = u$ oder $\frac{v}{c} = 1 - u$, so erhalten wir

$u(p - p.u + 2)\,(2p - 2p.u + 1) = p\,(p - p.u - 1)\,(1 - u^2)$. Wird nun diese Gleichung nach den Potenzen von u geordnet, so ist: $u^3 - 3u^2\left(\frac{p+2}{p}\right) + u\left(\frac{3p+2}{p}\right)\left(\frac{p+1}{p}\right) - \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0.$

Um diese Gleichung auf dem kürzesten Wege aufzulösen, ist zu bemerken, dass die Grösse u in jedem Falle ein sehr kleiner Bruch sey, wie es aus der Gleichung $\frac{v}{c} = 1 - u$ erhellet, weil das Verhältniss $\frac{v}{c}$ sehr nahe $= 1$ seyn muss. Wir können demnach in der gedachten Gleichung die Glieder mit der 2ten und 3ten Potenz weglassen, und erhalten dadurch beinahe

$u\left(\frac{3p+2}{p}\right)\left(\frac{p+1}{p}\right) - \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0$, sonach $u = \frac{(p-1)\,p}{(3p+2)(p+1)}$.

Mit diesem Näherungswerthe von u lässt sich nun nach der, für die Auflösung der höheren Gleichungen bekannten Approximations-Methode der Werth von u so genau bestimmen, als man es wünscht. Wenn nun auf solche Art der Werth von u gefunden ist, so gibt die Gleichnng $\frac{v}{c} = 1 - u$ das vortheilhafteste Verhältniss von $\frac{v}{c}$, mit welchem sodann auch das Verhältniss der Arbeitszeit $\frac{z}{t}$, die Anzahl der Aufzüge n, die Ladung Q und der tägliche Effekt n . Q nach den hiezu angeführten Gleichungen berechnet werden kann.

Tabelle

über die vortheilhaftesten Verhältnisse bei dem Aufziehen der Lasten mittelst des Rades an der Welle mit Rücksicht auf eine, nach jedem Aufzuge gegebene Stillstandszeit.

$p = \frac{2\varrho}{\alpha}$	Vortheilhafteste Verhältnisse für		Zeit eines Aufzuges $\frac{H.R}{c.r}\cdot\frac{c}{v}$	Anzahl der täglichen Aufzüge $n = \frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{v}{c}\cdot\frac{z}{t}$	Vortheilhafteste Ladung $Q = N.k.\frac{R}{r}\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$	Der grösste Effekt in einem Tage $n.Q$
	$\frac{v}{c}$	$\frac{z}{t}$				
1	1,0000	1,0000	$1{,}0000\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$1{,}0000\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}0000.N.k.\frac{R}{r}$	$1{,}0000\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
1,5	0,9514	0,8754	$1{,}0511.\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}8329\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}1793.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}9822\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
2	0,9084	0,7860	$1{,}1008\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}7140\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}3252.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}9462\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
2,5	0,8706	0,7183	$1{,}1486\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}6254\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}4476.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}9053\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
3	0,8375	0,6648	$1{,}1940\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}5568\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}5522.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}8643\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
3,5	0,8083	0,6212	$1{,}2372\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}5021.\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}6431.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}8250\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
4	0,7822	0,5849	$1{,}2784\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}4575\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}7233.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}7884\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
4,5	0,7586	0,5541	$1{,}3182\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}4203\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}7949.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}7544\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
5	0,7373	0,5276	$1{,}3563\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}3890\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}8592.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}7232\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
5,5	0,7180	0,5043	$1{,}3928\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}3621\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}9175.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}6943\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$
6	0,7002	0,4838	$1{,}4282\cdot\frac{H.R}{c.r}$	$0{,}3388\cdot\frac{3600.t.c}{H}\cdot\frac{r}{R}$	$1{,}9708.N.k.\frac{R}{r}$	$0{,}6677\cdot\frac{3600.t.c}{H}.N.k$

Um den Gebrauch dieser Tabelle zu zeigen, wollen wir die letzte Aufgabe hier nochmals in Rechnung nehmen. Es sey nämlich wie dort die Höhe, auf welche die Last zu heben ist, $H = 48$ Fuss; das Verhältniss der Hebelsarme der Maschine wie zuvor

$\frac{R}{r} = \frac{50}{4}$, die mittlere Geschwindigkeit der Arbeiter $c = 2{,}5$ Fuss, die Zeit eines Aufzuges bei der mittlern Geschwindigkeit, $\alpha = \frac{H.R}{c.r} = 240^{Sec.} = 4^{Min.}$, die Ruhezeit nach jedem Aufzuge $\varrho = 8^{Min.}$, folglich $p = \frac{2\varrho}{\alpha} = \frac{2.8}{4} = 4$.

Wenn man nun für den Werth $p = 4$ in der Tabelle die in derselben horizontalen Linie stehenden Zahlen nimmt, so erhält man für die vortheilhafteste Geschwindigkeit $\frac{v}{c} = 0{,}7822$, demnach $v = 2{,}5 \,.\, 0{,}7822 = 1{,}9555$ Fuss; die Zeit eines Aufzuges $= 5^{Min.}\, 7^{Sec.}$; die Zahl der Arbeitsstunden $\frac{z}{t} = 0{,}5849$ oder $z = 0{,}5849\, t = 4^{h}\, 40^{Min.}\, 45^{Sec.}$, die Anzahl der Aufzüge $n = \frac{3600\,.\,t\,.\,c}{H}\,\frac{r}{R} \cdot 0{,}4575 = 54{,}9$ oder 55; die jedesmalige Ladung $Q = N\,.\,k\,.\,\frac{R}{r}\,.\,1{,}7233 = 1077$ ℔; den Effekt $n\,.\,Q = 0{,}7884\,.\,\frac{3600\,.\,t\,.\,c}{H}\,.\,N\,.\,k = 59130$ ℔, oder 591 Zentner 30 ℔.

Wenn man nun die Resultate der geführten Rechnungen zusammenstellt, so haben wir für den ersten oder günstigsten Fall, wenn nämlich die Zeit des Stillstandes der Maschine nur halb so gross ist, als die Zeit eines Aufzuges, die Ladung $Q = 625$ ℔, die Anzahl der täglichen Aufzüge $n = 120$, und den Effekt $n\,.\,Q = 750$ Zentner. — Wenn aber die Stillstandszeit $8^{Min.}$ oder viermal so viel als die Ruhezeit für die mittlere Geschwindigkeit $= 2$ beträgt, so gibt uns die pag. 108. angeführte Näherungsmethode $Q = 937\frac{1}{2}$ ℔, die Anzahl der Aufzüge $n = 60$, und den Effekt $n\,.\,Q = 56250$ ℔; dagegen gibt aber für denselben Fall die letzte oder genaue Rechnung $Q = 1077$ ℔, die Anzahl der Aufzüge $n = 55$, und den Effekt $n\,.\,Q = 59130$ ℔.

Aus der Vergleichung dieser Zahlen sehen wir nicht nur die bedeutenden Unterschiede, welche unter solchen Umständen statt finden, sondern auch überhaupt, dass nach Verschiedenheit der Umstände die Arbeiter ohne übermässige Anstrengung nicht dasselbe Quantum aufzubringen im Stande sind. Verständige Bauaufseher werden aber aus diesen Rechnungen die hinlänglichen Behelfe zur Verfassung genauer Voranschläge finden, um dann entweder die Arbeiten bei der Ausführung zweckmässig zu leiten, oder auch an die Bauleute hiernach in Akkord geben zu können. —

§. 96.

Unter einer Rolle versteht man eine kreisrunde an ihrer Peripherie ausgehöhlte
Fig. 4. Tab. 3. Scheibe von geringer Dicke, welche sich um einen in ihrer Mitte befindlichen Zapfen dreht. Man umgibt die Achse der Scheibe mit einer Schere (so wie bei der Wage), welche zu beiden Seiten herabgeht und die Achse trägt. An dem Ende dieser Schere ist ein Hacken D angebracht.

Fig. 4. Wird dieser Hacken oberhalb an einem Balken oder Gewölbe befestigt, und hiemit der Achse eine feste Unterlage gegeben, so dass die Scheibe sich nur um dieselbe drehen kann, so heisst diess eine feste Rolle.

Wird aber an den Hacken D die Last angehängt und das eine Ende des Seiles in E befestigt, an dem andern Ende des Seiles aber die Kraft P angebracht, und von

derselben die Scheibe sammt der Last in die Höhe gezogen, so nennt man diess eine bewegliche Rolle. Fig. 5. Tab. 3.

§. 97.

An einer festen Rolle ist im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft der Last gleich, oder P = Q. Fig. 6.

Da die feste Rolle ein Hebel der ersten Art ist, so lasse man aus dem Mittelpunkte perpendikuläre Linien auf die Richtungen der zwei Kräfte, und man erhält nach §. 55. P : Q = CB : AC. Da nun die Halbmesser der Scheibe gleich sind oder CB = AC, so ist auch P = Q, d. h. bei der festen Scheibe ist die Kraft immer so gross als die Last.

Dieser Fall findet auch statt, wenn die Kraft P nach der horizontalen Richtung Fig. 7. oder nach was immer für einer andern Richtung an der Peripherie der Scheibe zieht. Fig. 7.

§. 98.

Obgleich bei einer festen Rolle keine Verschiedenheit der Hebel statt findet, und man daher nicht wie bei einem Rade an der Welle mit einer kleinen Kraft eine grosse Last nach Verhältniss der Hebelsarme zu gewältigen im Stande ist, so gewährt uns dennoch der Gebrauch dieser Rolle folgende Vortheile:

Erstens. Da eine feste Rolle so wie ein Rad an der Welle als ein Hebel der ersten Art und zwar als ein Hebel ohne Ende betrachtet werden kann, so vermag man auch mit derselben Lasten auf jede beliebige Höhe zu heben, was man mit einem einfachen Hebel nicht zu thun im Stande ist.

Zweitens. Man wendet die feste Rolle vorzüglich dazu an, die Richtung einer Kraft, so wie es die Umstände erfordern, zu verändern, ohne eine Verminderung der Kraft dadurch zu erleiden. So wird z. B. bei einem Göpel durch eine feste Rolle der senkrechte Zug in einen horizontalen verwandelt, und hiedurch den Pferden das Vermögen verschafft, eine Last aus einem Brunnen oder Schachte senkrecht in die Höhe zu ziehen. Fig. 7.

§. 99.

Bei einer beweglichen Rolle verhält sich die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Scheibe zu der Sehne des Bogens, welchen das Seil umspannt.

Es sey E der feste Punkt, an welchem das Seil, welches den Bogen ANB der Scheibe umgibt, angehängt ist; an dem andern Ende des Seiles wirke aber die Kraft P, welche der senkrecht herabhängenden Last Q das Gleichgewicht hält. Wie nun die Kraft P das Seil anzieht, geht die Scheibe mit der Last hinauf, und dreht sich hiebei um den Punkt A herum. Man kann daher diesen Berührungspunkt A im Zustande des Gleichgewichtes als den Unterstützungspunkt und die bewegliche Rolle als einen Hebel der zweiten Art betrachten. Lässt man auf die vertikale Richtung CQ der Last die winkelrechte Linie AO, und auf die verlängerte Richtung der Kraft P die winkelrechte AD herab, so ist nach dem Grundsatze vom Hebel der zweiten Art (§. 61.) Fig. 8.

im Zustande des Gleichgewichtes $P : Q = AO : AD$. Wenn man nun C mit B verbindet, so steht CB senkrecht auf der Tangente BD, also ist CB paralell zu AD, mithin sind die beiden Dreiecke ABD und COB einander ähnlich; demnach ist $OB : AD = CB : AB$. Da nun $AO = OB$ ist, so ergibt sich $P : Q = CB : AB$.

§. 100.

Bezeichnen wir den Halbmesser der Scheibe mit r und die Sehne des vom Seile umspannten Bogens mit s, so hat man $P : Q = r : s$. Hieraus lassen sich die Verhältnisse der Kraft zur Last für folgende besondere Fälle ableiten:

Erstens. Wenn $r = s$, so ist auch $P = Q$, d. h. wenn das Seil einen Bogen von 60^0 umspannt, so ist die Kraft der Last gleich.

Fig. 5. Tab. 3. Zweitens. Umgibt aber das Seil die halbe Peripherie, oder umspannt es die halbe Scheibe, so ist die Sehne $s = 2r$, und daher $P : Q = r : 2r = 1 : 2$, woraus $P = \frac{Q}{2}$, d. h. wenn die vom Seile umspannte Sehne in den Durchmesser übergeht, oder wenn die Richtungen der zwei Seile paralell sind, so ist die Kraft der halben Last gleich. Diese Verminderung der Kraft ist aber auch die grösste, weil es keine grössere Sehne als den Durchmesser gibt. Wollte man nämlich das Seil um mehr als um die halbe Peripherie der Rolle winden, so werden die Hebelsarme Ab, Bb wieder kleiner als der Halbmesser. Es ist daher bei einer beweglichen Rolle nicht so wie bei der festen Rolle gleichgültig, in welchen Richtungen die angebrachten Kräfte wirken. Gewöhnlich ist die Einrichtung von der Art, dass beide Seile paralelle Richtungen zu einander haben, dass also die erforderliche Kraft, um die Last Q zu heben, dem halben Gewichte dieser Last gleich ist.

Fig. 9.

§. 101.

Der Fall, wenn die Richtungen der Seile paralell sind, lässt sich auch aus folgenden zwei Betrachtungen ableiten:

Fig. 5.

a. Da sowohl die Kraft als auch die Last das Seil nach paralellen Richtungen spannen, oder senkrecht herabziehen, so stellt die bewegliche Rolle einen Hebel der zweiten Art vor, dessen Umdrehungspunkt in A ist; es ist daher $P : Q = BC : AB = 1 : 2$.

b. Die Last hängt hier an zwei Seilen, die offenbar gleich stark gespannt werden; so stark daher die Kraft in die Höhe zieht, so viel hat auch der Nagel E zu tragen, denn es ist kein Grund da, wesshalb eines von diesen zwei Seilen stärker gespannt seyn sollte als das andere. Demnach ist $Q = P + P$ und $P = \frac{Q}{2}$, d. h. die Kraft, welche man anzuwenden hat, ist nur halb so gross als die Last.

§. 102.

Fig. 10. Wenn zwei oder mehrere Rollen in einem Gehäuse oder Kloben sich befinden, so heisst man eine solche Zusammensetzung eine Flasche. Werden aber zwei Flaschen mittelst eines Seiles dergestalt verbunden, dass dieses Seil abwechselnd von einer festen auf eine bewegliche Rolle geht, so nennt man diess einen Flaschenzug. Die obere

Flasche wird gewöhnlich an einem festen Balken angebunden, an die untere aber die Last, welche gehoben werden soll, angehängt.

§. 103.

Bei einem Flaschenzuge verhält sich die Kraft zur Last, wie die Einheit zur Anzahl der von der Last gespannten Seile.

Wir wollen zuerst annehmen, dass jede Flasche nur eine Rolle enthalte. Ist nun der Hacken, an dem das Seil befestigt ist, an der obern Flasche angebracht, und ist das Seil unten um eine bewegliche, oben aber um eine feste Rolle geschlungen, so verhält sich nach §. 100. die Kraft zur Last = 1 : 2, indem hier die feste Rolle A nur dazu dient, um die Richtung des Seiles gehörig zu verändern, sonst aber keinen Vortheil an Kraft gewährt. — Dass in diesem Falle die Kraft nur halb so gross wie die Last sey, kann man sich auch noch so überzeugen: die ganze Last Q wird hier von zwei gespannten Seilen getragen, auf welche sie also vertheilt, und zwar gleich vertheilt wird. Da nämlich die Rolle, um welche das Seil sich aufwindet, vollkommen beweglich ist, so ist auch wegen der Gleichheit der Hebelsarme kein Grund vorhanden, warum die Spannung des einen Seiles (S) grösser als jene des andern Seils (S′) seyn sollte; es müssen daher die Spannungen der beiden Seile S′ = S seyn, und jedes von den Seilen hat die halbe Last zu tragen. Da endlich die feste Rolle keine Verminderung der Kraft bewirkt, so muss auch die Kraft P der Spannung des einen Seiles (S′) oder der halben Last gleich, d. h. $P = \frac{Q}{2}$ seyn. Fig. 11. Tab. 3.

Befindet sich der Hacken, an dem das Seil befestigt ist, an der untern Flasche, so werden von der Last drei Seile gespannt. Wenn wir daher die Spannungen wieder mit S, S′, S″ bezeichnen, so ist $Q = S + S' + S''$. Da die obere Rolle A um ihre Achse vollkommen beweglich ist, so ist wegen der Gleichheit ihrer Hebelsarme $S = S'$; aus derselben Ursache sind bei der untern Rolle B die Spannungen gleich, oder $S' = S''$; es ist daher auch $S = S' = S''$, und $Q = 3S$, oder $S = \frac{Q}{3} = S''$. Die Kraft P zieht an der obersten festen Rolle C, es muss also abermals wegen der Gleichheit der Hebelsarme $S'' = P$, und demnach auch $P = \frac{Q}{3}$ seyn. Fig. 12.

Enthält eine jede der zwei Flaschen zwei Rollen, wobei der Hacken an der obern Flasche angebracht seyn muss, so wird die Last von vier Seilen getragen, und da jedes Seil wieder gleich stark gespannt wird, so hat auch ein jedes nur den vierten Theil der Last zu tragen. Die Kraft hat also, sie mag hinauf oder über eine feste Rolle herabziehen, nur die Spannung eines Seiles zu überwinden, folglich bloss den vierten Theil der Last zu tragen. Fig. 13.

Auf diese Art hat die Kraft bei einem Flaschenzuge von fünf Rollen den fünften Theil der Last, bei einem Flaschenzuge von sechs Rollen Fig. 14 den sechsten Theil der Last, u. s. w. zu überwältigen. Fig. 14.

Wenn demnach die Last an m Rollen hängt, die theils fest, theils beweglich sind; oder wenn die Last von m gespannten Seilen getragen wird, so vertheilt sich auch das Gewicht der Last (Q) auf alle diese Seile gleichförmig, so zwar, dass ein jedes Seil eine

Spannung erleidet, die $= \frac{Q}{m}$ ist. An dem letzten Seile wirkt nun die Kraft P, die der Spannung eines einzigen Seiles gleich ist; mithin haben wir auch $P = \frac{Q}{m}$, oder $P : Q = 1 : m$, d. h. bei einem Flaschenzuge verhält sich die Kraft zur Last wie die Einheit zur Anzahl der von der Last gespannten Seile. Es versteht sich von selbst, dass jenes Seil, woran die Kraft wirkt, hiebei nicht in Betrachtung komme, indem die Kraft an der letzten Rolle so grofs, wie die Spannung eines jeden Seiles ist.

§. 104.

Es gibt Flaschenzüge, wobei die Rollen nicht über, sondern neben einander stehen, in diesem Falle haben die Rollen in einer Flasche eine gemeinschaftliche Achse,
Fig. 15. Tab. 3. um welche sich daher auch jede Rolle frei bewegen kann. Bei diesen Flaschenzügen wird offenbar auch ein jedes Seil mit einer gleichen Kraft gespannt. Wenn daher die Anzahl der gespannten Seile $= m$ ist, so haben wir abermals die Gleichung $P = \frac{Q}{m}$. Bei diesen Flaschenzügen sind gewöhnlich die Scheiben oder Rollen von gleicher Grösse.

§. 105.

Man ist nunmehr im Stande, durch eine hinlängliche Anzahl Rollen mittelst eines Flaschenzuges jede geforderte Last durch eine gegebene Kraft in Bewegung zu setzen. Wäre z. B. eine Last von 600 ℔ durch eine Kraft von 75 ℔ mittelst eines Flaschenzuges auf ein Gebäude aufzuziehen, so wird man hiezu $m = \frac{Q}{P} = \frac{600}{75} = 8$ Rollen, also vier Rollen in der obern und eben so viele in der untern Flasche benöthigen.

Indessen findet hiebei die schon mehrmals gemachte Bemerkung statt, dass man an der Geschwindigkeit der Last, folglich an der Zeit, welche die Last zur Zurücklegung des gleichen Raumes bedarf, eben so viel verliert, als das Verhältniss der Kraft zur Last durch die Anzahl der Seile vermindert wird. Es ist nämlich klar, dass, wenn die Last um einen Fuss steigen soll, ein jedes der m Seile auch um einen Fuss, folglich alle Seile zusammen um m Fusse aufgewickelt oder verkürzt werden müssen. Da nun an dem letzten Seile die Kraft angebracht ist, so muss dieselbe m Fuss zurücklegen, wenn die Last um einen Fuss steigen soll, so dass der Gewinn an Kraft genau eben so viel als der Verlust an Zeit beträgt.

Setzt man den Raum, den die Kraft zurücklegt $= p$, und jenen der Last $= q$, so ist

$$p : q = m : 1, \text{ und da}$$
$$P : Q = 1 : m \text{ war,}$$

so ist auch $P \cdot p = Q \cdot q$. Nun ist $P \cdot p$ das Bewegungsmoment der Kraft und $Q \cdot q$ jenes der Last; wir sehen also hieraus, dass auch hier, wie bei dem Hebel und bei dem Rade an der Welle, diese beiden Bewegungsmomente einander gleich sind.

§. 106.

Man wendet den Flaschenzug gewöhnlich zu dem Behufe an, um grosse Lasten, z. B. Bauholz, Quadersteine u. dgl. auf hohe Gebäude aufzuziehen. In diesen Fällen ersetzt der Flaschenzug das Bedürfniss eines zusammengesetzten Räderwerks, wovon wir §. 90. gehandelt haben. Man verbindet nämlich den Flaschenzug mit einer einfachen Winde,

an welcher letztern noch eine Rolle angebracht ist, um den horizontalen Zug des Seiles Fig. an der Winde in einen senkrechten Zug zu verwandeln. Diese Maschine gewährt dann 4. denselben Vortheil, dessen wir bei dem einfachen Rade an der Welle erwähnt haben. Tab. 2. Das Bauholz, welches für einen Dachstuhl auf ein Gebäude aufgezogen werden muss, ist gewöhnlich zu lang, um es über Stiegen hinauf tragen zu können; die Quadersteine sind zu schwer, und verhältnissmässig zu klein, um der erforderlichen Anzahl Menschen die nothwendigen Angriffspunkte zum Tragen der Last darzubiethen. Durch die Maschine werden nun diese Arbeiten möglich, die ohne Anwendung derselben gar nicht ausgeführt werden könnten.

§. 107.

Wir wollen nunmehr den Fall betrachten, wo mittelst eines Flaschenzuges von einer gegebenen Anzahl Arbeiter Bauholz, Quadersteine oder andere Baumaterialien auf ein Gebäude aufgezogen werden sollen, und hiebei untersuchen, wie die Arbeit einzurichten sey, damit in einem Tage möglichst viel aufgezogen werde.

Es sey so wie §. 87. der Hebelsarm der Winde $AC = R$, und jener der Welle $aC = r$. Fig. Nennen wir die Spannung des Seiles $EI = S^m$, so muss auch, dem §. 98. zufolge die 16. Spannung des Seiles BI eben so gross $(= S^m)$ seyn. Dieses S^m ist nunmehr als Last zu Tab. 3. betrachten; wenn wir daher die Anzahl der Arbeiter, welche an der Winde angestellt werden, mit N bezeichnen, so ist offenbar die Gleichung zwischen Kraft und Last

$$S^m . r = N . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) R \text{ (I).}$$

Nun wissen wir aber, dass, wenn m die Anzahl der gespannten Seile, woran die Last hängt, bedeutet, die Kraft nur den m^{ten} Theil der Last zu überwältigen habe. Es ist daher $S^m = \frac{Q}{m}$ (II). Hieraus ergibt sich durch Substitution die vollständige Gleichung zwischen Kraft und Last, $Q = \frac{m . R}{r} \cdot N . k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ (III).

Da der Raum, welchen die Zugkraft in einer Sekunde zurücklegt $= v$ ist, so beträgt die Länge des Seiles, welches in einer Sekunde auf die Welle aufgewickelt wird, oder $v' = \frac{r . v}{R}$.

Die Geschwindigkeit, womit die Last, welche an m Seilen hängt, in die Höhe geht, ist offenbar $= \frac{v'}{m} = v''$; also ist $v'' = \frac{r . v}{R . m}$ (IV).

Die Zeit eines Aufzuges beträgt daher wie gewöhnlich $\frac{H}{v''} = \frac{H . m . R}{v . r}$ (V).

Da nun in einem Tage durch z Stunden oder $3600 . z$ Sekunden gearbeitet wird, so ist die Anzahl der Aufzüge in einem Tage

oder $n = \frac{3600 . z . v''}{H} = \frac{3600 . z . r . v}{m . R . H}$ (VI).

Die Arbeit des ganzen Tages, oder die Last, die in einem Tage auf die Höhe H gehoben wird, erhalten wir durch das Produkt aus der Anzahl Aufzüge n in die, mit jedem

Aufzuge gehobene Last Q, nämlich $n.Q = \frac{3600.z.v.r}{m.H.R}.Q$. Wird in diese Gleichung der Werth aus (III) substituirt, so ist

$$n.Q = \frac{3600.z.v.r}{m.H.R}.\frac{N.m.R}{r}.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) = \frac{3600.z.v}{H}.N.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) =$$

$$= \frac{3600.t.c}{H}.N.k.\frac{v}{c}.\left(2-\frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right) \text{ (VII).}$$

Aus diesem Ausdrucke ergibt sich, dass der tägliche Effekt wieder nur von den Produkten $\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)$ und $\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right)$ abhänge, indem die Grössen t, c, N, k, H bestimmt und gegeben sind. Es muss daher abermals wie bei dem Rade an der Welle (§. 87.) $v = c$, und $z = t$ seyn, d. h. es ist am vortheilhaftesten, wenn die Arbeiter mit der gewohnten mittleren Geschwindigkeit c arbeiten und an jedem Tage durch t Stunden verwendet werden.

Werden diese Werthe für v und z in die Gleichungen III, V, VI und VII substituirt, so ergibt sich die jedesmal aufzuziehende Last $Q = \frac{N.k.m.R}{r}$,

die Zeit eines Aufzuges $= \frac{m.H.R}{c.r}$,

die Anzahl Aufzüge in einem Tage oder $n = \frac{3600.t.c.r}{m.H.R}$,

der tägliche Effekt oder $n.Q = \frac{3600.t.c.N.k}{H}$.

In dem letzten Ausdrucke beträgt wieder 3600.t.c den Raum, welchen ein Arbeiter mit seiner mittlern Geschwindigkeit in einem Tage zurücklegt, und 3600.t.c.N.k das tägliche Bewegungsmoment von N Arbeitern. Man erhält daher den grössten Effekt, welchen N Arbeiter bei dieser zusammengesetzten Maschine bewirken können, wenn man das tägliche Bewegungsmoment derselben mit der Höhe, auf welche die Last aufzuziehen ist, dividirt. Dasselbe Resultat haben wir aber auch bereits §. 87. bei dem Rade an der Welle, und bei dem Tragen einer Last auf die Entfernung E erhalten. Wir sehen daher, dass sowohl die Hebelsarme der Winde, als die Anzahl der Rollen des Flaschenzuges auf die Vermehrung des Effektes der Maschine gar keinen Einfluss haben, worüber die Gründe pag. 103. bei dem Rade an der Welle umständlich angeführt und erklärt worden sind. Es ist daher der Effekt der Arbeiter, welche mit dieser Maschine Baumaterialien auf die Höhe H zu schaffen haben, gerade so gross, als wenn dieselben Arbeiter auf ebenem Wege die Last N.k auf die Entfernung 3600.t.c zu tragen haben. Die Maschine leistet hier nur den Nutzen, dass die Last von unten auf die Höhe H gebracht wird, ohne dass die Kraft selbst diesen Weg zu machen hat. Die Hebelsarme der Maschine erscheinen in dem Ausdrucke für den Effekt gar nicht, und kommen bloss dann in Rechnung, wenn nach der Last $Q = \frac{N.k.R.m}{r}$ gefragt wird, welche die Arbeiter bei einem jeden Aufzuge an die untere Flasche anzubinden haben.

§. 108.

Beispiel. Es sey die Höhe des Gebäudes, auf welches Baumaterialien aufzuziehen sind, $H = 10$ Klafter; die Anzahl der Arbeiter sey $N = 4$, und diese seyen von mittelmässiger Stärke, von denen nämlich jeder im Stande ist, 25 ℔ täglich 3 Meilen weit oder auf eine Entfernung von 12000 Klaftern zu tragen; es frägt sich, wie viel diese Arbeiter täglich auf die gegebene Höhe bringen können, und wie die Arbeit am vortheilhaftesten einzurichten sey.

Der grösste Effekt dieser Arbeiter beträgt

$$n.Q = \frac{3600.t.c}{H}.N.k = \frac{12000}{10}.4.25 = 1200 \text{ Zentner.}$$

Wenn die Maschine bereits gebaut ist, folglich die Hebelsarme gegeben sind, und gefragt wird, wie viel Last an das untere Ende des Flaschenzuges anzubinden ist: so ergibt sich diess aus der Gleichung zwischen Kraft und Last $Q = \frac{R}{r}.m.N.k$ oder $Q = \frac{R}{r}.m.100$. Es sey das Verhältniss der Hebelsarme an der Winde $R : r = 6 : 1$ und die Anzahl der Rollen des Flaschenzuges $m = 4$, so ist die jedesmal aufzuziehende Last $Q = 6.4.100$ ℔ $= 24$ Zent.; die Zeit eines Aufzuges $\frac{m.H.R}{c.r} = \frac{4.60}{2{,}5}.6 = 576^{Sec.}$, und die Anzahl der Aufzüge in einem Tage oder $n = \frac{3600.t.c.r}{m.H.R} = \frac{3600.8.2{,}5}{4.60.6} = 50$.

Wäre im Gegentheile die Last Q gegeben, so findet man das vortheilhafteste Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r}$ aus derselben Gleichung $Q = \frac{R}{r}.m.N.k$. Es wären z.B. auf die gegebene Höhe von 10 Klaftern Werkstücke oder Quadersteine aufzuziehen, wovon jeder ein Gewicht von 20 Zentn. hat. In diesem Falle folgt aus der Gleichung $20 = \frac{R}{r}.4.1$ das Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r} = 5$. Wir wollen annehmen, die Maschine habe Hebelsarme R von 4 Fuss, so wird $r = \frac{4}{5}$ Fuss oder der Durchmesser der Welle $\frac{8}{5}$ Fuss $=$ 1 Fuss 7,2 Zoll seyn, folglich dem Umkreise der Welle so viel zugelegt werden müssen, bis der Durchmesser dieses Maass erhält. Die Anzahl der Aufzüge

$$\text{wird} = \frac{3600.t.c}{m.H}.\frac{r}{R} = \frac{12000}{4.10}.\frac{1}{5} = 60 \text{ seyn,}$$

und die gesammte Last in einem Tage abermals $60.20 = 1200$ Zentner betragen.

In diesen beiden Fällen wird die Summe der Stillstände der Maschine oder die gesammte Ruhezeit an jedem Arbeitstage 4 Stunden oder nach jedem Aufzuge $\frac{576}{2} = 288^{Sec.}$ betragen, während welcher die Last an- und abgebunden werden muss.

§. 109.

Der zweite Fall, welcher hier so wie bei dem Aufzuge mit einem einfachen Rade an der Welle §. 92. eintreten kann, ist dann vorhanden, wenn die Ruhezeit oder diejenige Zeit, welche zum An- oder Abbinden der Last benöthigt wird, gegeben ist. Es seyen z. B. mittelst einer Winde und eines Flaschenzuges Baumaterialien auf einen

im Baue begriffenen Thurm von 20 Klaftern Höhe aufzuziehen. Die Zeit, welche zum Abbinden der Last oben auf dem Thurme, zum Herablassen des leeren Flaschenzuges, und zur Befestigung einer neuen Last erfordert wird, sey 20 Minuten; es frägt sich nun, wie die Maschine vorzurichten sey, um den grössten Effekt leisten zu können.

Da bei dem grössten Effekte die Ruhezeit nach jedem Aufzuge nur halb so gross seyn darf, als die Zeit eines Aufzuges, so muss diese in dem gegenwärtigen Falle 40 Minuten betragen. Dadurch erhalten wir die Gleichung $40.60 = \frac{m.H.R}{c.r}$. Demnach ist das zweckmässigste Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r} = \frac{2400.c}{m.H}$. Weil aber die Höhe des Thurmes $H = 120$ Fuss, die Zahl der Rollen $m = 4$, und die mittlere Geschwindigkeit der Arbeiter $c = 2{,}5$ Fuss gegeben ist, so erhalten wir $\frac{R}{r} = \frac{2400.2{,}5}{4.120} = \frac{25}{2}$. Es sey der Halbmesser der Welle $r = 6$ Zoll, so ist $R = 75$ Zoll $= 6$ Fuss 3 Zoll; oder die Hebelsarme R der Winde müssen $6\frac{1}{2}$ Fuss lang seyn, damit die Arbeiter dieselben mit der einen Hand auf der Entfernung von 6′ 6″ und mit der andern auf der Entfernung 6′ 0″ ergreifen, und ihre Kraft in Thätigkeit setzen können.

In demselben Falle beträgt die anzubindende Ladung $Q = N.k.\frac{R}{r}.m = N.k.\frac{75}{6}.4$, folglich, wenn 4 Arbeiter an der Winde angestellt werden, $Q = 50$ Zentner. Da die gewöhnlichen Seile solche Lasten nicht zu tragen im Stande sind, so kann die Zahl der Arbeiter an der Winde vermindert und statt 4 Arbeiter nur 2 angestellt werden, für welche demnach nur 25 Zentner angebunden werden. Die Dauer eines Aufzuges beträgt demnach $40^{Min.}$ für die Arbeit und $20^{Min.}$ für die Ruhe und das Anbinden, also zusammen 1 Stunde. Demnach werden an jedem Tage 12 Aufzüge, jeder mit 25 Zentnern gemacht, also von 2 Arbeitern täglich 300 Zentner auf die Höhe von 20 Klaftern gebracht.

§. 110.

Wir kommen nunmehr noch zur Erläuterung des dritten Falles, wenn nämlich **sowohl die Maschine, als auch die nach jedem Aufzuge nöthige Stillstandszeit gegeben ist**, und um die vortheilhafteste Bedienung der Maschine oder um die anzubindende Last Q und die Anzahl der Aufzüge n gefragt wird. Es sey die Anzahl der Rollen $m = 4$, das Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r} = 3$, die Anzahl der Arbeiter $N = 4$, ihre mittlere Kraft $= N.k = 4.25 = 100$ ℔ und die Geschwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuss gegeben, so würde zur vortheilhaftesten Verwendung dieser Kraft nöthig seyn, $Q = m.\frac{R}{r}.N.k = 4.3.100 = 1200$ ℔ anzunehmen, und die Zeit eines Aufzuges wäre $\frac{m.H.R}{c.r} = \frac{4.125.3}{2{,}5} = 600^{Sec.}$ oder $10^{Min.}$ (wo wir zur Vermeidung gebrochener Zahlen $H = 125$ Fuss statt der vorhin angenommenen 20 Klafter oder 120 Fuss setzen wollen). Die Zeit der Ruhe nach jedem Aufzuge wäre sonach 5 Minuten, folglich bedarf ein jeder Aufzug $10 + 5 = 15$ Minuten oder $\frac{1}{4}$ Stunde; demnach werden in einem

Arbeitstage von 12 Stunden 4 . 12 oder 48 Aufzüge statt finden; folglich würde in jedem Tage die Last von 48 . 12 = 576 Zentnern auf die Höhe von 125 Fuss gebracht werden.

Die Zeit des Stillstandes nach jedem Aufzuge sey $\varrho = 20$ Minuten, während welcher nämlich die Ladung von 12 Zentnern auf dem Baugerüste abgebunden oder ausgehängt, dann der Flaschenzug herabgezogen und auf dem Bauplatze eine neue Ladung angebunden oder angehängt werden muss. Wenn wir diese Zeit von $20^{\text{Min.}}$ zur Zeit des Aufzuges von $10^{\text{Min.}}$ addiren, so ergibt sich, dass unter solchen Umständen von einem Aufzuge zum andern 30 Minuten vergehen, folglich in 12 Stunden nur 24 Aufzüge bewirket, demnach in einem Tage auf die Höhe von 125 Fuss nur 24.12 = 288 Zentner, oder nur die Hälfte von den oben berechneten 576 Zentnern aufgebracht würden. Da wir jedoch annehmen können, dass die Arbeiter, wenn selbe auf die Ruhe nach jedem Aufzuge $20^{\text{Min.}}$ statt der früher nöthigen $5^{\text{Min.}}$ verwenden, auch mit einer grössern Kraft an der Maschine arbeiten, und in dieser Hinsicht auch ein grösseres Aufzugsquantum bewirken können, so wollen wir statt der hiezu nöthigen weitläufigen Rechnung uns der oben bei dem Rade an der Welle angeführten Tabelle bedienen. Hier ist nämlich das Verhältniss der Arbeitszeit zur doppelten Ruhezeit $\frac{2.20}{10} = 4 = p$; wenn wir nun in jener Tabelle die Verhältnisszahlen, welche in der horizontalen Reihe von 4 stehen, unserer Rechnung zum Grunde legen, so finden wir, dass in diesem Falle das vortheilhafteste Verhältniss $\frac{v}{c} = 0{,}7822$; die Anzahl der Aufzüge $n = 0{,}4575 \cdot \frac{3600 \,.\, t \,.\, c}{H \,.\, m} \cdot \frac{r}{R} = 0{,}4575 \,.\, 48$ $= 21{,}96$; die anzubindende Last $Q = 1{,}7233 \cdot \frac{R}{r} \cdot m \,.\, N \,.\, k = 1{,}7233 \,.\, 12 \,.\, 100 = 2067{,}96$ ℔, und die in einem Tage aufgebrachte Last $n \,.\, Q = 0{,}7884 \,.\, 57600$ ℔ = 45412 ℔ seyn werde, wodurch also das für die mittlere Geschwindigkeit berechnete Quantum von 28800 ℔ um 16612 ℔ übertroffen wird.

Dem Anstande, dass die Zahl der Aufzüge n immer eine ganze Zahl seyn muss, folglich die berechneten 21,96 nicht statt finden können, wird dadurch begegnet, wenn wir statt dieser Zahl z. B. 22 Aufzüge annehmen und durch diese Zahl den Effekt $n \,.\, Q = 45412$ ℔ dividiren, so ergibt sich $Q = 2064{,}17$ ℔.

Aus dieser Rechnung ist zu ersehen, dass der mit Rücksicht auf die Stillstandszeit berechnete Effekt von 45412 ℔ zwar bedeutend grösser ist, als derjenige, welcher ohne Rücksicht auf diese Stillstandszeit nur mit 28800 ℔ berechnet wurde; doch steht derselbe gegen den möglichst grössten Effekt von 57600 ℔ noch um 12188 ℔ zurück: es ist demnach nothwendig, in jedem Falle das Verhältniss der Hebelsarme $\frac{R}{r}$ vielmehr nach dem Verhältnisse der Stillstandszeit zu bestimmen, als eine und dieselbe Maschine für alle Aufzugshöhen beizubehalten, und den Effekt durch Aenderungen in der Bedienung, anzuhängenden Last und Anzahl der Aufzüge herstellen zu wollen, wodurch immer nur eine blosse Annäherung, und in keinem Falle derjenige Effekt erreicht werden kann, welcher durch ein angemessenes Verhältniss der Hebelsarme zu erreichen ist. In dieser Hinsicht pflegt man für alle solche grössere Arbeiten das

angemessene Verhältniss $\frac{R}{r}$ theils durch Verminderung des Halbmessers der Welle r, theils auch durch Vergrösserung der Hebelsarme R, herzustellen.

Uibrigens verdient noch hier bemerkt zu werden, dass in allen bisherigen Rechnungen die Widerstände der Reibung und der Unbiegsamkeit der Seile noch nicht berücksichtigt worden sind, demnach bei einer genauen Rechnung noch in Anschlag gebracht werden müssen, wozu im V. Capitel dieses Werkes die nöthige Anleitung gegeben werden wird. Indessen dürfte es doch unsern Lesern nicht unangenehm seyn, hier schon die vorläufige Bemerkung zu finden, dass diese Widerstände nur bei der Gleichung $Q = m \cdot \frac{R}{r} . N . k$, d. h. bei der Bestimmung der anzubindenden Last zu berücksichtigen sind, übrigens aber auf die Bestimmung der Verhältnisse $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ keinen Einfluss haben, sonach auch in dieser Hinsicht an der bisherigen Anleitung zur Bestimmung dieser Verhältnisse nichts ändern.

§. 111.

Fig. 6. Tab. 2. Die **Gegenwinde** Fig. 6. Tab. 2. besteht aus einer Welle mit zwei verschiedenen Durchmessern. Die aufzuziehende Last Q hängt an der Achse einer beweglichen Rolle, um welche ein Seil läuft, das mit seinen beiden Enden auf die grössere und kleinere Welle nach entgegengesetzten Richtungen aufgewunden und an dem Ende der Welle befestigt ist. Da bei jeder Umdrehung auf der stärkern Welle vom Seile mehr aufgewunden als von der schwächern abgewunden wird, so folgt von selbst, dass die Rolle mit der Last bei jeder Umdrehung etwas steigen und auf solche Art nach und nach die Hubshöhe H erreichen werde.

Der Effekt bei dieser Maschine wird auf gleiche Art, wie bei den vorhergehenden
Fig. 17 und 18. Tab. 3. berechnet. Die beiden Seile S und S′ werden offenbar von der Last Q gleich stark gespannt, daher muss auch $S = S' = \frac{Q}{2}$ seyn. Betrachten wir ferner die Maschine im Profile, so ist sie nichts anderes als ein Rad an der Welle, und also ein Hebel, an welchem jedoch 3 Kräfte S, S′ und K in verschiedenen Entfernungen vom Unterstützungspunkte angebracht sind. Es muss demnach das statische Moment von der einen Seite gleich seyn der Summe der statischen Momente von der andern Seite, oder $S' . ac = K . cd + S . cb$. Setzen wir den Halbmesser $ac = A$, $cd = E$ und $cb = a$, so ist $S' . A = K . E + S . a$, oder da $S' = S = \frac{Q}{2}$ ist; so erhalten wir $\frac{Q}{2} . A = K . E + \frac{Q}{2} . a$; oder

$$Q\left(\frac{A - a}{2}\right) = K . E.$$

Hieraus sehen wir, dass diese Maschine eigentlich nur wie ein **Rad an der Welle** zu behandeln sey, bei welchem nämlich die Last Q an dem Hebelsarme $\frac{A - a}{2}$ und die Kraft an dem Hebelsarme E angebracht ist, und dass auch die Last Q um so grösser seyn könne, je kleiner der Unterschied A — a der beiden Halbmesser der Wellen gemacht wird.

Setzen wir an die Stelle von K den bekannten Werth $N.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$, so ergibt sich die allgemeine Gleichung zwischen Kraft und Last $Q\left(\frac{A-a}{2}\right)=K.E$ $=N.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right).E$, woraus $Q=N.k\left(2-\frac{v}{t}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)\left(\frac{2E}{A-a}\right)$ folgt. Fig. 17 und 18. Tab. 3.

Um den **Effekt** zu bestimmen, den die Arbeiter mittelst dieser Maschine in einem Tage zu Stande bringen können, muss erst der Raum, um welchen die Last in einer Sekunde steigt, und die Anzahl der Aufzüge in einem Arbeitstage bestimmt werden.

Hiezu dienet die Bemerkung, dass in derselben Zeit, in welcher die Kraft den Raum xd, den wir $= v$ setzen wollen, zurücklegt, von dem Seile S' das Stück ay aufgewickelt, dagegen vom Seile S das Stück bz abgewickelt, und folglich das aufzuwindende Seil um den Unterschied $ay - bz$ kürzer werde. Da sich aber diese Verkürzung beiden Seilen S und S' in gleichem Maasse mittheilen muss, so wird jedes der Seile S und S' um die Hälfte jenes Raumes $ay - bz$, also um $\frac{ay-bz}{2}$ kürzer; woraus nun von selbst folgt, dass auch die Last in der Zeit, in welcher die Kraft den Raum v beschreibt, um den Raum $v' = \frac{ay-bz}{2}$ steigen werde. Aus der Aehnlichkeit der Sektoren ayc und dxc folgt $ay : ac = dx : dc$ oder $ay : A = v : E$; woraus $ay = \frac{A.v}{E}$ ist. Ferner folgt aus der Aehnlichkeit der Sektoren bcz und dcx, $bz : bc = dx : dc$ oder $bz : a = v : E$ und hieraus $bz = \frac{a.v}{E}$. Es ist demnach die Geschwindigkeit der Last

$$v' = \frac{ay-bz}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A.v-a.v}{E}\right) = v\left(\frac{A-a}{2E}\right).$$

Nennt man nun v' den Raum, um den die Last in einer Sekunde steigt, so wird die Zeit eines Aufzuges auf die Höhe H durch den Quotienten $\frac{H}{v'} = \frac{H}{v}\cdot\frac{2E}{(A-a)}$ bestimmt; und da in dieser Zeit ein Aufzug geschieht, so wird die Anzahl der Aufzüge n in einem Arbeitstage oder in $3600.z^{Sec.}$ offenbar durch den Quotienten erhalten, welcher sich ergibt, wenn die Zeit $3600.z$ durch die Zeit eines Aufzuges $\frac{H}{v}\cdot\frac{2E}{(A-a)}$ dividirt wird, demnach ist $n = \frac{3600.z.v\,(A-a)}{H.2E}$. Multiplicirt man endlich die Zahl der täglichen Aufzüge n mit der jedesmaligen Last Q, so ist das Produkt $n.Q$ die gesammte Last, die in einem Tage auf die Höhe H gebracht wird, also der tägliche Effekt

$$n.Q = \frac{3600.z.v\,(A-a)}{H.2E}.N.k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)\frac{2E}{A-a} =$$

$$\frac{3600.t.c}{H}.N.k.\frac{v}{c}\left(2-\frac{v}{c}\right)\frac{z}{t}\left(2-\frac{z}{t}\right).$$

Hieraus ist zu ersehen, dass bei der Berechnung des täglichen Effektes dieser Maschine das nämliche zu beobachten ist, was über die Bestimmung der Grössen $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ bei dem Rade an der Welle angeführt worden. Es wird demnach auch hier das vortheilhafteste Verhältniss $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t} = 1$ seyn, d. h. die Arbeiter müssen angehalten

werden, mit ihrer mittlern Geschwindigkeit c durch die gewohnten Stunden t täglich zu arbeiten.

Wir erhalten hiernach die anzubindende Last $Q = \frac{N.k.2E}{(A-a)}$ (I);

die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H.2E}{c(A-a)}$ (II);

die Zahl der täglichen Aufzüge $n = \frac{3600.t.c(A-a)}{H.2E}$ (III), und

den Effekt $n.Q = \frac{3600.t.c.N.k}{H}$ (IV).

Die Gleichung (I) dient dazu, wenn von den vier Grössen Q, N.k, E und $\frac{A-a}{2}$ drei gegeben sind, die vierte zu bestimmen. Wäre die nöthige Stillstandszeit ϱ zwischen einem Aufzuge und dem andern gegeben, so würde in der Hinsicht, weil die Zeit eines Aufzuges der doppelten Zeit des Stillstandes gleich seyn muss, aus der Gleichung (II) $2\varrho = \frac{H.2E}{c(A-a)}$ das vortheilhafteste Verhältniss von E zu $\frac{A-a}{2}$ zu bestimmen seyn; endlich zeigt die Gleichung (IV), dass auch bei dieser Maschine das Produkt aus der in einem Tage aufgebrachten Last n.Q in die Höhe H demjenigen gleich sey, welches sich ergibt, wenn der tägliche Raum der Arbeiter auf horizontalem Wege 3600.t.c mit der mittlern Kraft N.k multiplicirt wird.

§. 112.

Der hauptsächlichste Vorzug der Gegenwinde vor dem Rade an der Welle besteht eigentlich nur darin, dass bei dem Aufzuge sehr grosser Lasten das Verhältniss $\frac{A-a}{2E}$ praktisch leichter zu bestimmen ist, als das Verhältniss $\frac{r}{R}$ beim Rade an der Welle, weil es leicht ist, für einen gegebenen Hebelsarm E der Kraft den Unterschied der Halbmesser der Wellen A — a so klein zu machen, als zur Herstellung des Gleichgewichtes nothwendig ist, wogegen man beim Rade an der Welle oft in die Verlegenheit kommt, dass entweder der Durchmesser der Welle 2r zu klein ausfällt, demnach von einer grossen Last brechen würde, oder dass im Gegentheile für einen hinreichend starken Durchmesser der Welle der Hebelsarm der Kraft übermässig gross, demnach praktisch unausführbar würde.

Die Gegenwinde ist aber nur in dem Falle brauchbar, wenn grosse Lasten auf kleine Höhen zu heben sind, weil sonst die Welle und das darum zu windende Seil zu lang, wie auch die Rollen zu gross werden, demnach bei ihrer Anwendung grossen Anständen unterliegen würde, in welcher Hinsicht dieselbe zwar in mechanischen Schriften angeführt, jedoch in der Ausübung höchst selten oder gar nicht gebraucht wird.

§. 113.

Fig. 1. Tab. 4. Wenn drei Kräfte P, Q, R gegen einen in der Ebene dieser drei Kräfte gelegenen Punkt O wirken, und ihre Richtungen OP, OQ, OR gegeben sind, so können wir die Verhältnisse dieser drei Kräfte für den Stand ihres Gleichgewichtes auf folgende Art finden.

Man denke sich die drei Richtungslinien OP, OQ und OR auf einer festen Ebene z. B. auf einem Brette gezeichnet, verlängere die Richtung einer von diesen drei Kräften z. B. von der Kraft R nach der Richtung OR rückwärts von O nach m, nehme in dieser verlängerten Richtungslinie Om einen Punkt E willkührlich an, und ziehe aus E gegen die Richtung der beiden übrigen Kräfte OP und OQ die winkelrechten Linien Eb und Ec. Fig. 1. Tab. 4.

Da in der aufgestellten Frage nur die Richtungen der drei Kräfte gegen den Punkt O gegeben sind, so können wir jede Kraft in was immer für einen Punkt ihrer Richtung stellen. Wir wollen demnach die Kraft P in b, die Kraft Q in c und die Kraft R in E, jede nach ihrer Richtung angebracht denken.

Ziehen wir nun aus E mit den Halbmessern bE und cE die Kreise b a m und c d o, so werden die Richtungen der Kräfte P und Q nämlich ObP und OcQ mit den Tangenten dieser Kreise übereinkommen und gegen die dritte in E befindliche Kraft eben so wirken, wie es bei dem Rade an der Welle der Fall ist. Weil aber alle Kräfte, welche sich in der Peripherie eines Kreises befinden, und nach den Richtungen der Tangenten dieses Kreises wirken, wegen der Gleichheit der Halbmesser auch ein gleiches Vermögen zur Umdrehung des Kreises besitzen, so können wir auch die Kraft P von b nach den in derselben Peripherie befindlichen Punkt a übersetzen, sonach die Wirkung der Kraft P nach der Richtung der Tangente bP der Wirkung derselben Kraft in a nach der Richtung der Tangente a P' gleich setzen. Auf gleiche Art können wir auch die Kraft Q von c in den Endpunkt der horizontalen Linie dEa nach d übersetzen und ihre Wirkung nach der Richtung der Tangente cQ der Wirkung derselben Kraft nach der Richtung der Tangente dQ' gleich annehmen.

Die Kräfte P' und Q' an dem horizontalen Hebel aEd sind aber (nach §. 55) im Gleichgewichte, wenn sich die Kräfte P' und Q' verhalten wie umgekehrt ihre Hebelsarme oder

$$P' : Q' = dE : aE.$$

Weil aber $P' = P$, $Q' = Q$, $aE = bE$, $dE = cE$, so ist auch

$$P : Q = cE : bE.$$

Zieht man aus E die Linie EM parallel zu OP, und EN parallel zu OQ, so erhält man ein Parallelogramm OMEN, wovon OM und ON in den Richtungen der Kräfte Q und P liegen. Hiedurch entstehen nun die ähnlichen Dreiecke EMc und ENb; denn die Winkel bei c und b sind rechte Winkel, und wegen des Parallelismus der Linien ME und ON ist der Winkel $cME = MON$, und eben so ist wegen des Parallelismus der Linien MO und EN der Winkel $MON = ENb$, also auch $cME = ENb$ u. s. w.

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt die Proportion

$$Ec : Eb = EM : EN \text{ und wegen } EM = ON \text{ und } EN = OM$$

$$\text{auch } Ec : Eb = ON : OM.$$

$$\text{Oben war } Ec : Eb = \underline{P : Q}, \text{ daher auch}$$

$$P : Q = \overline{ON : OM} \text{ d.h.}$$

die zwei Kräfte P und Q verhalten sich wie die Seiten ON und OM eines Parallelogrammes OMEN, welches in der Fläche, in welcher

sich die drei Kräfte P, Q und R befinden, nach den Richtungen derselben Kräfte gegen den Punkt O beschrieben wurde.

Eben so, wie wir das Verhältniss der 2 Kräfte P und Q in Bezug auf die Richtung
Fig. 2. Tab. 4. der dritten Kraft EO gefunden haben, können wir auch das Verhältniss der Kräfte P und R in Bezug auf die Richtung der Kraft Q finden, wenn wir Fig. 2. die Richtung der Kraft Q, nämlich MO verlängern und aus N die Linie NB parallel zu OR, und dann aus dem Punkte B die Linie BA parallel zu NO ziehen. Wir haben dann abermals ein Parallelogramm ONBA, wovon die Linien ON und OA auf gleiche Art wie zuvor die Richtungen der Kräfte P und R gegen den Punkt O vorstellen, und OB in der Richtung der dritten Kraft liegt.

Es wird also gleichfalls die Kraft P : R sich verhalten wie ON : OA. Weil aber in den Dreiecken OBN und MOE wegen des Parallelismus der Seiten alle Winkel einander gleich sind, und eben so die Seite ON = ME ist, so wird auch die Seite BN = OE seyn, und da in dem Parallelogramme OABN die Seite OA = BN ist, so wird auch OA = OE seyn. Wir können daher in der obigen Proportion statt der Seite OA die ihr gleiche OE setzen, und erhalten

$$P : R = ON : OE, \text{ d. h.}$$

die Kraft P verhält sich zur Kraft R wie die Seite ON zur Diagonale OE des Parallelogrammes OMEN. Vereinigen wir mit dieser Proportion noch die erste, so erhalten wir P : Q : R = ON : OM : OE, und weil in dem Parallelogramme OMEN die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so können wir statt OM die Seite NE setzen; sonach ist P : Q : R = ON : NE : OE. Hieraus ersehen wir, dass die drei Kräfte P, Q und R im Stande ihres Gleichgewichtes sich verhalten wie die drei Seiten eines Dreieckes, welches nach den Richtungen der drei Kräfte konstruiret worden.

§. 114.

Uiber die Winkel dieses Dreieckes ist zu bemerken, dass diese drei Winkel diejeni-
Fig. 2. gen zu 180° ergänzen, welche die Richtungen der drei Kräfte gegen einander einschliessen. Wenn wir nämlich die drei Seiten ON, NE und OE mit den diesen Seiten proportionalen Kräften P, Q und R, und die gegenüber stehenden Winkel mit p, q und r bezeichnen, so ist der Winkel q = EON = 180° — ROP, oder der Winkel q, welcher der Kraft Q gegenüber steht, ist der Ergänzungswinkel desjenigen, den die Richtungen der zwei übrigen Kräfte OP und OR am Punkte O bilden. Auf gleiche Art ist der Winkel p = NEO = MOE = 180° — QOR, oder p ist der Ergänzungswinkel desjenigen, den die Richtungen der zwei übrigen Kräfte QO und RO am Punkte O mit einander einschliessen. Eben so ist auch r = ONE = 180° — POQ; oder der Winkel, welcher der Kraft R gegenübersteht, ist der Ergänzungswinkel desjenigen, welchen die Richtungen der beiden übrigen Kräfte PO und QO am Punkte O bilden. Da nun in jedem Dreiecke die Seiten den Sinusen der gegenüberstehenden Winkel proportional sind, so haben wir

$$P : Q : R = \text{Sin. } p : \text{Sin. } q : \text{Sin. } r = \text{Sin. } QOR : \text{Sin. } POR : \text{Sin. } POQ,$$

woraus wir also für den angenommenen Fall, wenn die Richtungen der drei Kräfte PO,

Q O und R O gegeben sind, auch das Verhältniss der Grössen dieser drei Kräfte P, Q und R für den Stand des Gleichgewichtes ableiten können.

§. 115.

Das Verhältniss der Kräfte P, Q und R, nach §. 113 durch die drei Seiten des Dreieckes O N E bestimmt, kann auch aus den drei Seiten des Dreieckes o n e entnommen werden, welches von den auf die Richtungen der drei Kräfte O P, O Q und O R winkelrecht gezogenen Linien o n, n e und e o gebildet wird. Weil nämlich in der vierseitigen Figur o z o y die Winkel z und y rechte Winkel sind, so ist $o + ROP = 180^0$, und wegen der geraden Linie E O R ist auch $EOP + ROP = 180^0$, demnach $o = EOP$. Auf gleiche Art wird gezeigt, dass $e = MOE = OEN$, und $n = ONE$ sey. Da sonach wegen der Gleichheit aller drei Winkel die Dreiecke E O N und e o n einander ähnlich sind, so folgt auch $P : Q : R = \text{Sin. } OEN : \text{Sin. } EON : \text{Sin. } ONE = \text{Sin. } e : \text{Sin. } o : \text{Sin. } n = on : ne : eo$; oder jede von den drei Kräften P, Q und R ist derjenigen Seite des oben genannten Dreieckes proportional, welche auf die Richtung dieser Kraft winkelrecht gezogen ist. Fig. 3. Tab. 4.

Die letzte Methode gewähret vor der frühern den Vortheil, dass die verhältnissmässige Grösse einer jeden Kraft unmittelbar aus der Grösse der darauf winkelrechten Linie beurtheilt werden kann, welches bei der Methode mittelst des Parallelogrammes nur nach mehrern Vorbereitungen geschehen konnte.

§. 116.

Da überhaupt aus den Regeln der Geometrie und Trigonometrie bekannt ist, dass in jedem Dreiecke, wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln nur drei Stücke bekannt sind, die übrigen durch Zeichnung oder durch Rechnung gefunden werden können, so sind wir auch im Stande, für die Fälle, wenn entweder alle drei Kräfte oder nur zwei Kräfte und ein Winkel u. s. w. gegeben sind, die übrigen Stücke, nämlich die Winkel, welche die Richtungen einschliessen, oder die dritte Kraft sammt den übrigen zwei Winkeln u. s. w. zu bestimmen.

§. 117.

Eine praktische Uiberzeugung von der Richtigkeit dieses Satzes gibt folgende Vorrichtung. Eine kreisrunde Scheibe Fig. 4. wird an der Peripherie in 360 gleiche Theile getheilt, und an dieselbe werden Rollen a, b, c angesteckt, die sich an der Peripherie willkührlich verschieben lassen. Uiber diese werden Schnüre aufgelegt, welche an einem Ende mit einander verbunden, am andern Ende aber mit Schlingen versehen sind, um Gewichte daran zu hängen. Fig. 4.

Werden diese Rollen von 120 zu 120 Graden aufgestellt, wodurch die Peripherie in drei gleiche Theile getheilt wird, so wird man finden, dass durch drei gleiche Gewichte sich der gemeinschaftliche Knoten der Schnüre über den Mittelpunkt der Scheibe stellt. In diesem Falle wird nämlich das Dreieck N O E gleichseitig, und das Parallelogramm eine Raute von 4 gleichen Seiten, wovon die Seiten N O und M O einen Winkel von 120 Graden einschliessen.

Stellt man die Rollen für P und Q auf eine Entfernung von 90 Graden, und nimmt P = 8 ℔ und Q = 6 ℔, so erhält das Dreieck O N E bei N einen rechten Winkel, dem-

nach wird die dritte Kraft $OE = \sqrt{(NO^2 + NE^2)} = 10$ ℔ seyn. Wenn daher an den dritten Faden 10 ℔ angehängt werden, so wird man durch Verschiebung dieses Gewichtes an der Peripherie finden, dass für den Stand des Gleichgewichtes die Schnur OR genau in die Richtung der Diagonale OE fällt. Diese Bestättigung ergibt sich auch aus einem jeden anders gewählten Versuche.

§. 118.

Aus dem Verfahren, wie aus zwei Kräften mittelst eines Parallelogrammes eine dritte gefunden wird, deren Wirkung eben so gross ist, als die vereinigte Wirkung beider gegebenen Kräfte, lässt sich auch das Verfahren ableiten, **wie eine Kraft in zwei andere nach gegebenen oder willkührlichen Richtungen zerlegt, und die Grössen dieser Seitenkräfte gefunden werden können.** Zu einem Beispiele wollen wir das Parallelogramm OMEN annehmen, welches um die Diagonallinie OE beschrieben wurde. Es sey OE die gegebene mittlere Kraft, OM und ON aber die Richtungen der Kräfte, in welche die mittlere zerlegt werden soll. Man ziehe EN parallel zu OM und EM parallel zu ON, so gibt das Verhältniss der Linien ON und OM zur mittlern OE das Maass der beiden gesuchten Seitenkräfte.

Fig. 5. Tab. 4.

Wenn wir ferner aus N die Linie NI winkelrecht auf OE, OH parallel zu IN und NH parallel zu OE ziehen, so wird die Seitenkraft ON abermals in OH und OI aufgelöst. Auf gleiche Art, wenn wir aus M die Linie MK winkelrecht auf OE, MG parallel zu OE und OG parallel zu KM ziehen, so wird auch die Kraft OM in die beiden Seitenkräfte OG und OK zerlegt.

Da die beiden Dreiecke ONE und OME als die Hälften eines und desselben Parallelogrammes einander gleich und ähnlich sind, so wird auch die Höhe NI der Höhe MK gleich seyn, weil aber $NI = OH$ und $MK = OG$ ist, so ist auch $OH = OG$. Daraus ist ersichtlich, dass bei der Zusammensetzung der zwei Kräfte OM und ON die beiden entgegenstehenden OH und OG einander aufheben; folglich von ON nur die Kraft OI, und von OM nur die Kraft OK übrig bleibt. Weil aber die beiden rechtwinkeligen Dreiecke ONI und MKE einander gleich und ähnlich sind, so ist auch $OI = KE$. Demnach ist nach der Zusammensetzung der beiden Kräfte ON und OM die Summe $OI + OK = KE + OK = OE$; woraus also deutlich hervorgeht, dass bei der Zusammensetzung zweier Kräfte, deren Richtungen verschieden sind, nach der Abscheidung desjenigen, was in diesen zwei Kräften entgegenstehet (nämlich der Kräfte OH und OG) die übrigbleibende Summe wirklich der gefundenen Diagonale gleich ist.

§. 119.

Fig. 6. Wenn mehr als 2 Kräfte z. B. 3 oder 4 Kräfte zusammengesetzt, und die aus allen hervorgehende mittlere Kraft und ihre Richtung gefunden werden soll, so lässt sich dieses nach der bisherigen Methode auf folgende Art bewirken: Es seyen 4 Kräfte durch die Linien OA, OB, OC und OD sowohl nach ihrer Lage als Grösse vorgestellt. Man konstruire nach den ersten 2 Kräften das Parallelogramm AOBE, so ist die Diagonale OE das mittlere Resultat der beiden ersten Kräfte OA und OB. Auf gleiche Art wird diese mittlere Kraft OE mit der dritten OC durch das Parallelogramm OEFC zusammengesetzt, und die Diagonale OF wird die vereinigte Grösse und Richtung der

drei Kräfte vorstellen. Wird dann die Kraft OF mit der vierten OD durch das Parallelogramm OFGD zusammengesetzt, so gibt die Diagonale dieses Parallelogrammes die vereinte Kraft und mittlere Richtung aller vier Kräfte OA, OB, OC und OD an.

§. 120.

Die Anwendungen der über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte vorgetragenen Sätze sind in der Mechanik sehr mannigfaltig und von der grössten Wichtigkeit. Um hierin vorläufig nur ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, ein Seil sey an den Punkten M und N befestigt, in der Mitte des Seiles in B ist das Gewicht Q angehängt; wenn nun gefragt wird, wie stark die zwei Seile MB und NB durch die Last Q gespannt werden, so verlängere man die Richtung QB, nach welcher die Last Q den Punkt B herabzieht, aufwärts nach A, und ziehe aus M die Linie MA parallel zu NB und eben so die Linie NA parallel zu MB. Wird nun die Last Q durch die Diagonallinie AB vorgestellt, so zerfällt dieselbe in die zwei Seitenkräfte MB und NB. Nach §. 113 wird sich die Spannung des Seiles MB zur Last Q verhalten, wie MB : AB oder wie die halbe Länge des Seiles NBM zu 2BC. Wird nun die Linie BC oder der Abstand des Punktes B von der Horizontallinie MN gemessen und mit h bezeichnet, so ist die Spannung des Seiles $MB = Q \cdot \frac{MB}{2BC} = Q \cdot \frac{MB}{2h}$. Hieraus ist zu ersehen, dass das Seil MB um so stärker gespannt werde, je länger das Seil und je kleiner der Abstand des Punktes B von der horizontalen Linie MN ist. Fig. 7. Tab. 4.

Hieraus erklärt sich:

Erstens. Dass kein Seil, auch ohne angehängte Last, in eine vollkommene Horizontallinie gespannt werden könne, weil es schon durch sein eigenes Gewicht herabgezogen wird.

Zweitens. Dass die Spannung des Seiles um so stärker seyn müsse, je näher dasselbe der Horizontallinie gebracht wird.

Drittens. Dass ein stark gespanntes Seil durch eine geringe Kraft, z. B. durch den Schlag eines Stockes zerrissen werden könne.

Viertens. Dass man die Haltbarkeit der Seile und Ketten auch dadurch prüfen könne, wenn man nach und nach grössere Gewichte in B anhängt, jedesmal die Grösse BC misst, und daraus die Kraft berechnet, von welcher das Seil in jedem Falle gespannt wird.

§. 121.

Ein zweites Beispiel gibt uns die Erklärung der sogenannten Kniehebel. Wenn nämlich 2 feste Stangen oder Stützen AM und AN in A durch ein Gelenke (*Charnière*) mit einander verbunden und ihre beiden äussersten Endpunkte M und N zu dem Zwecke gegen zwei andere feste Körper gestützt werden, um durch den Druck einer in A nach der Richtung AB angebrachten Kraft P diese 2 Punkte M und N auseinander zu treiben, so nennt man diese Verbindung einen Kniehebel. Fig. 8.

Fig. 8. Tab. 4. Wir haben bereits im vorhergehenden §. gesehen, dass die Kraft $P = AB$ mittelst des Parallelogrammes MBNA in die zwei Seitenkräfte AM und AN zerlegt wird, wodurch also der Punkt M nach der Richtung AM mit einer Kraft $= P \cdot \frac{AM}{AB}$ gedrückt wird. Dasselbe geschieht in dem Punkte N.

Wenn gegen diesen Kniehebel noch ein zweiter MBN von derselben Grösse angebracht und mit einer gleichen Kraft nach der Richtung B A getrieben wird, so wird der Punkt M abermals nach der Richtung BM mit der gleichen Kraft $P \cdot \frac{BM}{AB}$ gedrückt. Diese 2 Kräfte AM und BM, die mit einander im Punkte M den Winkel AMB einschliessen, können wir mittelst des Parallelogrammes BMAN in die mittlere NM zusammensetzen, und die Kraft NM wird sich zur Kraft AM verhalten, wie NM : AM; daraus folgt die Kraft $NM = Q = P \cdot \frac{NM}{AB}$, mit welcher der Punkt M nach der Richtung CM gedrückt wird. Eben so wird der Punkt N nach der Richtung C N von einer gleichen mittlern Kraft $P \cdot \frac{NM}{AB}$ gedrückt.

Man sieht hieraus, dass die Wirkung der beiden in A und B angebrachten Kräfte auf die Entfernung der beiden Punkte N und M um so wirksamer ist, je kleiner AB gegen NM ist; und dass die anzubringenden Kräfte P verschwinden, wenn $AB = 0$ oder A M und A N und eben so BM und BN in die gerade Linie MN gebracht sind. Wenn es also darauf ankommt, die Punkte M und N nur wenig von einander zu entfernen, so werden die hiezu erforderlichen Kräfte in A und B um so kleiner werden, je näher diese Punkte an der geraden Linie NM stehen. Dieser Fall findet bei dem Prägen der Metalle statt, wo der den Prägestücken beizubringende Eindruck von geringer Tiefe ist, folglich keiner bedeutenden Kraft bedarf, obgleich der Widerstand des Metalles, welcher hier durch M N vorgestellt wird, sehr gross seyn kann. Die Tiefe des Eindruckes wird nämlich durch $(MA + AN) - MN = 2\sqrt{(MC^2 + CA^2)} - 2MC$ bestimmt. Setzen wir diese $= a$ und die Grösse $AB = 2AC = x$, die Höhe des Prägestockes $MN = 2MC = h$, so erhalten wir nach der letzten Gleichung $a = 2\sqrt{\left(\frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{4}\right)} - h$ und $x = \sqrt{a(a + 2h)}$. Werden nun diese Werthe in die frühere Gleichung $Q = P \cdot \frac{NM}{AB} = P \cdot \frac{h}{x}$ gesetzt, so ist $P = Q \cdot \frac{x}{h}$ $= Q\sqrt{\frac{a}{h}\left(2 + \frac{a}{h}\right)}$ od. beinahe $= Q\sqrt{\frac{2a}{h}}$. Wir sehen also hieraus, dass die nöthige Kraft P um so kleiner ist, je kleiner der Widerstand Q oder je weicher das Metall ist und je grösser die Höhe des Prägestockes gegen die Tiefe des Eindruckes genommen wird. Auch ist hieraus ersichtlich, dass dem grössern Widerstande des Metalles durch eine grössere Höhe des Prägestockes und der beiden Kniehebel begegnet werden kann.

§. 122.

Fig. 9. Eine Ebene MTON, die mit dem Horizonte NOUV einen Winkel macht, wird eine **schiefe Ebene** oder schiefe Fläche genannt.

Wenn eine Last über eine schiefe Fläche hinaufgetragen oder geführt werden soll, so ist hiebei:

Erstens. Der Neigungswinkel, den die schiefe Fläche mit dem Horizonte macht, und

Zweitens. Der Winkel, den die Richtung der Kraft mit der schiefen Fläche bildet, zu berücksichtigen.

Der Neigungswinkel der schiefen Fläche wird auf folgende Art bestimmt: Aus einem willkührlichen in der schiefen Fläche angenommenen Punkte A wird die Linie AB senkrecht auf die Horizontalfläche NOUV herabgelassen, dann aus dem Punkte B gegen die Durchschnittslinie NO die Linie BC winkelrecht gezogen, und der Punkt A mit C verbunden; der sich hieraus ergebende Winkel ACB ist der Neigungswinkel, den die schiefe Fläche mit der horizontalen macht. Fig. 9. Tab. 4.

Hiebei wollen wir allgemein die Höhe $AB = h$, die Grundlinie $BC = b$, und die Länge $AC = l$ setzen, und diese Benennungen bei allen künftigen Berechnungen beibehalten.

Die Zugkraft kann entweder parallel zur schiefen Fläche, wie Fig. 10. oder parallel zur Horizontallinie, wie Fig. 11. oder endlich unter irgend einem Winkel gegen die schiefe Fläche, wie Fig. 12. wirken.

§. 123.

Im ersten Falle, wenn die Kraft P eine Last Q parallel über die schiefe Fläche hinaufziehen soll, befinde sich z. B. der Körper Q auf der schiefen Fläche in o. Die Schwere treibt den Körper nach der Richtung oe senkrecht auf die Horizontallinie CB herab. Die Grösse dieser Kraft können wir durch oe vorstellen und dieselbe mittelst des Parallelogrammes onem in on winkelrecht auf die schiefe Fläche, und in om nach der Richtung der Kraft parallel zur schiefen Fläche auflösen. Die Wirkung der Kraft on wird ganz von der schiefen Fläche aufgehoben, weil sie durch ihre winkelrechte Stellung den Körper Q weder aufwärts noch abwärts treibt, demnach eben so wie die Wirkung der Schwere gegen eine horizontale Fläche zu betrachten ist, welche den Körper nur andrückt, aber demselben keine Bewegung gibt. Es bleibt demnach von dem Gewichte oe des Körpers nur die Kraft om übrig, welche den Körper über die schiefe Fläche herabzulaufen nöthigen würde, und desshalb von der angebrachten Kraft P aufgehalten werden muss. Es wird sich demnach für den Stand des Gleichgewichtes die Proportion $P : Q = om : oe$ ergeben. Das Dreieck moe ist dem Dreiecke ACB ähnlich, weil die Winkel m und B rechte Winkel sind, und wegen des Parallelismus der Linien mo und CA und auch der Linien oe und AB der Winkel $moe = Cxe = CAB$ ist, folglich der dritte Winkel $oem = ACB$ seyn muss. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt $om : oe = AB : AC$, und weil Fig. 10.

$$om : oe = P : Q,\ AB = h,\ \text{und}\ AC = l\ \text{ist},$$

so ist auch $P : Q = h : l$, d. h. wenn der Körper Q von der Kraft P parallel zur schiefen Fläche gezogen oder geführet wird, so verhält sich die Kraft P zur Last Q, wie die Höhe der schiefen Fläche h zur Länge der schiefen Fläche l.

Fig. 10. Tab. 4. Dieser Satz wird von der Erfahrung auf folgende Art bestättiget: Es sey die Last Q ein Cylinder und in seiner mathematischen Achse o mit Zapfen versehen, an welche Schnüre gebunden werden. Am obern Ende der schiefen Fläche befinden sich zwei um ihre Achsen bewegliche Rollen, über welche die an ihren Endpunkten mit Wagschalen versehenen Schnüre gezogen sind. Wird nun der Cylinder abgewogen, die Höhe A B und die Länge A C der schiefen Fläche gemessen und z. B. $AB = \frac{1}{2} AC$ oder der Neigungswinkel $ACB = 30$ Grade gefunden, so ergibt sich, dass die zum Gleichgewichte erforderliche Summe der Gewichte (sammt jenem der Wagschalen) genau die Hälfte vom Gewichte des Cylinders sind. Wird die schiefe Fläche erniedriget und $AB = \frac{1}{3} AC$ gemacht, so ist auch das Gewicht P nur gleich $\frac{1}{3}$ Q. u. s. w. Ist endlich die Höhe $AB = o$, oder die schiefe Fläche horizontal gestellt, so bleibt der Cylinder Q an jedem Orte von selbst in Ruhe und es ist kein Gewicht P nöthig.

§. 124.

Fig. 11. Im zweiten Falle, wenn die Kraft P parallel zur Grundlinie wirkt, so wird die Last abermals durch die senkrechte Linie o e vorgestellt, und aus o die Linie o n winkelrecht auf die schiefe Fläche A C, und dann o m parallel zur Grundlinie gezogen und das Parallelogramm e n o m ergänzt.

Die Kraft o n wird abermals wegen ihrer winkelrechten Richtung auf die schiefe Fläche von derselben aufgehoben, es bleibt demnach nur die Kraft o m übrig, welche von der Zugkraft P nach der Richtung $\overrightarrow{mo}$ gewältigt werden muss. Es verhält sich demnach $P : Q = om : oe$. Es sind aber in den Dreiecken m o e und A B C die Seiten des einen Dreieckes auf die Seiten des andern winkelrecht, demnach alle Winkel gleich und die Dreiecke ähnlich. Hieraus folgt $mo : oe = AB : BC$; weil aber

$mo : oe = P : Q$, $BC = b$ und $AB = h$ ist, so ist auch $\underbrace{P : Q = h : b}$, d. h. wenn die Zugkraft zur Grundlinie parallel ist, so verhält sich die Zugkraft P zur Last Q, wie die Höhe h zur Grundlinie b der schiefen Fläche.

Zur Bestättigung dieses Satzes dient eine ähnliche Vorrichtung wie vorhin, nur müssen die Rollen und der Cylinder so gestellt werden, dass die Schnüre für die Zugkraft P parallel zur Grundlinie werden.

§. 125.

Fig. 12. Im dritten Falle, wenn die Richtung der Kraft P mit der schiefen Fläche A C was immer für einen Winkel A w u (den wir = w setzen wollen) bildet, so können wir die Last Q abermals durch die senkrechte Linie o e vorstellen, die Linie o n winkelrecht auf die schiefe Fläche, o m nach der Richtung der Zugkraft m o u ziehen, und das Parallelogramm m e n o ergänzen.

Da die Kraft o n von der schiefen Fläche getragen wird, so bleibt nur die Kraft o m übrig, welcher die Zugkraft P gleich seyn muss. Wir haben demnach $P : Q = mo : oe$. In dem Dreiecke m o e sind aber die Seiten m o und o e den Sinusen der gegenüberste-

henden Winkel e und m proportional, demnach ist mo : oe = Sin. meo : Sin. emo. Wir Fig.
haben aber die Linie oe senkrecht auf CB und em parallel zu on, folglich winkelrecht 12.
auf die schiefe Fläche gezogen; es ist daher der Winkel meo = ACB (den wir = ν Tab. 4.
setzen wollen) also Sin. meo = Sin. ν. Weiter ist Sin. emo = Sin. smw, weil aber in dem Dreiecke wms bei s ein rechter Winkel ist, so ist

Sin. smw = Cos. mws = Cos. w, also
mo : oe = Sin. ν : Cos w, und weil
mo : oe = P : Q ist, so erhalten wir
P : Q = Sin. ν : Cos. w, d. h. die Zugkraft P verhält sich zur Last Q, wie der Sinus des Neigungswinkels ACB der schiefen Fläche zum Cosinus des Zugwinkels uwA, den die Richtung der Kraft mit der schiefen Fläche macht.

Dieser letzte Satz enthält die beiden vorhergehenden. Wenn nämlich die Zugkraft zur schiefen Fläche parallel wirkt, folglich w = o wird, so ist Cos. w = 1 und P : Q = Sin. ν : 1 = h : l. Wenn die Zugkraft parallel wirkt zur Grundlinie, so ist w = ν, folglich P : Q = Sin. ν : Cos. ν = h : b.

§. 126.

Die Anwendung dieser Sätze kommt in der Mechanik sehr häufig vor. Obwohl die Verführung theilbarer Lasten mit Schubkarren auf ebenem Wege bereits §. 82 vorgekommen ist, so ist es hier doch nöthig, denselben Gegenstand für die Fälle, wo die Verführung auf schiefen Flächen geschehen muss, auszuführen, um so mehr, als solche Verführungen bei jedem Civil- und Wasserbaue vorkommen, und zur Verfassung der Kostenanschläge von grosser Wichtigkeit sind.

Aufgabe. Es ist zur Regulirung eines Flusses ein Graben (*Cunette*) auszuheben, die Breite dieses Grabens sey B, (= 4 Klafter) die Tiefe H (= 2 Klafter) und die Länge L (= 200°), das Gewicht eines Kubikfusses Erde g (= 100 ℔), folglich das Gewicht des auszuhebenden und zu verführenden Erdkörpers g . B . L . H (= 34560000 ℔). Die ausgehobene Erde soll zu beiden Seiten auf eine Entfernung E (= 50°) mittelst Schubkarren verführet werden. Das Gewicht des Schubkarrens G wird 30 ℔ angenommen. Es wird gefragt, wie viel Taglöhne oder Arbeitstage hiezu erfordert werden.

Um diese Aufgabe aufzulösen, wollen wir erst untersuchen, welche Last von einem Manne auf die gegebene Entfernung E mit Schubkarren geführt werden kann.

Auf ebenem oder horizontalem Wege haben wir nach §. 81 die Gleichung $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)=\left(Q+G\right)\frac{r}{R}$; weil aber hier die Erde aus einem Graben bis zur Tiefe von 2 Klaftern ausgehoben werden muss, so wollen wir die mittlere Tiefe h = 1° setzen. Da über diese schiefe Fläche nicht nur die Last Q, sondern auch das Gewicht des Schubkarrens G, und überdiess noch das eigene Gewicht des Arbeiters (M) hinaufgeschafft werden muss, so kommt zur bereits angeführten Last $\left(Q+G\right)\frac{r}{R}$ noch die Last $\frac{h}{l}\left(Q+G+M\right)$ zuzusetzen; wir haben demnach die Gleichung

$k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)=\left(Q+G\right)\frac{r}{R}+\frac{h}{l}\left(Q+G+M\right)$. Hieraus folgt

$$Q=\frac{k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{G.r}{R}-\frac{G.h}{l}-\frac{M.h}{l}}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}.$$

Zur Abkürzung wollen wir $\frac{G.r}{R}+\frac{G.h}{l}+\frac{M.h}{l}=B$ setzen, so erhalten wir

$$Q=\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}\;....\;(I).$$

Die Zeit einer Hin- und Rückfahrt auf die Entfernung E ist nach §. 46 $\frac{E}{v}+\frac{E}{V}=\frac{E}{v}\left(\frac{V+v}{V}\right)$ (II), eben so ist die Anzahl der in einem Tage zu verrichtenden Fuhren wie dort, $n=\frac{3600.z.v}{E}\left(\frac{V}{V+v}\right)$ (III), demnach die gesammte Last, welche in einem Tage an Ort und Stelle gebracht wird

$$n.Q=\frac{3600.z.v}{E}\left(\frac{V}{V+v}\right)\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}\;....\;(IV).$$

Werden nun diese Gleichungen I, II, III, IV mit den obigen §. 46 verglichen, so sind die gegenwärtigen von jenen nur dadurch verschieden, dass anstatt des dortigen k vor dem Einschlusszeichen hier die Grösse $\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}$ erscheint.

Wir werden demnach auch mit Rücksicht auf diese Verschiedenheit, die vortheilhafteste Ladung $Q=\frac{7}{6}\left\{\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}\right\}\left(1-\frac{2.B}{21.k}\right)$ (V), die Anzahl der Fuhren $n=\frac{3600.t.c}{E}\frac{10}{17}\left(1-\frac{19.B}{21.k}\right)$ (VI) und die tägliche an Ort und Stelle gebrachte Last $n.Q=\frac{3600.t.c}{E}.\frac{35}{51}\left\{\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}\right\}\left(1-\frac{B}{k}\right)$ (VII) erhalten.

Wir haben bereits oben gesehen, dass die Grösse 3600.t.c die Länge des Weges bezeichnet, den ein Arbeiter täglich mit der Last k zu machen im Stande ist; wenn daher die Arbeiter von der Art sind, dass sie täglich die Last von 25 ℔ auf die Entfernung von 3 Meilen zu tragen vermögen, so ist 3600.t.c = 12000 Klafter, k = 25 ℔; M sey = 125 ℔; ferner ist in unserm Falle E = 50°; $\frac{r}{R}=\frac{1}{3}$ wie §. 82, $\frac{h}{l}=\frac{1}{50}$, also $\frac{r}{R}+\frac{h}{l}=\frac{1}{3}+\frac{1}{50}=\frac{53}{150}$, demnach für mittelmässige Arbeiter $\frac{k}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}=\frac{25.150}{53}$,

$$\text{und } B = G\left(\frac{r}{R} + \frac{h}{l}\right) + \frac{M.h}{l} = 10{,}6 + 2{,}5 = 13{,}1 \text{ also } \frac{B}{k} = 0{,}524.$$

Diese Werthe substituirt geben die von einem Arbeiter in einem Tage verführte Last

$$n.Q = \frac{12000}{50}.\frac{35}{51}.\frac{25.150}{53}\left(1 - 0{,}524\right) = 11654\left(1 - 0{,}524\right) = 5547 \text{ ℔}.$$

Wird nun mit dieser Zahl in die zu verführende Summe von 34560000 ℔ dividirt, so ergibt sich, dass zu dieser Arbeit 6230 Arbeitstage nothwendig sind. Hiezu ist noch die Summe derjenigen Arbeiter beizusetzen, welche für das Aufgraben und Aufladen in die Schubkarren erforderlich sind. Nach sehr vielen Erfahrungen wurde gefunden, dass zum Aufgraben und zum Aufladen einer kubischen Klafter beim leichtern Erdreich 2 Mann, bei schwererem, wo zugleich die Haue angewendet werden muss, 3 bis 4 Mann erforderlich sind. Unsere Erdaushebung beträgt 1600 Kub. Klafter, folglich wenn zwei Mann auf eine Kubikklafter gerechnet werden, so sind hiezu noch 3200 Arbeitstage nothwendig: also beträgt die ganze Arbeit 9430 Taglöhne oder Arbeitstage. Wenn nun der Taglohn eines Arbeiters bekannt ist, so lässt sich hieraus der Kostenanschlag ohne Anstand berechnen.

Eine genauere Rechnung für die Auflösung dieser Aufgabe erhält man mit Hülfe der §. 49 aufgestellten Tabelle. Da jedoch unser $\frac{B}{k} = 0{,}524$ in jener Tabelle nicht vorkommt, so müssen die zugehörigen Grössen für diesen Werth proportional berechnet werden.

Es ist nämlich dort für den Werth $\frac{B}{k} = 0{,}5$ der grösste tägliche Effekt

$n.Q = 0{,}4126 \cdot \frac{3600.t.c.k}{E}$; und für $\frac{B}{k} = 0{,}45$ ist der grösste tägliche Effekt

$n.Q = 0{,}4347 \cdot \frac{3600.t.c.k}{E}$.

Vergleicht man diese beiden Effekte mit einander, so ist zu ersehen, dass durch die Vermehrung des $\frac{B}{k} = 0{,}45$ um $0{,}05$ der Coefficient $0{,}4347$ um $0{,}0221$ vermindert wurde, da aber $\frac{B}{k}$ in unserm Falle $= 0{,}524$ ist, folglich die Verhältnisszahl $0{,}45$ um $0{,}074$ vermehrt ist, so ergibt sich die Verminderung (x) des obigen Coefficienten $0{,}4347$ durch die Proportion $0{,}05 : 0{,}0221 = 0{,}074 : x$ und $x = 0{,}0327$. Es ist also für

$\frac{B}{k} = 0{,}45 + 0{,}074 = 0{,}524$ der grösste tägliche Effekt

$$n.Q = \left(0{,}4347 - 0{,}0327\right).\frac{3600.t.c.k}{E} = 0{,}4020 \cdot \frac{3600.t.c.k}{E} \quad \ldots\ldots (VIII).$$

Die Entgegenhaltung dieser Gleichung mit der obigen (VII) zeigt, dass in die Gleichung VII statt $\frac{35}{51}\left(1 - \frac{B}{k}\right)$ der genauern Rechnung zu Folge die Zahl $0{,}4020$ zu setzen ist. Wir erhalten hieraus für unsere Aufgabe das von einem Arbeiter täglich verführte Quantum $n.Q = 0{,}4020 \cdot \frac{3600.t.c}{E}\left\{\frac{k}{\frac{r}{R} + \frac{h}{l}}\right\} \ldots\ldots (IX).$

Mit Beibehaltung der oben angeführten Werthe erhalten wir sonach

$$n . Q = 0{,}4020 \cdot \frac{12000}{50} \cdot \frac{25 . 150}{53} = 0{,}4020 . 16981 = 6826 \text{ ℔};$$ daraus ergibt sich die Zahl der nöthigen Arbeitstage $\frac{34560000}{6826} = 5063.$

Rechnet man noch die zum Aufgraben und Aufladen nöthigen Arbeitstage mit 3200 wie oben hinzu; so sind nach der genauen Rechnung nur 8263 Taglöhne zur Herstellung der Arbeit nothwendig.

Da zur Herstellung der Erdaushebung von 1600 Kubik-Klaftern nach dieser Rechnung 8263 Arbeitstage erfordert werden, so ergeben sich bei dem oben angenommenen Kraftvermögen der Arbeiter auf jede Kubik-Klafter 5 Arbeitstage.

Berechnen wir diese Aufgabe nochmals nach beiden Rechnungsmethoden für stärkere Arbeiter, welche das Kraftvermögen besitzen, eine Last von 30 ℔ täglich 4 Meilen weit tragen zu können, so ist $3600 . t . c = 16000$ Klafter und $k = 30$ ℔. Setzen wir ferner $M = 150$ ℔, und behalten die übrigen Grössen wie früher; so ergibt sich $\frac{B}{k} = \frac{10{,}6 + 3}{30} = 0{,}453$ und nach Substitution der entsprechenden Werthe in die Gleichung (VII)

$$n . Q = \frac{16000}{50} \cdot \frac{35}{51} \cdot \frac{30 . 150}{53} \left(1 - 0{,}453\right) = 18646 . 0{,}547 = 10199 \text{ ℔}.$$

Da nun ein Arbeiter 10199 ℔ in einem Tage verführt, so sind um obige 34560000 ℔ zu verführen 3389 Arbeitstage nothwendig. Zum Aufgraben und Aufladen wurden 3200 Arbeitstage berechnet, so erfordert die Herstellung des Grabens 6589 Arbeitstage.

Für die genaue Auflösung nach der Tabelle (§. 49) findet man auf gleiche Art wie früher das von einem stärkern Arbeiter täglich zu verführende Quantum

$$n . Q = 0{,}4334 \cdot \frac{16000}{50} \cdot \frac{30 . 150}{53} = 11775 \text{ ℔}.$$

Hiernach würden zur Verführung des obigen Erdquantums $\frac{34560000}{11775} = 2935$ Arbeitstage, und diese noch mit den oben berechneten 3200 Arbeitstagen zum Aufgraben und Aufladen der Erde vermehrt, zur gänzlichen Herstellung des Grabens 6135 Taglöhne oder Arbeitstage nothwendig seyn.

Wenn wir nunmehr die Zahl 6135 durch die Anzahl der Kubik-Klafter 1600 dividiren, so ergeben sich für jede kubische Klafter 3,8 Arbeitstage.

Zur Bestättigung dieser Rechnungen verdient bemerkt zu werden, dass durch die letzt verflossenen 20 Jahre bei der böhm. Wasserbaudirektion sehr viele solche Arbeiten vorgekommen, und alle nur nach dem Verhältnisse von 3 bis 4 Taglöhnen für eine kubische Klafter an die Arbeiter in Accord gegeben und ausgeführt worden sind.

§. 127.

Wenn bei Gebäuden Stockwerke aufgeführt werden, so werden die Baumaterialien entweder über schiefe Flächen hinauf geschafft, oder mittelst eines Haspels und Anwendung zweier Tonnen hinaufgezogen. Für den ersten Fall ist die Rechnung folgende:

Da hiebei gewöhnlich Schubkarren gebraucht werden, so ist das Gewicht der Ladung in den Schubkarren nach §. 126, $Q = \dfrac{k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{G.r}{R} - \frac{h}{l}\left(G + M\right)}{\frac{r}{R} + \frac{h}{l}}$; die Zeit einer Fahrt über die schiefe Fläche $= \frac{E}{v}$, und da wir für die Rückfahrt $V = 2c$ setzen können, so ist die Zeit, die auf eine Fuhr verwendet wird, $= \frac{E}{v} + \frac{E}{2c} = \frac{E}{v}\left(1 + \frac{v}{2c}\right)$; die Anzahl der Fuhren in einem Tage $n = \dfrac{3600.z.v}{E\left(1 + \frac{v}{2c}\right)}$; folglich die in einem Tage auf das Baugerüst gebrachte Last

$$n.Q = \frac{3600.t.c.k\left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}\right\}\frac{v}{c}.\frac{z}{t}}{E\left(\frac{r}{R} + \frac{h}{l}\right)\left(1 + \frac{v}{2c}\right)},$$ wenn nämlich zur Abkürzung

$\frac{G.r}{R} + \frac{h}{l}\left(G + M\right) = B$ gesetzt wird.

Obwohl eine ähnliche Gleichung schon oben §. 46 für das Tragen theilbarer Lasten in Traggefässen abgehandelt worden, so lässt sich doch hier die dort angeführte abgekürzte Rechnungsmethode nicht anwenden, weil $\frac{B}{k}$ wegen des dabei vorkommenden Verhältnisses $\frac{M}{k} = 5$ nicht als ein kleiner Bruch behandelt werden kann. Setzen wir nämlich z. B. $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$, das Gewicht des Schubkarrens $G = 30$ ℔, und weil zu solchen Arbeiten gewöhnlich stärkere Menschen gebraucht werden, $k = 30$ ℔, und $G + M = 30 + 150 = 180$ ℔, so ist $\frac{B}{k} = \frac{11}{6}$, demnach viel zu gross, als dass diese Grösse wie ein kleiner Bruch behandelt und die höhern Potenzen von $\frac{B}{k}$ weggelassen werden könnten. Eine genaue Auflösung dieser Frage kann demnach nur mittelst der Differenzialrechnung gegeben werden. *) In der folgenden Tabelle sind

*) Die Regeln für die vortheilhafteste Verwendung der Arbeiter bei dem Gange über schiefe Flächen ergeben sich aus den Bedingnissen, unter welchen der Ausdruck für den Effekt

$$n.Q = \frac{3600.t.c}{E}.\frac{k}{\left(\frac{r}{R} + \frac{h}{l}\right)}.\left\{\frac{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}}{1 + \frac{v}{2c}}\right\}\frac{v}{c}.\frac{z}{t}$$ ein Maximum wird. Da ausser $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ alle übrigen Grössen gegeben sind, so muss der veränderliche Theil

$$\left\{\frac{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{B}{k}}{1 + \frac{v}{2c}}\right\}.\frac{v}{c}.\frac{z}{t}$$ sowohl in Hinsicht auf $\frac{v}{c}$ als $\frac{z}{t}$ zu einem Maximum gemacht werden.

nach den unten angeführten Rechnungsformeln diese Verhältnisse für die gewöhnlichsten Fälle berechnet.

Differenziren wir diesen Ausdruck in Hinsicht auf $\frac{z}{t}$, wobei $\frac{v}{c}$ als unveränderlich betrachtet wird, und setzen wir den sich ergebenden Differenzialkoefficienten $\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{2z}{t}\right)-\frac{B}{k}=0$, so folgt hieraus $\frac{z}{t}=1-\frac{B}{2k\left(2-\frac{v}{c}\right)}$. Betrachten wir wieder $\frac{z}{t}$ als beständig, und bloss $\frac{v}{c}$ als veränderlich, so gibt der Differenzialkoefficient die Gleichung

$$\left(2-\frac{2v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\left(1+\frac{v}{2c}\right)-\tfrac{1}{2}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}\frac{v}{c}=0.$$

Hieraus folgt $\left\{\left(2-\frac{2v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{2c}\right)-\frac{v}{2c}\left(2-\frac{v}{c}\right)\right\}\left\{2-\frac{z}{t}\right\}-\frac{B}{k}\left(1+\frac{v}{2c}\right)+\frac{B.v}{k.2c}=0$

oder $\left(2-\frac{2v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}=0$, und wenn statt $\frac{z}{t}$ der gefundene Werth $1-\frac{B}{2k\left(2-\frac{v}{c}\right)}$ gesetzt wird, so erhalten wir $\left(2-\frac{2v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left\{1+\frac{B}{2k\left(2-\frac{v}{c}\right)}\right\}-\frac{B}{k}=0$,

sonach $2-\frac{2v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}-\frac{B}{k}\left\{1-\frac{\left(2-\frac{2v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}\right)}{2\left(2-\frac{v}{c}\right)}\right\}=2-\frac{2v}{c}-\frac{v^2}{2c^2}-\frac{B}{k}\left\{\frac{1+\frac{v^2}{4c^2}}{2-\frac{v}{c}}\right\}=0.$

Wird nun diese letzte Gleichung mit $2-\frac{v}{c}$ multiplicirt, so ergibt sich folgende allgemeine Gleichung $4-6\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^3}{2c^3}-\frac{B}{k}\left(1+\frac{v^2}{4c^2}\right)=0$, woraus nach der bekannten Näherungsmethode das vortheilhafteste Verhältniss $\frac{v}{c}$ für jeden Werth von $\frac{B}{k}$ leicht gefunden werden kann.

Es ist hiebei merkwürdig, dass in dem Falle $B=4k$ das Verhältniss $\frac{v}{c}=0$ wird; in diesem Falle wird nämlich die Kraft des Arbeiters von dem Gewichte des Schubkarrens und seinem eigenen Gewichte auf der schiefen Fläche $\frac{G.r}{R}+\frac{h}{l}\left(G+M\right)$ ganz erschöpft, so wie bereits §. 20 in der zweiten Bemerkung Seite 19 gezeigt wurde. Es ist also zur Erreichung eines grossen Effektes nothwendig, das Gewicht des Schubkarrens und die Verhältnisse $\frac{r}{R}$ und $\frac{h}{l}$ möglichst klein zu machen.

Nach dem gefundenen Verhältnisse $\frac{v}{c}$ wird dann auch das Verhältniss der Arbeitszeit nach der Gleichung $\frac{z}{t}=1-\frac{B}{2k\left(2-\frac{v}{c}\right)}$ berechnet und durch Substitution dieser Werthe sowohl die Anzahl der täglichen Fuhren $n=\frac{3600.t.c.\frac{z}{t}.\frac{v}{c}}{E\left(1+\frac{v}{2c}\right)}$ als auch die jedesmalige Ladung

$$Q=\frac{k\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{k}\right\}}{\frac{r}{R}+\frac{h}{l}}$$ bestimmt.

Tabelle

über die vortheilhaftesten Verhältnisse für das Aufbringen der Lasten auf Baugerüste mittelst Schubkarren.

Steigung der schiefen Fläche	Das bedingte Verhältniss	Vortheilhafteste Verhältnisse für		Anzahl der Fuhren in einem Tage	Die Ladung	Der grösste Effekt in einem Tage
$\frac{h}{l}$	$\frac{B}{k}$	$\frac{v}{c}$	$\frac{z}{t}$	n	Q	n . Q
$^2/_6$	$^7/_3$	0,285	0,320	$0{,}080 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$0{,}822 \cdot k$	$0{,}0219 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_7$	$^{43}/_{21}$	0,338	0,384	$0{,}111 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$1{,}031 \cdot k$	$0{,}0327 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_8$	$^{11}/_6$	0,379	0,435	$0{,}139 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$1{,}206 \cdot k$	$0{,}0419 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_9$	$^5/_3$	0,412	0,475	$0{,}162 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$1{,}359 \cdot k$	$0{,}0489 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{12}$	$^4/_3$	0,479	0,562	$0{,}217 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$1{,}708 \cdot k$	$0{,}0618 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{15}$	$^{17}/_{15}$	0,522	0,617	$0{,}255 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$1{,}952 \cdot k$	$0{,}0664 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{18} = ^1/_9$	1	0,552	0,655	$0{,}283 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$2{,}132 \cdot k$	$0{,}0670 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{21}$	$^{19}/_{21}$	0,574	0,683	$0{,}305 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$2{,}271 \cdot k$	$0{,}0660 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{24}$	$^5/_6$	0,591	0,704	$0{,}321 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$2{,}383 \cdot k$	$0{,}0637 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$
$^2/_{27}$	$^7/_9$	0,605	0,721	$0{,}335 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c}{l}$	$2{,}470 \cdot k$	$0{,}0613 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h}$

§. 128.

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, dass die vortheilhafteste Steigung für Baugerüste, wenn sie mit Schubkarren von dem angegebenen Maasse und Gewichte befahren werden, bei $\frac{h}{l} = \frac{1}{9}$ statt finde. In diesem Falle ist nämlich die Last, welche von einem Arbeiter auf die Höhe eines Stockwerkes $h = 2$ Klafter in einem Arbeitstage geführt werden kann, $= 0{,}0670 \cdot \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{h} = 0{,}0670 \cdot \frac{12000}{2} \cdot 30 = 12060$ ℔.

In dem Lehrbuche der Baukunst, vom k. k. Major *Weiss* *), ist das Gewicht einer kub. Klafter ausgetrockneter Ziegelmauer = 17950 Pfund
— — — frischer oder grüner Ziegelmauer = 18843 —
— — — ausgetrockneter Bruchsteinmauer = 29241 —
— — — grüner Bruchsteinmauer = 30034 — angegeben.

Da die Regeln der praktischen Baumeister aus einem Mittel von mehreren Erfahrungen über verschiedene Gattungen Mauerwerk abgeleitet sind, so können wir bei einer Vergleichung derselben mit unsern Rechnungen, das mittlere Gewicht einer kubischen Klafter Mauerwerk = 24017 ℔ oder beinahe = 240 Zentner annehmen. Wird nun diesem Gewichte das Gewicht von 120 Zentnern 60 ℔, welches ein Arbeiter mit dem Schubkarren auf die Höhe eines Stockwerkes führen kann, entgegengehalten, so folgt aus der Gleichung $\frac{24017}{12060} = 2$ beinahe, dass zur Aufbringung der Baumaterialien von einem Stockwerke in das andere für jede Kubikklafter 2 Handlangertage nöthig sind. Mit diesem Resultate stimmt die Erfahrung der praktischen Baubeamten vollkommen überein, welche für das Aufbringen der zu einer kubischen Klafter nöthigen Baumaterialien für jedes Stockwerk zwei Handlangertage berechnen. **)

Diese Uibereinstimmung bewährt sonach abermals nicht nur die Richtigkeit unserer §. 19 angegebenen Kraftformel und der hierauf gegründeten weitern Rechnungen, sondern sie verbürget auch noch folgende für die genauere Verfassung der Bauanschläge nicht unwichtige Bemerkungen:

1tens. Da das Gewicht einer Kubikklafter trockener Ziegelmauer 18000, und der grünen Ziegelmauer 18800 ℔ beträgt, so gibt das Mittel von beiden $\frac{18400}{12060} = 1{,}5$ beinahe. Hieraus ist ersichtlich, dass $1\frac{1}{2}$ Arbeitstage hinreichen, um das Material für 1 Kubikklafter Ziegelmauer auf die gewöhnliche Höhe eines Stockwerkes von 2 Klaftern zu schaffen.

Die Bruchsteinmauern haben dagegen ein grösseres Gewicht und 1 Kubikklafter wiegt im Mittel 29600 ℔; demnach folgt aus $\frac{29600}{12060} = 2{,}5$, dass zum Aufbringen des für 1 kubische Klafter nöthigen Steinmaterials auf die Höhe eines Stockwerkes $2\frac{1}{2}$ Arbeitstage nöthig sind.

*) Lehrbuch der Baukunst zum Gebrauche der k. k. Ingenieurs-Akademie. Auf höchsten Befehl verfasst von *Franz Weiss*, Hauptmann im k. k. Ingenieurs-Corps. Wien 1820, gedruckt bei *Anton Strauss*.

**) Der praktische Baubeamte. Wien 1798, bei *M. A. Schmidt*, k. k. Hofbuchdrucker. II. Theil. S. 288.

Bautechnologie und Bauökonomie von *Franz Sax*, k. k. Hofbaubuchhaltungs-Rechnungsrathe, Wien 1814, im Verlage bei *Anton Doll*, 2ter Band. S. 94.

Praktischer Unterricht zur Verfassung eines richtigen Bauanschlags, von *Franz Sax*, Rechnungsrath der k. k. Hofbaubuchhaltung. Wien 1825. S. 20.

Die Steine, aus welchen die Mauern hergestellt werden, haben zuweilen ein noch grösseres Gewicht, so dass eine kubische Klafter auf 380 bis 400 Zentner angeschlagen werden kann. Für diesen Fall gibt $\frac{390}{120} = 3\frac{1}{4}$ Arbeitstage.

2tens. Eine nothwendige Bedingniss dieser Rechnung ist aber, dass bei derselben die vortheilhafteste Steigung der Baugerüste $\left(\frac{h}{l} = \frac{1}{9}\right)$ angenommen worden. Es pflegt aber nicht selten zu geschehen, dass zur Verfertigung der Laufgerüste von einem Stockwerke in das andere nur einfache, 8 bis 9 Klafter lange Stämme verwendet werden. Wenn wir demnach die Rechnung für die Steigung $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$ wiederholen, so gibt die obige Tabelle, dass ein Arbeiter auf die Höhe von 2 Klaftern nur die Last $n.Q = 0{,}0419 \cdot \frac{3600.t.c.k}{h} = 0{,}0419 \cdot \frac{12000}{2} \cdot 30 = 7542$ ℔ führen kann; demnach bedarf die Beischaffung des Materials für 1 kubische Klafter Ziegelmauer $\frac{18400}{7542} = 2\frac{1}{4}$ Arbeitstage; für 1 kub. Klafter Steinmauer $\frac{29600}{7542} = 4$; und bei schwerern Materialien $\frac{39000}{7542} = 5$ Arbeitstage, wodurch also die Baukosten in jedem Falle nach dem Verhältnisse 7542 : 12078 oder wie 5 : 8 vermehrt werden. — Es ist also vortheilhaft in jenen Fällen, wo die Anlegung einer 18 Klafter langen Laufbrücke für den Raum des angewiesenen Bauplatzes zu gross, oder aus andern Rücksichten nicht thunlich ist, dieselbe in zwei Theile abzutheilen, und, so wie es bei Stiegen zu geschehen pflegt, zwei Arme zu 9 Klaftern neben einander und für die folgenden Stockwerke über einander anzulegen.

3tens. Da jedoch die Baumaterialien gewöhnlich nicht unmittelbar bei dem Anfange der Laufbrücke in die Schubkarren geladen werden, sondern meistens noch auf eine kurze (ebene) Strecke zum Baugerüste zuzuführen sind, und eben so am obern Ende der Laufbrücke nicht sogleich ausgeladen, sondern noch zu dem Orte des Verbrauches hingeführt werden müssen; so wollen wir die Summe dieser beiden Entfernungen $= E$ setzen. Für diesen Fall zeigt die Tabelle §. 49. S. 67, dass ein Arbeiter die Last $\frac{3600.t.c.k}{E} \cdot 0{,}4904$ auf die Entfernung E tragen, mithin in Schubkarren bei dem Verhältnisse $\frac{R}{r} = 3$ die Last $3 \times \frac{3600.t.c.k}{E} \cdot 0{,}4904 = \frac{12000}{E} \cdot 90 \,.\, 0{,}4904 = \frac{529632}{E}$ ℔ führen könne. Setzen wir diese Last gleich dem Gewichte einer kub. Klafter Ziegelmauer $= 18400$ ℔, so ergibt sich $E = 28$ Klafter, d. i. ein Arbeiter kann das Material für eine Kubik-Klafter Ziegelmauer in einem Tage auf die Entfernung von 28 Klaftern verführen. Demnach ist für die Zufuhr der Baumaterialien zu einer kub. Klafter Ziegelmauer 1 Taglohn, und wenn die mittlere Entfernung E nur 14 Klafter beträgt, $\frac{1}{2}$ Taglohn u. s. w. zu berechnen.

Bei den Steinmauern wurde oben das Gewicht einer kub. Klafter $= 29600$ ℔ angegeben; setzen wir auf gleiche Art $29600 = \frac{529632}{E}$, so ist $E = 18$ Klafter, oder für die Entfernung von 18 Klaftern ist ein Taglohn, folglich für die Entfernung von $13\frac{1}{2}$ Klaftern $\frac{3}{4}$ Taglöhne u. s. w. zu berechnen.

Die kub. Klafter der schweren Steinmauern wiegt 39000 ℔, demnach ist $E = 13\frac{1}{2}$ Klafter d. h. für die Entfernung von $13\frac{1}{2}$ Klaftern ist 1 Taglohn, und für die Entfernung von 27 Klaftern 2 Taglöhne u. s. w. zu berechnen.

4tens. Es ist aber auch noch nöthig, die Baumaterialien zur ebenen Erde vom Bauplatze in die Schubkarren einzuladen, und auf dem Baugerüste an dem Orte ihres Verbrauches wieder auszuladen. Diese Arbeit pflegen die Baumeister, so wie bei dem Auswerfen des Schottergrundes, auf 2 Handlangertage anzuschlagen.

Diese Anleitung dürfte hinreichen, um jeden Bauführer in den Stand zu setzen, nach Maassgabe seiner Material- und Lokalverhältnisse sich einen richtigen Kostenanschlag für die Herbeischaffung der Baumaterialien zu entwerfen, und zur Erleichterung mehrerer solcher Rechnungen sich auch eigene Tabellen zu verfassen.

Wenn wir z. B. die grösste Entfernung, auf welche die Baumaterialien, ausser den Laufbrücken noch auf Schubkarren zu verführen sind, auf 28 Klafter und weil einige Materialien hievon unmittelbar am Ende der Laufbrücke abgeladen werden, das Mittel zwischen der grössten und kleinsten Entfernung auf 14 Klafter anschlagen; sonach die Arbeitstage, welche zum Heraufführen über die Laufbrücken, zur horizontalen Herbeiführung, dann zum Auf- und Abladen erforderlich sind, in eine Summe bringen, so ergeben sich für die Beischaffung der Baumaterialien zu einer Kubikklafter Mauerwerk

auf ebener Erde für Ziegelmauern	$2\frac{1}{2}$	Handlangert.,	für Bruchsteinm.	$2\frac{3}{4}$ bis 3	Handlangert.
in das 1ste Stockwerk für —	4	—	— —	$5\frac{1}{4}$ — $6\frac{1}{4}$	—
für das 2te Stockwerk für —	$5\frac{1}{2}$	—	— —	$7\frac{3}{4}$ — $9\frac{1}{2}$	—

u. s. w. In diesem Schema sind nur diejenigen Arbeitstage angegeben, welche bloss zur Beischaffung der Materialien für eine kub. Klafter Mauerwerk in jedes Stockwerk erforderlich sind. Wollte man aber den vollständigen Bedarf an Handlangertagen für eine Kubikklafter Mauerwerk berechnen, so würden zu diesen Zahlen noch diejenigen Handlangertage beizusetzen seyn, welche zur unmittelbaren Bedienung der Maurer, zum Zulangen schicklicher Bausteine, des Wassers, Kalkes, Sandes u. dgl. nothwendig sind, welche in den angeführten Schriften der praktischen Baubeamten gewöhnlich auf 5 Handlangertage angeschlagen, jedoch vorzüglich nur von der Geschicklichkeit und dem Fleisse der Arbeiter bedingt, demnach nur nach besondern Lokalrücksichten bemessen werden können.

§. 129.

Das Zutragen der Baumaterialien in hiezu schicklichen Traggefässen über Leitern und Stiegen wird nur bei Reparaturen und überhaupt nur in solchen Fällen angewendet, wo die Zufuhr mittelst Schubkarren nicht thunlich und die Anlegung eigener Laufbrücken und Baugerüste für den vorhabenden Bau zu kostspielig seyn würde. — Uiber das geringe Vermögen der Arbeiter bei dem Tragen der Lasten über Treppen oder Stiegen haben wir bereits oben pag. 26 nach *Coulomb* einige Beispiele angeführt; wir halten es demnach für überflüssig, diesen Gegenstand noch durch eine weitläufigere Rechnung auseinander zu setzen.

§. 130.

Dem *Gebrauche des Haspels bei dem Aufziehen der Lasten* kommt der Umstand zu statten, dass das eigene Gewicht des Arbeiters hiebei in Ruhe bleibt, sonach der Arbeiter seine ganze Kraft nur auf das Haspelziehen verwenden kann. Obgleich die Kreisbewegung der Handhabe den Arbeiter ausser Stand setzt, in allen Punkten des Kreises mit gleicher Kraft zu wirken (wovon wir im VI. Kapitel ausführlicher handeln werden), so ist doch die aufzubringende Last immer noch so gross, dass sie das Aufbringen der Lasten mittelst Schubkarren selbst bei der hiezu vortheilhaftesten Steigung noch ansehnlich übertrifft. Demselben steht jedoch der unvermeidliche Nachtheil entgegen, dass *die Baumaterialien hiebei viermal überladen werden müssen*, nämlich zu ebener Erde von dem Vorrathsplatze in den Schubkarren, dann aus demselben in die Tonne des Haspels, ferner auf dem Gerüste aus der Tonne in den Schubkarren und endlich aus dem leztern an den Ort ihres Verbrauches; wogegen dieselben bei der Verführung über Laufbrücken nur *zweimal* nämlich von dem Vorrathsplatze in den Schubkarren eingeladen, und auf dem Gerüste an dem Orte ihres Verbrauches ausgeladen werden. Wenn demnach für dieses zweimalige Uiberladen zwei Handlangertage gerechnet werden, so sind bei dem Gebrauche des Haspels vier Handlangertage um so mehr nothwendig, als vorzüglich bei der Entladung der Tonnen über der Oeffnung des Baugerüstes mehrere Umstände und Vorsichten zu beobachten sind, die bei der Verführung über Laufbrücken und Gerüste nicht vorkommen.

Unter den §. 87 angeführten Verhältnissen ist ein Arbeiter im Stande, mittelst des Haspels täglich die Last $\frac{3600.t.c.k}{H}$ auf die Höhe H zu bringen. Weil aber der Arbeiter wegen der Kreisbewegung seiner Handhabe nicht in allen Punkten der Peripherie eine gleiche Leistung bewirken kann, so wollen wir seine Kraft nur mit $\frac{2}{3}$ von 30 ℔ oder mit 20 ℔ in Rechnung nehmen. Bei dieser Annahme erhalten wir

$\frac{3600.t.c.k}{H} = \frac{12000.20}{2} = 120000$ ℔, und für das Aufziehen der Baumaterialien auf die *Höhe eines Stockwerkes* für eine Kubikklafter Ziegelmauer $\frac{18400}{120000} = \frac{1}{7}$, für leichte Steinmauern $\frac{29600}{120000} = \frac{1}{4}$ und für schwere Steinmauern $\frac{39000}{120000} = \frac{1}{3}$ Arbeitstage; für 2 Stockwerke das doppelte u. s. w.

Hiernach sind bei dem Gebrauche des Haspels im *ersten Stockwerke* 4 Arbeitstage für das Uiberladen und dann noch im Mittel $\frac{1}{4}$ Tag für das Aufziehen, also zusammen $4\frac{1}{4}$ Tage in Anschlag zu nehmen, wogegen bei der Anwendung der Laufbrücken für das Verführen der Baumaterialien in den ersten Stock 2 Arbeitstage und für das Uiberladen weitere 2 Arbeitstage, also zusammen nur 4 Tage berechnet wurden.

Auf gleiche Art sind zum Aufbringen der Materialien *in das zweite Stockwerk* bei dem Gebrauche des Haspels 4 Tage für das viermalige Uiberladen, und noch $\frac{1}{2}$ Tag für das Aufziehen, also zusammen $4\frac{1}{2}$ Taglöhne zu berechnen, wogegen bei dem Gebrauche der Laufbrücken 4 Taglöhne zum Verführen über die Baugerüste und 2 Taglöhne zum Uiberladen, also zusammen 6 Tage erforderlich sind.

Hieraus ist einleuchtend, dass für das Beischaffen der Baumaterialien zu einer Kubikklafter Mauer in den ersten Stock die Laufgerüste, für die übrigen höhern Stockwerke aber der Gebrauch des Haspels vorzuziehen sey.

§. 131.

Wir haben die schiefe Fläche bei der Fortschaffung von Lasten bisher bloss als ein Hinderniss kennen gelernt, sie wird aber in der Mechanik auch als Mittel zum Betriebe der Maschinen, zur Hebung der Lasten u. s. w. gebraucht, wie es bei den Treträdern zunächst der Fall ist.

Unter einem Tretrade, Laufrade oder Tretscheibe versteht man ein dergestalt eingerichtetes Rad, welches durch das Gewicht der Menschen oder auch der Thiere betrieben werden kann. Man unterscheidet hauptsächlich zwei Arten von Treträdern, nämlich die vertikalen, wie Fig. 7 und 8 und die schiefstehenden, wie Fig. 9. Die erstern, welche Tret- oder Laufräder genannt werden, bestehen aus einer horizontalen Welle a, in deren Mittelpunkte an den beiden Enden zwei Zapfen befestigt sind, die sich wieder in Lagern (Zapfenlagern) bewegen. Von der Welle gehen mehrere Arme oder Speichen aus, welche in Verbindung mit andern Zimmerwerk den Radkranz mit der Welle vereinigen. Um die letztere Welle wird ein Seil geschlungen, mittelst welchem die angehängte Last durch das Aufwinden herangezogen oder gehoben wird. An dem Umfange des Rades oder auf dem Radkranze werden entweder im Innern des Rades unten, wie Fig. 7 oder auch oberhalb desselben, wie Fig. 8 in einem, seitwärts vom Mittelpunkte b liegenden Punkt D ein oder mehrere Menschen oder Thiere aufgestellt, welche durch ihr Gewicht das Rad nach der, der angehängten Last entgegengesetzten Seite zu bewegen streben, und sich auf diese Art mit derselben in das Gleichgewicht stellen. Damit die für den Gang der Maschine erforderlichen Arbeiter oder Thiere nebeneinander den zur Bewegung nothwendigen Raum haben, muss der Radkranz die gehörige Breite erhalten; er muss ausserdem entweder, wie Fig. 7 an seinem ganzen innern Umfange mit Dielen belegt und mit Latten e, e, e benagelt werden oder man bringt wie Fig. 8 von aussen Stuffen f, f, f . . . an. Damit die Thiere im ersten Falle nicht seitwärts herausspringen können, werden beide Seitenwände des Tretrades auf 4 oder mehr Fuss Höhe von dem äussern Radkranze an gegen den Mittelpunkt des Rades mit Brettern verschalt. Um endlich die Thiere zu nöthigen, an ihrem Standorte zu verbleiben, pflegt man für dieselben Krippen oder Raufen vorzulegen, diese mit Futter zu versehen und die Thiere selbst daran wie gewöhnlich anzuhängen.

Fig. 7, 8 und 9. Tab. 2.

Der Halbmesser eines solchen Tretrades für Menschen beträgt wenigstens 8 Fuss, damit der Arbeiter unter der Welle noch aufrecht stehen könne; für Thiere werden die Halbmesser grösser, nämlich 12 und mehr Fuss angenommen.

§. 132.

Fig. 13. Tab. 4.

Um die Wirkung eines solchen Tretrades zu berechnen, sey D der Punkt, auf welchem der Arbeiter (oder das Thier) bei der Bewegung des Tretrades zu stehen kommt, wenn er sich mit der Last Q im Gleichgewichte befindet. Das Gewicht des Arbeiters, welches wir M nennen wollen, wirkt nach der Richtung D O parallel zu

GQ an dem Winkelhebel DEG und es muss, wenn EF und EG winkelrecht auf die Richtungen FO und GQ der Kräfte gezogen sind, im Stande des Gleichgewichtes nach §. 68, $M : Q = EG : EF$ seyn (I).

Ziehen wir nun zur Peripherie des Rades in dem Punkte D die Tangente AC und aus den beliebigen Punkten A und C derselben die Lothrechte AB und Horizontale CB, so sehen wir, dass der Arbeiter eigentlich fortwährend über eine schiefe Fläche CA hinaufgeht; es wird sonach seine Kraftanstrengung desto grösser seyn, je steiler diese schiefe Fläche oder je grösser der Winkel ACB ist, da der Mensch (oder das Thier) sein eigenes Gewicht beständig über die schiefe Fläche hinauftragen muss. Wir haben daher hier ganz denselben Fall wie §. 123, d. h. es verhält sich die Kraft $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$, welche der Arbeiter (oder das Thier) anwendet, zu M oder der Last, welche in unserm Falle eigentlich hinaufbewegt wird, wie die Höhe der schiefen Fläche (AB) zur Länge derselben (AC), oder
$k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) : M = AB : AC$ (II).

Da endlich die Dreiecke ABC und EFD einander ähnlich sind, so ist auch $AB : AC = EF : ED$ (III).

Werden nunmehr die Proportionen I, II und III mitsammen multiplicirt, so ergibt sich $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) : Q = EG : ED$, d. h. die Kraft $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$, mit welcher sich der Arbeiter im Tretrade anstrengt, verhält sich zur Last Q, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades. Es ist demnach hier derselbe Fall vorhanden, als wenn der Arbeiter seine Kraft $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ an der äussern Peripherie eines Rades z. B. an einem Spillenrade oder Haspel anzuwenden hätte. Zur Bewegung eines Tretrades wird daher dieselbe Kraftanstrengung wie bei jedem andern Rade an der Welle (mit demselben Verhältnisse der Hebelsarme) erfordert, und ein Tretrad leistet nicht mehr, als ein jedes andere Rad.

§. 133.

Aus der angeführten Berechnung ergibt sich nun auch von selbst die Unrichtigkeit der ehemaligen Meinung, dass die Treträder im Vergleiche der bisher abgehandelten Maschinen weit ausgiebiger seyen, indem hiebei das ganze Gewicht des Arbeiters in Wirksamkeit kommt, während bei andern Maschinen z. B. Haspeln oder Winden bloss die Muskelkraft der Hände wirksam ist.

Die Treträder haben im Gegentheile mancherlei Nachtheile; sie sind nämlich ihrer bedeutenden Grösse wegen nicht überall anwendbar; sie sind kostspielig, weil sie so gross und stark gebaut werden müssen, um die zu ihrem Betriebe erforderlichen Thiere aufzunehmen und zu tragen; sie vermehren sodann durch ihr eigenes grosses Gewicht und durch die hinzukommende Belastung von den Zugthieren die Reibung an der Ma-

schine bedeutend, (wovon später umständlich gesprochen werden wird); endlich kommen bei den Treträdern die Arbeiter nicht selten in Gefahr, wenn sie aus Versehen, oder wenn die Last abgeladen werden soll, beim Herablassen derselben zu weit zurücktreten; die Last bekommt nämlich in diesem Falle das Uibergewicht, treibt das Rad mit beschleunigter Bewegung zurück, die Arbeiter stürzen um, werden im Rade herumgeschleudert und nicht selten bedeutend beschädigt.

Zur Vermeidung solcher Unglücksfälle bringt man an den Treträdern verschiedene Vorrichtungen (Mechanismen) an, deren Erklärung wir umständlicher erst in der Folge abhandeln werden, und hier nur im allgemeinen andeuten wollen; nämlich:

a) Es wird ein Sperrrad mit einem Sperrkegel von aussen angebracht, um das Tretrad zu verhindern, eine entgegengesetzte Bewegung anzunehmen.

b) Man bringt an vier mit einander verbundenen Hebeln Schwungkolben an, welche bei beschleunigter Bewegung Widerhacken oder Sperrhebel einfallen lassen und das Tretrad feststellen.

c) Man bringt ein einfaches oder doppeltes Premsrad (Premsbalken) an, wodurch die Bewegung des Tretrades angehalten und schnell in Ruhe gebracht wird.

d) Man legt um die Welle des Tretrades schwebende eiserne Ringe, woran die Arbeiter bei dem Zurückgehen oder Herablassen der Last sich halten, und gegen das Umstürzen sicher stellen u. s. w.

Aus diesen Gründen ersieht man, warum Treträder, die man sonst bei Kranichen zum Aufziehen der Waaren aus Schiffen, bei Bretmühlen zum Aufziehen der Baumstämme, bei Getreidemühlen zum Aufziehen der Getreidesäcke in die höhern Stockwerke oder auch zum Getreidemahlen selbst und bei mehrern ähnlichen Maschinen verwandte, gegenwärtig nur noch selten gebraucht werden.

§. 134.

Fig. 9. Tab. 2. Unter den Treträdern ist das schiefstehende (Fig. 9) oder die sogenannte **Tretscheibe** das zweckmässigste, indem es die Arbeiter unglücklichen Zufällen weit weniger aussetzt und daher mehr im Gebrauche ist. Auch hat es vor den Tret- oder Laufrädern den Vortheil, dass der Arbeiter durch seine grössere Entfernung vom Mittelpunkte der Welle seinen Hebelsarm E D vergrössern, folglich sein statisches Moment vermehren und einer grössern Last das Gleichgewicht halten könne; so wie derselbe im Gegentheile durch eine Annäherung zu dem Mittelpunkte sein statisches Moment verkleinern kann. In einem jeden dieser Fälle kann sich der Arbeiter mit seiner mittlern Geschwindigkeit bewegen, und dadurch den grössten Effekt bewirken. Die Berechnung derselben ist jener gleich, welche wir §. 132 bei dem Tretrade aufgestellt haben.

Fig. 14. Tab. 4. Es befinde sich nämlich Fig. 14 das Gewicht (M) des Arbeiters in D, so wirkt dieses nach der Richtung der Schwere in der Linie D p mit einer Kraft (= M) senkrecht herab. Diese Kraft bildet mit der Fläche der Tretscheibe einen Winkel p D C und muss daher in zwei Theile zerlegt werden, welches geschieht, wenn wir die Linie D r winkelrecht auf die Tretscheibe und die Linie D q in der Fläche der Tretscheibe nach der Richtung, in welcher sich der Arbeiter bewegt, ziehen. Wird ferner p q parallel zu r D und r p parallel zu D q gezogen, so wird die Kraft M = D p nach dem bekannten

Satze vom Parallelogramme der Kräfte in D r und D q aufgelöst. Die erste Kraft D r ist winkelrecht auf die Tretscheibe, kann also dieselbe nicht bewegen; es bleibt demnach nur die Kraft D q übrig, w o m i t d a s G e w i c h t d e s A r b e i t e r s d i e B e w e g u n g d e r T r e t s c h e i b e b e w i r k t. Fig. 14. Tab. 4.

Es frägt sich nun, wie gross D q sey? — Wenn wir die Linie D q bis C und A verlängern, C B horizontal und A B senkrecht ziehen, so ist A B die Höhe und C A die Länge der schiefen Fläche, über welche sich der Arbeiter bewegt. Es wird sich also nach §. 123 die Kraft $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$, welche der Arbeiter zur Bewegung seines Körpers über diese schiefe Fläche braucht, zu der Last oder zu dem Gewichte seines Körpers M wie A B zu A C verhalten, oder $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) : M = AB : AC$.

Da nun die Dreiecke D q p und A B C einander ähnlich sind, so verhält sich

$$AB : AC = Dq : Dp;$$

demnach ist auch $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) : M = Dq : Dp$, d. h. es verhält sich die Kraft, welche der Arbeiter zur Bewegung seines Körpers über die schiefe Fläche braucht, zu dem Gewichte (M) seines Körpers, wie die Kraft D q, welche derselbe Arbeiter in der schiefen Fläche zur Bewegung der Tretscheibe anwenden muss, zur Kraft $Dp = M$. Hieraus folgt $Dq = k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ d. h. der Punkt D muss nach der Richtung seiner Tangente mit einer Kraft bewegt werden, die $= k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ ist. Es ist also eben so viel, als wenn an der Peripherie eines Rades, dessen Halbmesser D E ist, die Kraft $k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$ wirken möchte, folglich auch hier derselbe Fall, wie bei einem jeden andern Rade an der Welle vorhanden.

§. 135.

Wir wollen nun annehmen, e s s e y e n m i t t e l s t e i n e s T r e t r a d e s L a s t e n a u f e i n e b e s t i m m t e H ö h e a u f z u z i e h e n. Zu diesem Behufe setzen wir, wie bei der Aufgabe §. 87 den Halbmesser der Welle $= r$, des Rades $= R$ und die Anzahl der Arbeiter oder Thiere $= N$, demnach erhalten wir nach §. 132 und 134 die Gleichung zwischen Kraft und Last $\frac{R}{r} \cdot N . k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) = Q$ (wie Seite 102);

den Raum, den die Last in einer Sekunde beschreibt $v' = \frac{r}{R} \cdot v$;

die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H . R}{v . r}$;

die Anzahl der Aufzüge in einem Tage, $n = \frac{3600 . z . v . r}{H . R}$

und wenn diess mit der Last Q multiplicirt wird,

den täglichen Effekt $n . Q = \frac{3600 . z . v}{H} \cdot N . k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$.

Diese Tagesarbeit wird am grössten, wenn $\frac{v}{c} = 1$ und $\frac{z}{t} = 1$ genommen wird (wie S. 102), es finden daher in Hinsicht der vortheilhaftesten Kraftverwendung hier dieselben Bestimmungen wie bei einem Rade an der Welle statt.

Weil aber bei einem Tretrade die Grösse desselben oder R, eben so wie der Halbmesser der Welle r gewöhnlich gegeben ist, so ergibt sich die Last aus der Gleichung $Q = N \cdot k \cdot \frac{R}{r}$; wenn daher auch Q gegeben ist, so wird hieraus die Anzahl der erforderlichen Arbeiter (N) bestimmt und umgekehrt.

Da sich aber die Kraft k zum Gewichte des Arbeiters M, wie die Höhe h der schiefen Fläche zu ihrer Länge l verhält, und das Gewicht der Menschen beiläufig fünfmahl so gross als ihre mittlere Kraft ist (§. 32), so folgt, *dass die Höhe dieser schiefen Fläche*, worauf der Arbeiter in einem Tretrade sich bewegt, *der fünfte Theil ihrer Länge seyn müsse*; diess gibt zur Bestimmung des Winkels ACB die Gleichung, Sin. $\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1}{5}$; folglich ist der Winkel, den die Tretscheibe mit dem Horizonte macht, $ACB = \alpha = 11^0\ 32^{\text{Min.}}$.

Wollte man in einem andern Falle z. B. annehmen, dass das Gewicht der Zugpferde $M = 7{,}5$ Ctr. und ihre mittlere Kraft $k = 1$ Ctr. sey, so erhalten wir den Neigungswinkel des Tretrades aus der Gleichung Sin. $\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1}{7{,}5} =$ Sin. $7^0\ 40^{\text{Min.}}$.

Macht man den Winkel in einem oder dem andern Falle grösser, so kann sich der Arbeiter oder das Pferd nicht mehr mit der mittlern Geschwindigkeit bewegen; es findet daher nicht seine vortheilhafteste Kraftanwendung statt.

Aus diesem Winkel bestimmt sich nun die Grösse $EF = R \cdot \text{Sin.}\ \alpha$, folglich auch der
Fig. 13. Punkt D, wohin das Thier in einem Tret- oder Laufrade gestellt werden muss; hiernach
Tab. 4. muss nun wieder der Ort der Krippe oder der feste Punkt bestimmt werden, an welchem das Thier angehängt wird. Ist das Tretrad eine Tretscheibe, so gibt α den Winkel, welchen die schiefe Fläche der Scheibe mit dem Horizonte machen muss.

Hieraus erklärt sich nun auch, warum man häufig gefunden hat, dass sich die Thiere bei den Treträdern der Schrott- oder anderer Mühlen zu viel abgemattet haben; es war nämlich in diesem Falle die gehörige Grösse für den Winkel α nicht angenommen worden.

§. 136.

Die *Schraube* ist eine, um einen Cylinder oder eine Spindel herumgewundene schiefe Fläche. Es gibt zweierlei Arten Schrauben: die *solide* oder äussere und die *hohle* oder innere Schraube.

Die *solide Schraube* besteht aus einem massiven Cylinder, um welchen in der Richtung einer schiefen Fläche verlängerte Ringe gewickelt sind, die man *Gänge* oder *Gewinde* nennt. Die *solide Schraube* kann man sich auf folgende Art entstanden denken: Es sey DEFG ein Cylinder und ABC eine schiefe Fläche, de-
Fig. 15. ren Grundlinie BC eben so lang, als die Peripherie des Cylinders ist. Wird diese schiefe Fläche um den Cylinder gewunden, so gibt die Länge derselben oder die Hypothenus AC die *Schraubenlinie* auf dem Cylinder, und wenn parallel zu dieser Schrauben-

linie um den Cylinder ein Dreieck a b c Fig. 15 oder ein Viereck a b c d (Fig. 16) herumbewegt, oder vielmehr ein Ring m b n oder m b c n an demselben befestigt wird, so erhält man ein Gewinde oder einen Schraubengang. Wenn nun mehrere solche Gewinde an der Schraubenspindel fortlaufen, so wird diess eine Schraube und zwar eine solide Schraube genannt. Wird ein Dreieck in die Schraubenspindel eingeschnitten, so nennt man diess eine scharfe Schraube; wird aber ein Viereck eingeschnitten, so heisst man diess eine flache Schraube. Fig. 15 und 16. Tab. 4.

Wenn dasselbe Verfahren, nämlich das Ausschneiden eines Dreieckes oder Viereckes an der innern Seite eines hohlen Cylinders angewendet wird, so nennt man diess eine hohle Schraube oder Schraubenmutter.

§. 137.

Eine Schraube ist für sich allein zum Fortschieben oder Heben einer Last nicht zu gebrauchen, sondern es müssen immer zwei mit einander verbunden seyn, deren eine solid, die andere hohl, beide aber an ihrer Peripherie so ausgehöhlt sind, dass die Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der andern genau hineinpassen. Man nennt in diesem Falle die hohle Schraube die Schraubenmutter und die solide die Schraubenspindel.

Die Last, welche mit einer Schraube gehoben werden soll, liegt entweder auf der Schraubenmutter oder auf der Schraubenspindel. Im ersten Falle wird die Schraubenspindel auf eine unbewegliche Grundfläche gestellt und nach der Richtung ihrer Basis umgedreht, wodurch dann die Schraubenmutter, und somit auch die Last zum Steigen gebracht wird; im zweiten Falle wird die Schraubenmutter auf eine feste Fläche gelegt, auf derselben herumgedreht und dadurch die Schraubenspindel sammt der Last erhöht. In beiden Fällen ist die Last derjenige Druck, welchen die Schraubengänge gegen die Gewinde der Schraubenmutter äussern; es ist daher für beide Fälle die Berechnung der Kraft, welche zur Bewegung einer Schraube erfordert wird, offenbar einerlei. Es wird nämlich jedesmal bei einer ganzen Umdrehung (um 360 Grad) es sey der Schraubenmutter oder Schraubenspindel, die Last um die Höhe eines Schraubengewindes gehoben, indem diese Last auf der schiefen Fläche der Windungen oder Gänge fortrückt; oder indem die Last eigentlich durch eine unter dieselbe (Last) geschobene schiefe Fläche fortwährend gehoben wird. Die Peripherie des Cylinders ist die Basis dieser schiefen Fläche und die Höhe eines Schraubenganges ist ihre Höhe. Hieraus erhellet nunmehr, dass die bei der schiefen Fläche angeführten Grundsätze auch bei der Schraube anwendbar sind.

§. 138.

Manche Schrauben haben 2, 3 und noch mehrfache Gewinde. Sie bestehen nämlich aus 2, 3 oder mehr schiefen Flächen (Schraubengängen) die zwischen einander um die Spindel gewunden sind. In diesem Falle wird z. B. bei einer dreifachen Schraube die Grundlinie der Schraubenspindel in 3 gleiche Theile, von 120 zu 120 Graden eingetheilt, und von einem jeden dieser 3 Theilungspunkte eine schiefe Fläche von gleichem Neigungswinkel um die Spindel gelegt, wodurch die auf der Spindel entstehenden Schraubengänge sämmtlich zu einander parallel und die Höhe eines Schrau- Fig. 1. Tab. 5.

bengewindes in drei Theile getheilt wird. Auf gleiche Art verfährt man, wenn die Schraube noch mehr Gewinde erhält.

Eine solche Schraube mit mehrfachen Gewinden erkennt man leicht durch das blosse Ansehen, indem an dem obern oder untern Ende der Schraube die Anfänge mehrerer Gewinde ersichtlich sind; dasselbe findet man, wenn eine Schraube einmal ganz (um 360 Grad) herum gedreht und hiebei die Anzahl der Gewinde, um welche sie sich erhob, gezählet wird. Bei der Berechnung dieser Schraube muss man daher zur Höhe die Höhe einer und derselben schiefen Fläche oder eines ganzen Schraubengewindes, nicht aber den Abstand zweier Schraubengewinde nehmen; die Peripherie der Schraube bleibt aber dieselbe.

Die Schrauben mit mehrfachen Gewinden haben das eigene, dass sie bei einer Umdrehung höher als die einfachen Schrauben, nämlich auf 2, 3 oder mehr Gewinde steigen, während eine einfache Schraube die Last bei jeder Umdrehung nur um die Höhe eines Schraubenganges hebt. Man braucht diese Art Schrauben z. B. bei Papierpressen, wo sie den Zweck haben, von selbst aufzuspringen, nachdem aus der geschöpften Papiermasse das Wasser herausgepresst wurde. Warum eine solche Schraube von selbst aufspringt, werden wir im V. Kapitel bei der Berechnung der Schrauben sammt Reibung sehen.

§. 139.

Die Verzeichnung eines Schraubengewindes auf einem Cylinder unterliegt keiner Schwierigkeit; man braucht nur die Peripherie und eben so die Höhe eines Schraubengewindes in dieselbe Anzahl, z. B. 8 oder 12 gleiche Theile zu theilen und auf dem ersten Theilungspunkte einen, auf dem 2ten zwei, auf dem 3ten drei u. s. w. solche Theile aufzutragen.

Fig. 17. Tab. 4. Wenn aber der Gang einer Schraube auf einer ebenen Fläche z. B. auf einem Papiere entworfen werden soll, muss auf folgende Art verfahren werden: Man beschreibe mit dem äussern Halbmesser (RA) des Cylinders einen Halbkreis A B C N und theile denselben in den Punkten B, C, D z. B. in 12 gleiche Theile AB = BC = CD ein. Wenn nun $A\alpha$ die Tiefe des Schraubengewindes ist, so wird mit dem Halbmesser $R\alpha$ abermals ein Kreis $\alpha\beta\gamma \ldots \nu$ beschrieben und ebenfalls in 12 gleiche Theile $\alpha\beta = \beta\gamma \ldots$ getheilt. Man ziehe nun von den ersten Theilungspunkten A, B, C senkrechte Linien auf den äusseren Durchmesser a n des Cylinders, so erhält man die Punkte a, b, c in welchen die am Umfange des Kreises liegenden Punkte A, B, C erscheinen. In dem Punkte n trage man die halbe Höhe des Schraubengewindes n o auf, theile dieselbe wieder in 12 gleiche Theile $nn' = n'n'' = n''n''' \ldots$ und ziehe von den Theilungspunkten horizontale Linien, bis sie die in b, c, d errichteten Perpendikel bb′, cc′, dd′ . . . schneiden. Wenn die hiedurch erhaltenen Punkte a, b′, c′ d′ bis o mitsammen verbunden werden, so erhält man die vordere Ansicht (vertikale Projektion) einer Schraubenlinie. Wird auf gleiche Art mit den Theilungspunkten des innern Kreises $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ verfahren, so gibt die Linie u g′ o′ die Verzeichnung der innern Schraubenlinie. Zieht man nun zur ersten oder äussern Schraubenlinie a b′ c′ o mit der Breite a r = o s des äussern Schraubengewindes (welche Breite bei der einfachen Schraube der halben Höhe des Gewindes gleich ist) die Parallele r t s, so erhält man die ganze Projektion einer Schraube.

Auf gleiche Art wird die Projektion einer Schraube entworfen, welche mehrfache Gewinde hat, wie diess Fig. 1. bei einer Schraube mit 3fachen Gewinden der Fall ist. Fig. 1. Tab. 5.

§. 140.

Die Kraft, welche man anwenden muss, um eine Schraube an der Peripherie ihrer Spindel zu drehen, verhält sich zur Last, die gehoben werden soll, wie die Höhe eines Schraubenganges zur Peripherie der Spindel.

Nach §. 137 ist das Aufschrauben einer Last nichts anders, als das Hinaufziehen oder Hinaufschieben dieser Last über eine schiefe Fläche, wobei die Kraft parallel zur Grundlinie d. h. zur Peripherie der Schraube wirkt. Man kann sich nun die Last auf der Mitte der Gewinde ruhend vorstellen; wenn man daher mit dem mittlern Halbmesser (a) der Schraubengewinde einen Kreis beschreibt, und diesen Kreis ausspannt, so erhält man eine schiefe Fläche a b c, deren Höhe a b die Höhe h eines Schraubengewindes, die Grundlinie b c aber die ausgespannte mittlere Peripherie des Gewindes, nämlich $\frac{22}{7} \cdot 2\,a$ ist. Wir haben daher nach §. 124, $P : Q = ab : bc = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,a$. Hieraus folgt $P = \frac{Q \cdot h}{\frac{22}{7} \cdot 2\,a}$; die Kraft, welche man bei einer Schraube anwenden muss, wird für dieselbe Last desto kleiner, je weniger die Höhe eines Schraubengewindes (h) im Verhältnisse zur Peripherie der Schraube beträgt. Fig. 2. Tab. 5.

§. 141.

Die Kraft bei einer Schraube wird selten unmittelbar an der Peripherie der Spindel angebracht, sondern man verbindet die Schraube mit einem Hebel oder mit einem Schraubenschlüssel, an dessen Ende die Kraft angebracht ist.

Es sey die Kraft bei einer einfachen Presse zu berechnen. Dieselbe besteht aus einem viereckigen Rahmen A B C D, in welchem sich eine Tafel E F vermittelst der Schraubenspindel G I auf- und abbewegt. Die Schraubenspindel wird nicht unmittelbar an ihrer Peripherie, sondern durch die Hebel I L und I N, an deren Endpunkten die Kraft wirkt, bewegt. Die Schraubenspindel greift bei H in die Schraubenmutter ein und da der Rahmen A B C D die hinlängliche Festigkeit haben muss, so bleibt bei der Umdrehung der Schraubenspindel die Schraubenmutter H unverrückt, während die Schraubenspindel G I und somit auch die Tafel E F herabgeht, und den unter derselben befindlichen Gegenstand z. B. Leinwand, Wäsche etc. zusammenpresst. Setzen wir nun den Druck, welchen die Schraubenspindel gegen die Schraubenmutter ausübt, und welcher eben so gross ist, als der Druck, womit die Leinwand etc. gepresst wird $= Q$ und die Kraft, welche zur Bewegung der Schraubenspindel unmittelbar an ihrem mittlern Umfange erforderlich ist $= P$, so ist nach dem vorigen §. Fig. 3.

$P : Q = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,a$. Nun ist aber die Kraft P in Hinsicht der an der Peripherie des Hebels wirkenden Kraft K als eine Last zu betrachten, und da P und K an einem Hebel der zweiten Art, der sich um den Mittelpunkt der Schraubenspindel I dreht, wirken, so ver-

Fig. 3. Tab. 5. hält sich auch K : P = a : A. Werden diese zwei Proportionen mitsammen multiplicirt, so erhält man $K : Q = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,A$ und $Q = \frac{K \cdot \frac{22}{7} \cdot 2\,A}{h}$.

Wenn daher Q, d. h. die Last, welche die Schraube hebt, oder der Druck, welchen sie ausübt, gross werden soll, so muss die Peripherie $\frac{22}{7} \cdot 2\,A$, welche die Kraft beschreibt, möglichst gross und dagegen die Höhe eines Schraubengewindes h klein seyn.

Beispiel. Es sey der Hebelsarm der Kraft A = 2 Fuss = 24 Zoll und die Höhe eines Schraubengewindes h = 1 Zoll, so verhält sich $K : Q = 1 : \frac{22}{7} . 2 . 24 = 1 : 150{,}9$ d. h. man kann in diesem Falle mit einer Kraft von 1 ℔ eine Last von 150 ℔ in die Höhe schrauben oder einen Druck von 150 ℔ gegen den zusammengepressten Gegenstand ausüben.

§. 142.

Wegen der ausserordentlichen Vermehrung an Kraft hat man die Schraube sonst für die wirksamste Maschine gehalten. Ihre Wirkung wird aber durch die Reibung sehr vermindert, welche bei der Schraube, wie wir im V. Capitel sehen werden, am meisten beträgt. Uibrigens findet bei dieser Maschine das allgemeine Gesetz abermals statt, dass die Bewegungsmomente oder die Produkte der Kraft in ihren Raum und des Widerstandes in seinen Raum einander gleich sind. Wir erhalten nämlich aus der Proportion §. 140 die Gleichung $P \times \frac{22}{7} \cdot 2\,a = Q \times h$ und aus jener §. 141 die Gleichung $K \times \frac{22}{7} \cdot 2\,A = Q \times h$, d. h. in beiden Fällen ist die Kraft multiplizirt mit dem Raume, welchen sie während einer Umdrehung beschreibt, eben so gross, als die Last multiplicirt mit dem Raume, um welchen sie während einer Umdrehung gehoben wird.

Wenn nun gleich die Schraube, so wie andere Maschinen, keinen Vortheil oder Gewinn in der Bewegung darbiethet, so gewährt sie doch den Vortheil, dass sie im Verhältnisse zu der bedeutenden Kraft, welche sie ausübt, einen sehr kleinen Raum einnimmt. So wäre das Aufheben eines Dachstuhles mit blossen Hebeln zwar möglich, würde jedoch einen so grossen Raum erfordern und durch die Länge der Hebel mit so vielen Unbequemlichkeiten verbunden seyn, dass man in vielen Fällen davon gar keinen Gebrauch zu machen im Stande wäre; wird jedoch eine Schraube in Verbindung mit einem Räderwerke (§. 147) hiezu gebraucht, so unterliegt das Aufschrauben eines Dachstuhles zur Erhöhung der Stockwerke keinem Anstande. Aus gleichem Grunde wäre das Pressen des Papieres, des Tuches, der Leinwand u. s. w. mit bedeutend langen und schweren Hebeln zwar möglich, allein zu unbequem; der Gebrauch einer Schraube ist daher hier ebenfalls vorzuziehen.

§. 143.

Schneidet man die Zähne an der Peripherie eines Rades (eines sogenannten Stirnrades) nach der Richtung der Schraubengänge schief ein, damit sie an die Stelle einer Schraubenmutter treten können, so erhält man eine Schraube ohne Ende.

Um das **Verhältniss der Kraft zur Last bei einer Schraube ohne Ende zu finden**, sey der Halbmesser der Welle, um welche sich das Seil mit der Last aufwindet = r, der Halbmesser des Rades von der Mitte der Achse bis zur Mitte des Eingriffes der Zähne in die Schraubengewinde = R, der Halbmesser der Schraubenspindel von der Achse derselben bis zur Mitte des vorgenannten Eingriffes = a und die Länge des Hebels, an welchem die Kraft wirkt = A, endlich die Höhe eines Schraubengewindes = h. Fig. 4. Tab. 5.

Soll nun eine Kraft P an der Peripherie des Rades der Last Q das Gleichgewicht halten, so muss sich selbe zu dieser Last verkehrt wie die Halbmesser verhalten oder P : Q = r : R. Diese Kraft P ist aber in Rücksicht der Schraube als eine Last zu betrachten, weil die Zähne mit der Kraft P dem Fortschieben der Schraube widerstehen; es wird sich also nach §. 141 die an dem Ende des Hebels angebrachte Kraft K zur Last P verhalten, wie $K : P = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,A$. Werden diese zwei Proportionen mitsammen multiplicirt, so erhält man $K : Q = r \,.\, h : R \,.\, \frac{22}{7} \cdot 2\,A$, d. h. bei einer Schraube ohne Ende verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt aus dem Halbmesser der Welle in die Höhe eines Schraubenganges zu dem Produkte aus dem Halbmesser des Rades in die Peripherie des Hebels oder Schraubenschlüssels.

§. 144.

Durch die bisher angeführten Sätze sind wir nunmehr auch im Stande eine jede **Verbindung eines Räderwerks mit Schrauben** zu berechnen. Fig. 5.

Es sey Fig. 5 die zusammengesetzte Hebmaschine zu berechnen. Dieselbe besteht aus einer Schraube ohne Ende, welche mit einem Rade an der Welle verbunden ist. Statt der Welle ist jedoch an diesem Rade ein sogenanntes **Vorgelege**, nämlich ein Getriebe vorhanden, welches wieder in ein zweites gezähntes Rad (Stirnrad) greift, an dessen Welle nunmehr erst die Last mittelst eines Seiles aufgewunden wird.

Es bezeichne W den Widerstand, welcher an der Peripherie des untern Stirnrades bei dessen Eingriffe in die Getriebe des obern Rades entsteht; auf gleiche Art sey P der Widerstand, welcher bei dem Eingriffe des obern gezähnten Rades in die Gewinde der Schraube ohne Ende vorhanden ist; der Halbmesser des untern Rades sey = R und seiner Welle = r, des obern Rades = B und seines Getriebes = b, der Halbmesser der Kurbel = A und die Höhe eines Schraubenganges der Schraube ohne Ende = h, so erhält man die Proportionen

$$W : Q = r : R$$
$$P : W = b : B$$
$$K : P = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,A$$

und multiplicirt $K : Q = r \,.\, b \,.\, h : R \,.\, B \cdot \frac{22}{7} \cdot 2\,A$,

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt der Hebelsarme der Last in

die Höhe des Schraubengewindes der Schraube ohne Ende zum Produkte der Hebelsarme der Kraft in die Peripherie der Kurbel, an welcher die Kraft angebracht ist.

Beispiel. Es sey der Halbmesser der Kurbel A = 12 Zoll, die Höhe der Schraubengewinde h = ½ Zoll, die Halbmesser der zwei Räder B = 24 Zoll und R = 28 Zoll, ferner b = r = 4 Zoll, so verhält sich $K : Q = 4 . 4 . \frac{1}{2} : 28 . 24 \cdot \frac{22}{7} \cdot 2 . 12 = 1 : 6336$.

§. 145.

Eine neuere Anwendung der Schraube findet bei den Winden statt. Man versteht unter einer Winde eine Maschine, welche dazu dient, bedeutende Lasten z. B. einen beladenen Güterwagen auf eine kleine Höhe zu erheben.

Die vorzüglichsten Gattungen dieser Winden findet man auf der 6ten Kupferplatte zusammengestellt. Von der daselbst verzeichneten Winde mit Vorgelege enthält Fig. 1 die Seitenansicht, Fig. 2 den Längendurchschnitt und Fig. 3 die Längenansicht, woraus die ganze Construktion dieser Maschine ohne weitere Erklärung ersichtlich ist. Die Berechnung derselben ergibt sich nach §. 90 wie bei jeder Verbindung von mehrern Rädern. Wir werden inzwischen diese Berechnung, so wie jene der andern Winden bei der Abhandlung über die Reibung im V. Kapitel umständlich vornehmen.

Fig. 1,2,3. Tab. 6.

Die französische Winde besteht aus einer Schraube ohne Ende a b (Fig. 5), welche in ein Stirnrad c d eingreift. In der Achse dieses Stirnrades befindet sich die Schraubenspindel e f, (Fig. 4) deren Schraubenmutter in n o aufliegt. Die Last wird entweder oben auf die 4 Angriffspunkte (Fig. 7) oder unten auf den Endpunkt des Ansatzes m k g in g aufgelegt. Durch die Bewegung der Schraube ohne Ende wird das Stirnrad c d herumgeführt und dadurch zugleich die Schraubenmutter auf ihrer Unterlage n o herumgedreht. Der Ansatz m k g dient nicht bloss, um auf dem Punkte g eine Last zu heben, sondern verhindert auch durch seine feste Verbindung mit der Spindel e f die Umdrehung derselben; es kann daher die Spindel nur senkrecht innerhalb der Schraubenmutter in die Höhe steigen, wodurch nun die Last gehoben wird. Die Berechnung dieser Winde ist dieselbe, wie bei der nachfolgenden.

Fig. 4,5,6 u. 7.

§. 146.

Die englische Winde oder der englische Heber genannt, ist eine der stärksten Schraubmaschinen, womit man Gebäude, Dachstühle u. dgl. heben kann. Sie besteht ebenfalls aus einer senkrechten Schraube e f (Fig. 10), worauf die Last entweder oben aufsitzt oder unten in g angehängt wird. Um diese Schraube geht eine Mutter, welche sich in der Mitte des horizontalen gezähnten Rades c d (Fig. 9) befindet; dieses Rad c d wird durch die Schraube ohne Ende a b und leztere durch die Kurbel a i bewegt. Da man mit dieser Schraube sehr grosse Lasten hebt, so muss die Schraubenmutter in der Mitte des Rades bedeutend stärker gemacht werden, um eine hinlängliche Anzahl Gewinde zu erhalten.

Fig. 8, 9 u. 10.

Zur Berechnung dieser Maschine sey wieder K die Kraft an der Peripherie der Kurbel, P der Widerstand an der Schraube ohne Ende und W der Widerstand an den Gewinden der Schraubenspindel e f; der Halbmesser der Kurbel = A, die Höhe eines Schraubenganges der Schraube ohne Ende = h, der Halbmesser des horizontalen Rades

c d sey $=$ B, der Halbmesser der Schraubenspindel e f sey $=$ b, endlich die Höhe eines Schraubenganges dieser Schraubenspindel $=$ h'; demnach erhalten wir: Fig. 8, 9 und 10. Tab. 6.

$$K : P = h : \frac{22}{7} \cdot 2A$$
$$P : W = b : B$$
$$W : Q = h' : \frac{22}{7} \cdot 2b,$$

$$\text{folglich } K : Q = h . h' : \frac{22}{7} \cdot 2A . \frac{22}{7} \cdot 2B,$$

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt aus den Höhen der zwei Schraubengewinde, zum Produkte aus den 2 Peripherien des Rades und der Kurbel.

Beispiel. Es seyen die Höhen der Schraubengänge $h = \frac{2}{3}$ Zoll und $h' = \frac{3}{2}$ Zoll, der Halbmesser der Kurbel A $=$ 12 Zoll und des Rades B $=$ 8 Zoll, so verhält sich $K : Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} : \frac{22}{7} \cdot 2.12 . \frac{22}{7} \cdot 2.8 = 1 : 3793$, d. h. die Last, welche gehoben werden kann, ist 3793mal so gross als die angewandte Kraft.

Diese ausserordentliche Vermehrung der Kraft ist auch die Ursache, dass man den englischen Heber bei dem Heben sehr grosser Lasten vorzüglich anwendet. Wir wollen in dieser Rücksicht einen solchen Fall im nachstehenden §. berechnen.

§. 147.

Aufgabe. Ein Dachstuhl von Q ($=$ 6000 Ctr.) Gewicht soll mittelst zweier englischen Winden auf die Höhe H ($=$ 12 Fuss) gehoben werden; es frägt sich, wie diese Arbeit und die dazu nöthige Maschine einzurichten ist, wie viele Arbeiter hiezu nöthig sind, in wie viel Stunden diese Arbeit vollendet wird? —

Nennen wir die Anzahl der Arbeitsleute bei einer Winde N, so ist $K = N . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$. Weil der Dachstuhl durch zwei Winden zuerst nur an einer Seite und hierauf an der andern gehoben wird, folglich auf dem Gemäuer nur jedesmal die halbe Last $\frac{Q}{2}$ aufliegt, so erhellet, dass beide Winden gleichfalls die Last $\frac{Q}{2}$, folglich eine jede derselben $\frac{Q}{4}$ zu tragen haben werde. Nach dem vorigen §. ist demnach $K : \frac{Q}{4} = h . h' : \frac{22}{7} \cdot 2A \cdot \frac{22}{7} \cdot 2B$, woraus sich die Gleichung zwischen Kraft und Fig. 11.

$$\text{Last } \frac{Q}{4} = \frac{N . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) \cdot \left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot A . B}{h . h'} \text{ ergibt. (I).}$$

Nun ist zu bemerken, dass man einen solchen Dachstuhl nicht mit einem Male auf die ganze Höhe H $=$ 12 Fuss bringen könne, sondern nur theilweise auf kurze Höhen aufschrauben müsse. Da nämlich die Bundträme bei dieser Operation mit Unterzügen unterstützt und überhaupt dieser Arbeit fortwährend nachgesehen werden muss, um dort, wo sich

ein Gebrechen zeigt, sogleich das Nöthige einzuleiten, so wird der Dachstuhl jedesmal gewöhnlich nur auf 6 bis 8 Zoll Höhe ($= H'$) gehoben, dann unterstützt, nachher die Winden auf die andere Seite übertragen, dort eben so viel gehoben und so das Aufschrauben so lange wiederholt, bis man die ganze Höhe (H) erreicht hat.

Um die Zeit zu berechnen, die zur Vollendung einer solchen Arbeit erfordert wird, ist offenbar, dass durch eine Umdrehung der Kurbel nur ein Gewinde der Schraube ohne Ende, folglich auch nur ein Zahn des horizontalen Stirnrades ausgelöst, und dieser um den Raum der Höhe eines Schraubengewindes (h) fortgeschoben wird. Dagegen ist der Raum, welchen die Kraft bei einer Umdrehung beschreibt $= \frac{22}{7} \cdot 2\,A$, die Geschwindigkeit der Kraft $= v$, folglich die Zeit, in welcher die ganze Peripherie der Kurbel zurückgelegt und der Zahn um den Raum h fortgeschoben wird $= \frac{22}{7} \cdot \frac{2\,A}{v}$ (II); man findet daher die Zeit, in der das Stirnrad einmal herumgedreht wird, aus dem vierten Gliede der Proportion

$$h' : \frac{22}{7} \cdot 2\,B = \frac{22}{7} \cdot \frac{2\,A}{v} : \left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B}{h\,.\,v} \text{ (III).}$$

In dieser Zeit steigt die Spindel ef mit der darauf ruhenden Last des Dachstuhles um die Höhe eines Schraubengewindes h'. Man erhält sonach die Zeit, in welcher der Dachstuhl auf die Höhe einer Abtheilung H' gebracht wird, aus der Proportion

$$h' : H' = \left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B}{h\,.\,v} : \left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B}{h\,.\,h'} \cdot \frac{H'}{v} \text{ (IV).}$$

Nennt man nun die Anzahl der Hübe in einem Tage n, so findet man diese Anzahl aus der Proportion: $\left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B\,.\,H'}{h\,.\,h'\,.\,v} : 1 \text{ Hub} = 3600\,.\,z : n$, woraus

$$n = \frac{3600\,.\,z\,.\,v\,.\,h\,.\,h'}{\left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot A\,.\,B\,.\,H'} \text{ (V).}$$

Aus der Gleichung (I) zwischen Kraft und Last erhalten wir

$$\frac{h\,.\,h'}{\left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot A\,.\,B} = \frac{N\,.\,k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{\frac{1}{4}\,Q}.$$ Wird diess substituirt, so ist

$$n = \frac{3600\,.\,z\,.\,v\,.\,N\,.\,k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{\frac{1}{4}\,Q\,.\,H'}.$$

Die Arbeit muss offenbar so eingerichtet werden, damit man in einem Tage möglichst viel Hübe zu Stande bringe, weil dann auch die ganze Arbeit in der kürzesten Zeit vollendet und mit dem möglichst kleinsten Kostenaufwande verbunden seyn wird. Da in der letzten Gleichung das Gewicht des Dachstuhles Q unabänderlich gegeben ist, so wird nach §. 35, (S. 42) n ein Maximum, wenn $v = c$ und $z = t$ ist. Es ist

also dem Vortheile des Unternehmens gemäss, dass die Arbeiter mit ihrer mittlern Geschwindigkeit c durch die mittlere Zeit zur Arbeit angehalten werden.

Die Werthe $v = c$ und $z = t$ in die Gleichung (I) gesetzt, geben

$\frac{Q}{4} = N.k.\left(\frac{44}{7}\right)^2.\frac{A.B}{h.h'}$. Diese Gleichung dient dazu, um vorerst die Verhältnisse $\frac{A}{h}$, $\frac{B}{h'}$ und $\frac{Q}{4\,N.k}$ so auszumitteln, damit durch die gegebene oder angenommene Anzahl Arbeiter N und ihrer Kraft k die Last Q, welche in unserm Falle 600000 ℔ beträgt, gewältigt werden könne. Setzen wir z. B. dass zu jeder Maschine 2 Arbeiter von mittlerer Stärke angestellt werden, sonach $N.k = 50$ ℔ betrage; die Maschine sey überdiess bereits fertig und das Verhältniss $\frac{B}{h'} = 6$ gegeben, so haben wir $\frac{600000}{4} = 50.\frac{1936}{49}.6\frac{A}{h}$, folglich $\frac{A}{h} = 12{,}655$. Wäre nun auch die Schraube ohne Ende bereits fertig und $h = 1$ Zoll gegeben, so würde es keinem Anstande unterliegen, den Kurbelarm A mit der Länge 12,655 Zoll oder 12 Zoll 8 Linien herstellen zu lassen; oder wenn auch der Kurbelarm $A = 12$ Zoll bereits gegeben wäre, über den geringen Unterschied hinauszugehen, das fehlende durch die Kraft ersetzen zu lassen, und in dieser Hinsicht die Kraft $k = \frac{25.12{,}655}{12} = 26{,}4$ ℔ anzunehmen. Auf gleiche Art würde man in jedem andern Falle verfahren, wenn eine von den obigen Grössen aus den gegebenen Werthen der andern zu bestimmen ist.

Die Zeit, in welcher die Last auf die Höhe H′ gehoben wird, ist nach (IV)

$= \left(\frac{44}{7}\right)^2.\frac{A.B}{h.h'}.\frac{H'}{c}$, oder da $\frac{\left(\frac{44}{7}\right)^2.A.B}{h.h'} = \frac{Q}{4.N.k}$, so ist diese Zeit auch $= \frac{Q.H'}{4.N.k.c}$.

Nun ist noch zu bemerken, dass man diesen Ausdruck mit 2 multipliciren müsse, um die Zeit zu erhalten, in welcher der Dachstuhl auf die Höhe H′ steigt, weil derselbe zuerst auf einer und dann auf der andern Seite auf die Höhe H′ gehoben wird; es ist daher diese Zeit $= \frac{2\,Q.H'}{4.N.k.c}$.

Werden nun die Werthe für unser Beispiel substituirt und statt H′ die ganze Höhe $H = 12$ Fuss angenommen, so ist $\frac{2\,Q.H}{4.N.k.c} = \frac{2.600000.12}{4.2.25.2{,}5} = 28800^{\text{Sec.}} = 8^{\text{h}}$; die vier Arbeitsleute werden daher gerade die Zeit eines Tages benöthigen, woraus sich die Kosten dieser Arbeit von selbst ergeben. Hiebei muss jedoch noch erinnert werden, dass zur Aufstellung der Gerüste, zum Uibertragen der Winden, zur mehrmaligen Unterstützung des Dachstuhles und verschiedenen zufälligen Arbeiten noch eine hinlängliche Anzahl Arbeiter verwendet werden müsse, worüber sich keine genaue Voranschlagung machen lässt. Dessen ungeachtet wird man leicht beurtheilen können, dass es doch vortheilhafter sey, in solchen Fällen einen Dachstuhl aufzuschrauben, als ihn auseinander zu nehmen, herabzulassen und nach Erhöhung der Mauern wieder aufzuziehen und aufzustellen.

Welchen Einfluss hiebei die Reibung nehme, wird, wie wir schon erinnerten, im V. Kapitel umständlich angegeben werden; inzwischen dient die vorläufige Bemerkung, dass die Zeit der Vollendung dieser Arbeit dieselbe bleibe, jedoch die Anzahl der Arbeiter wegen des Widerstandes der Reibung vermehrt werden müsse.

So zusammengesetzt übrigens diese Maschine ist, so zeigt doch das Resultat unserer Rechnung, dass die Arbeitsleute wieder gerade dasselbe ausrichten, als es bei Arbeiten aus freier Hand (§. 38), beim Rade an der Welle (§. 89), bei der Winde mit Flaschenzug (§. 107) der Fall war: das tägliche Bewegungsmoment der 4 Arbeitsleute ist nämlich $= 3600 . t . c . \times N . k = 12000$ Klafter $\times 4.25 = 1200000$; und das Bewegungsmoment des auf 2 Klafter Höhe zu hebenden Dachstuhles ist $= 600000 \times 2 = 1200000$, folglich dasselbe.

§. 148.

Fig. 6. Der Keil ist ein dreieckiges Prisma ABCDEF, das aus zwei geneigten und mit-
Tab. sammen verbundenen Flächen besteht. Man nennt ABCD den Rücken, GF aber die
5. Länge des Keiles.

Ein einfacher Keil (Fig. 7) ist ein Prisma, dessen Seitenfläche ein rechtwink-
Fig. lichtes Dreieck GBF ist. Ein doppelter Keil (Fig. 6) ist aus zwei einfachen zusam-
7. mengesetzt; er ist daher ein Prisma, dessen Seitenfläche ein gleichschenklichtes Dreieck CBF ist.

Man bedient sich der einfachen Keile, um Lasten von einer unbeweglichen Fläche auf eine geringe Höhe zu heben, z. B. um einen Stein von seinem Lager abzusprengen oder um von einem grössern Stücke Holz ein kleineres abzuspalten u. s. w. Die Zimmerleute brauchen ihn unter dem Namen der Treiblade, um ausgewichene Wände gerade zu treiben oder Gebälke in die Höhe zu keilen u. s. w. Die doppelten Keile werden vorzüglich gebraucht, wenn beide Flächen, welche bewegt oder von einander getrieben werden sollen, beweglich sind, nämlich bei dem Zerreissen und Spalten der Hölzer. In beiden Fällen aber werden die Keile durch das Schlagen eines Hammers oder einer Hacke zwischen die zu trennenden Theile des Körpers, des Klotzes u. dgl. getrieben.

§. 149.

Bei einem einfachen Keile verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe des Keiles zu seiner Länge.

Fig. Der einfache Keil ist offenbar eine schiefe Fläche, wobei die Kraft parallel zu ihrer
8. Grundlinie wirkt, weil die Schläge auf den Rücken BG in der Richtung der Grundlinie GF geschehen. Nach §. 124 verhält sich aber in diesem Falle die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Fläche zu ihrer Basis, also $K : Q = BG : GF$, woraus $K = \frac{Q . BG}{GF}$.

Die Kraft K ist daher um so kleiner, je kleiner das Verhältniss $\frac{BG}{GF}$ wird, also je kleiner die Höhe des Keils im Verhältnisse zu seiner Länge ist; man richtet daher mit spitzigen Keilen mehr, als mit stumpfen aus. Diess wird durch die Erfahrung hinlänglich bestätigt, da man mit Messern, Meiseln, Scheeren, Hacken u. dgl. die offenbar als Keile zu betrachten sind, desto leichter schneidet, hackt etc. je schärfer dieselben sind.

§. 150.

Die Grösse der Kraft anzugeben, um ein Holz von gegebener Länge und Festigkeit zu zerspalten.

Man bedient sich hiezu eines doppelten Keiles a c d, welchen wir schon auf eine gewisse Tiefe in das Holz eingetrieben annehmen wollen. Wenn das Holz bis zu e schon gespalten ist, und bis g mit einem Schlage gespalten werden soll, so muss die Cohaesion oder der Zusammenhang der Fasern von e bis g aufgehoben, d. h. selbe zerrissen werden. Dieser Zusammenhang wirkt offenbar in einer horizontalen oder auf die Linie b e g winkelrechten Richtung. Da nun die Kraft nach der Richtung b d, der Widerstand aber nach der Richtung o n wirkt, so verhält sich nach §.149 bei dem Keile die Kraft nach n d : Kraft nach o n = o n : n d = b c : b d. Da ferner der Punkt g fest bleibt, wenn der Klotz von e bis g gespalten oder die in f vereint gedachten Fasern zerrissen werden, so können wir n g als einen Hebel der zweiten Art ansehen, bei dem g der Ruhepunkt des Hebels, in f die Cohaesionskraft (C) und in o die nach der Richtung o n entgegenwirkende Kraft des Keiles angebracht ist. Bei diesem Hebel verhält sich aber die Kraft o n : C = f g : n g. Fig. 9. Tab. 5.

Werden diese Proportionen mitsammen multiplicirt, so erhält man die zur Bewegung des Keiles erforderliche nach der Richtung n d wirkende Kraft

$= C \cdot \frac{on}{nd} \cdot \frac{fg}{ng} = C \cdot \frac{bc}{bd} \cdot \frac{fg}{ng}$. Auf gleiche Art ist zur Abtreibung des Theiles m e g die Kraft $C \cdot \frac{ba}{bd} \cdot \frac{fg}{ng}$ erforderlich. Es ist demnach die gesammte nach der Länge des Keiles b d anzubringende Kraft $= C \cdot \frac{bc}{bd} \cdot \frac{fg}{ng} + C \cdot \frac{ba}{bd} \cdot \frac{fg}{ng} = C \cdot \frac{ac}{bd} \cdot \frac{fg}{ng}$

Hieraus ist ersichtlich

1tens. Dass die zur Zerspaltung des Klotzes nöthige Kraft zwar um so grösser seyn müsse, je grösser der Zusammenhang oder die Cohaesion der Holzfasern (C) ist. Dagegen ist aber

2tens, diese Kraft um so kleiner, je niedriger der Keil am Kopfe und je länger er ist. Uiberhaupt ist bekannt, dass einzutreibende Keile um so stärker ziehen, je flächer und je länger sie sind.

3tens. Bei dem Spalten eines längern Stückes Holz ist noch überdiess der Keil um so wirksamer, je weiter derselbe schon eingetrieben, je kürzer das noch übrige zu spaltende Stück e g, je spröder und unbiegsamer das Holz und je länger demnach die Entfernung n g ist.

In der letztern Hinsicht lehrt die Erfahrung, dass das harte Rothbuchenholz leichter zu spalten ist, als das weiche Tannen- und Fichtenholz, weil das erstere weniger biegsam ist und leichter springt, obgleich es schwerer ist und daher mehr zusammenhängende Theile hat.

Man hält übrigens jene Gestalt der Hacke zum Spalten des Holzes für die vortheilhafteste, wenn sie unten von a bis b sehr schneidig ist und dann von b bis c bedeutend auseinander geht; denn hiedurch dringt sie bei b leicht in das Holz und zerreisst oder zerschlägt es sodann leichter, als wenn sie von a bis c gleichförmig zunimmt und bei a einen stumpfen Winkel macht. Fig. 10.

§. 151.

Zum Keile gehören alle Gattungen Hacken, Messer und andere Schneidinstrumente. Von den erstern sind die nachstehenden bei den Zimmerleuten am meisten im Gebrauche:

Fig. 11. Tab. 5. Die Bandhacke (Fig. 11), welche zum Abzimmern der runden Baumstämme gebraucht wird; der Unterschied derselben von andern Hacken besteht darin, dass sie länger ist, um damit stärkere Baumstämme behauen zu können, und dass sie schmäler ist und nach ihrer ganzen Länge eine gleiche Breite besitzt, weil sie bei dem Gebrauche zugleich als Hebel zum Abbrechen der Holzspäne dient. Fig. 12. Die breite Hacke (Fig. 12) dient zum Ausgleichen der mit der Bandhacke roh abgezimmerten Baumstämme. Fig. 13. Die Zwerchaxt (Fig. 13), welche der Zimmermann statt des sonst gewöhnlichen Stemmeisens zur Verfertigung der Löcher braucht, u. s. w. Da die zwei erstern wegen ihres Zweckes nur zum Behauen des Holzes an der linken Seite des Arbeiters verwendet werden, so befindet sich ihre Schneide an der linken Seite, sie sind daher als einfache Keile zu betrachten; die Zwerchaxt hingegen ist von beiden Seiten zugeschärft und bildet daher einen doppelten Keil. Bei dieser Axt ist der mittlere Theil oder die Haube, durch welche der Stiel geht, gewöhnlich länger als bei andern Hacken, weil dieselbe zugleich als Hebel zum Herausreissen des ausgestemmten Holzes gebraucht wird.

§. 152.

Sonach haben wir die Theorie der fünf einfachen Maschinen: des Hebels, des Rades an der Welle, der Rolle, der Schraube und des Keiles geendet.

Bei allen diesen Maschinen findet der Satz statt, dass die Bewegungsmomente oder die Produkte der Kraft in ihren Raum und der Last in den zu gleicher Zeit beschriebenen Raum immer einander gleich sind. Sind daher von den 4 Grössen, Kraft, Last und den Räumen der Kraft und Last drei gegeben, so kann man die vierte berechnen und zwar auf gleiche Art, es mag was immer für eine Maschine verwendet werden. Derselbe Satz wird sich auch in der Folge bei allen zusammengesetzten Maschinen bestätiget finden. Wenn man daher bei der Berechnung einer Arbeit nicht bloss die Last, sondern auch den von ihr zurückgelegten Raum in Rechnung nimmt, so ergibt sich, dass alle Maschinen in ihrer Wirkung einander gleich sind, dass durch keine Maschine das Arbeitsprodukt vermehrt, wohl aber wegen eintretender nebenseitiger Hindernisse (wovon später gehandelt werden wird) vermindert werde, so dass man diejenige Maschine für die beste halten muss, bei welcher das Resultat der Arbeit dem Bewegungsmomente der Kraft am nächsten kommt.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir nun noch die verschiedenen Gattungen von Hebladen und Wagen, dann den Göpel (mit seinen neuen Verbesserungen) umständlich behandeln, nachdem diese Maschinen den bisher behandelten einfachen am nächsten kommen und am häufigsten angewendet werden.

A. H e b l a d e n.

§. 153.

Unter allen mechanischen Werkzeugen ist der H e b e l das einfachste; da man jedoch, um eine grosse Last zu heben, den Hebelsarm von Seite der Last sehr klein machen muss, demnach mit einem Hube keine bedeutende Höhe erreichen kann, so hat man H e b l a d e n oder solche Vorrichtungen erfunden, bei welchen nach jedem Hube die Last auf der bewirkten Höhe erhalten, sodann der Unterstützungspunkt erhöht, ein neuer Hub gemacht und auf solche Art der Zweck durch mehrere Hübe erreicht werden kann. Man bedient sich der Hebladen, vorzüglich um schwere Lasten, als Baumstämme, Kanonen u. dgl. auf Wägen aufzuladen, um Baumstöcke oder Pfähle auszureissen u. s. w.

Die einfachste Maschine dieser Art ist der G e i s f u s s, der eigentlich ein blosser He- Fig. 9.
bel ist, und bei dem Steinbrechen gebraucht wird. Man steckt nämlich den Fuss A C des- Tab.
selben in eine Spalte oder sichtbare Ablösung der Steine, und wenn mit einem Herabdrü- 7.
cken desselben die Spalte nicht hoch genug geöffnet ist, so treibt man Keile daneben hinein, gibt dem Hebel eine Unterlage, hebt zum zweitenmale u. s. w. bis der Stein von allen Seiten so abgelöst ist, dass man ihn von seinem Lager abheben und weiter bearbeiten kann. Eine Berechnung hierüber haben wir bereits §. 65 (Fig. 18. Tab. 1) angeführt. Weil dieses Instrument, besonders der Fuss A C sehr viel leidet, so wird der Geisfuss gewöhnlich ganz von Eisen mit einer gestählten Spitze und am Ende bei A stärker als bei der Handhabe B gemacht.

§. 154.

Um schwächere Pfähle auszuziehen, bedient man sich eines langen Hebels A B, der Fig. 14.
bei A mit einem eisernen gut befestigten krummgebogenen Haken versehen ist, an Tab.
welchem der Pfahl mit einem Seile oder einer Kette befestigt wird. Man rückt nun eine 5.
unten breite Unterlage C so nahe als möglich an den Pfahl, drückt den Hebel bei B herab, und wenn der Pfahl etwas nachgegeben hat, erhöht man die Unterlage C und fährt mit dem Heben so lange fort, als man es zum Ausheben des Pfahles nothwendig findet. Die Berechnung dieser Maschine ist bereits bekannt.

§. 155.

Einer ähnlichen Vorrichtung bedient man sich bei dem A u s r e i s s e n d e r B a u m- Fig. 8.
s t ö c k e. Bei Stämmen, die keine Pfahlwurzel haben, gräbt man den Stock um, und Tab.
haut die schwächern Wurzeln ab; die stärkste wird auf einer grössern Entfernung, 7.
als die übrigen, vom Stamme abgehauen, und auch mehr als der übrige Stock untergraben. Hierauf steckt man einen langen, am Fusse mit einem umgebogenen Eisen beschlagenen Hebebaum A C B unter diese Wurzel, einige Arbeitsleute halten diesen Baum so hoch als möglich in die Höhe und legen bei C ein halbrundes Scheitholz als Unterlage des Hebels darunter. Sodann klettern einige Arbeiter N, O, P, Q auf den Baum, begeben sich bis an dessen äusserstes Ende, wo sie, während sie sich mit den Knien am Baume halten, denselben durch ein gemeinschaftliches Aufsitzen und Erheben in eine schwingende Bewegung bringen und diese so lange vergrös-

Fig. 8. Tab. 7. sern, bis der Stock umbricht. Weil aber der Stock hiedurch nicht senkrecht aufgehoben, sondern nur nach der Seite, und zwar mit dem Hebel überworfen wird, so stellt man noch einen Arbeiter in M auf, welcher eine am Hebebaume in B mit einem Ringe befestigte Leitstange in den Händen hält uud durch Anziehen und Nachlassen derselben dafür zu sorgen hat, dass der Hebebaum nicht zur Seite ausweichen, sondern in einer möglichst senkrechten Richtung herabgehen und die Füsse der Arbeitsleute N, O, P, Q nicht beschädigen möge. Obgleich dieses Verfahren von Unkundigen für gefährlich gehalten werden dürfte, so ist doch kein Beispiel einer solchen Beschädigung bekannt. Auch geht das Stockbrechen sehr schnell von statten, indem alle Stöcke, die man durch 10 Stunden des Tages umgräbt, gewöhnlich in den noch übrigen 2 Arbeitsstunden gebrochen werden.

Andere mit Pfahlwurzeln versehene Stöcke, wobei ein jeder zum Ausreissen angewandte Hebel brechen würde, werden bloss umgegraben, die Wurzeln, so weit man dazu gelangen kann, abgehauen und der Stock selbst durch eingetriebene Keile ausgespalten.

§. 156.

Der Hebladen gibt es nach dem Lande, wo sie zuerst erfunden und gebraucht wurden, mehrere Arten; als eine deutsche, eine schwedische, zwei französische u. s. w.

Fig. 12, 13 und 14. Tab. 6. Die deutsche Heblade, welche auf der 6ten Tafel abgebildet erscheint, ist bei uns am meisten im Gebrauche. Sie dient gewöhnlich dazu, um in Waldungen das Ende eines schweren Stammes Holz auf eine Schleife oder einen Wagen zu heben. Dieselbe besteht aus zwei starken Pfosten E F und G H, welche gewöhnlich 8 bis 10 Zoll breit, 2 Zoll dick und 6 bis 7 Fuss lang sind; diese Pfosten sind unten und oben, nämlich bei G und H vermittelst eines dazwischen gelegten Holzes von 2 bis 3 Zoll Stärke und einiger angebrachten eisernen Beschläge mit einander verbunden, und werden mit zwei Reihen Oeffnungen durchbohrt. Damit die Oeffnungen nicht ausbrechen, beschlägt man die Pfosten inwendig mit Blech, durch welches nun die Oeffnungen durchgehen. Man kann auch einen einzelnen Stamm hiezu verwenden und denselben zu diesem Behufe in der Mitte ausstemmen und durchbohren. Damit dieser Stamm (die Lade) in der aufrechten Stellung sich fest erhalte, werden unten bei I und K zwei zugespitzte Eisen und oben bei H zwei hölzerne Stützen L und M angebracht.

Die Oeffnung in der Lade ist dazu bestimmt, um das vordere eiserne Ende B C eines Hebels oder einer hölzernen Stange A B durchgehen zu lassen. An diesem eisernen Ende ist vorne ein Haken o D und hinter demselben zwei halbrunde Lager m und n (Fig. 12 und 13), deren Entfernung eben so gross, als jene der Seitenöffnungen ist, angebracht. Wenn man nun die zwei Vorstecknägel oder Bolzen (Fig. 14) in die Seitenöffnungen steckt und an den Haken in D die Last anhängt, so lässt sich durch abwechselnde Erhöhung der Unterstützungspunkte m und n die Last, oder der Baumstamm von der Erde aufheben. Befindet sich nämlich der Hebel in der Lage Fig. 12, so wird der Punkt A durch die Kraft des Arbeiters so weit herabgedrückt, bis der Bolzen n in die nächste, oberhalb demselben in n' befindliche Oeffnung eingesetzt werden kann.

Der Hebel wird nun bei A so weit erhöht, bis auch der zweite Bolzen m in die obere Oeffnung m' gesteckt werden kann. Hierauf wird dieselbe Operation wiederholt und m', sodann aber wieder n'' als der Umdrehungspunkt angenommen und diess so lange fortgesetzt, bis der Stamm auf die geforderte Höhe gehoben ist. Fig. 12. Tab. 6.

Diese Höhe beträgt immer so viel, damit das Wagengestell mit der Deichsel unter den Stamm hineingeschoben werden könne, worauf der letztere herabgelassen und auf dem Wagen befestigt wird. Ist die Erde mit Schnee bedeckt, so reicht es hin, bloss das stärkere Ende auf eine Schleife aufzuladen, um den Stamm auf der Schneebahn fortzuschaffen. Soll derselbe jedoch auf eine grössere Entfernung geführt werden, so muss man ihn auf ein doppeltes Wagengestelle laden und desshalb die oben angeführte Operation mit der Heblade zweimal vornehmen.

Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last bei dieser Heblade, welche ein Hebel der ersten Art ist, ergibt sich aus der einfachen Proportion $K:Q = mo:mA$. Nun ist die Entfernung mo gewöhnlich 8 Zoll, die Länge des Hebels mA aber 8 Fuss, folglich das Verhältniss $mo:mA = 1:12$. Wenn daher ein Stamm von 15 Zoll Durchmesser und 60 Fuss Länge, dessen Gewicht beiläufig 25 Zentner beträgt, an einem Ende, folglich daselbst eine Last von $12\frac{1}{2}$ Zentnern gehoben werden soll, so ist ein Arbeiter, dessen Gewicht 125 bis 150 ℔ beträgt, im Stande, einen solchen Stamm zu heben; inzwischen werden bei solchen Operationen gewöhnlich zwei Arbeiter verwendet, die einander wechselseitig helfen.

§. 157.

Die schwedische Heblade, welche auch zum Stockausreissen angewendet wird, besteht aus einem doppelten Hebel. Bei dem Gebrauche derselben wird der Baumstock zuerst umgegraben, die Wurzeln werden abgehauen und eine der stärkern Wurzeln wird an den Hebebaum A C mit Seilen oder einer Kette gebunden. Das Ende C dieses Hebebaumes liegt auf dem Baumstocke selbst auf, das andere Ende A desselben ruht jedoch auf einem zweiten Hebel D E, welcher so wie bei der deutschen Heblade in der mittlern Oeffnung eines aufrecht stehenden Baumes oder einer Lade mittelst Vorstecknägeln in die Höhe gehoben werden kann. Das eine Ende D des zweiten Hebels wird nämlich von einem Arbeiter niedergedrückt und zu gleicher Zeit das zweite Ende E von einem andern Arbeiter gehoben, bis man den Nagel von n nach n' unterstecken kann. Hierauf wird das Ende E wieder so weit herabgedrückt, bis man den zweiten Nagel von m nach m' einsetzen kann u. s. w. wodurch endlich der Zusammenhang der Wurzeln in der Erde getrennt und der Stock an einem Ende aufgehoben wird, so dass man unter denselben kommen und die noch übrigen Wurzeln abhauen kann. Fig. 1. Tab. 7.

Bei dieser Heblade wirkt die Kraft am Ende des ersten Hebels A C in A offenbar wie an einem Hebel der zweiten Art, und es ist, wenn der Widerstand des Zusammenhanges der Wurzeln $= W$ und die Kraft, die in A den Hebel in die Höhe hebt, $= P$ gesetzt wird, $P.AC = W.BC$. Nun wirkt aber die Kraft K der Arbeiter an dem zweiten doppelten Hebel DE; es muss daher das statische Moment der Last oder $P.om$ gleich seyn der Summe der beiden Momente von Seite der Kraft $K.Dm + K'.Em$. Aus der

ersten Gleichung folgt $P = W \cdot \frac{BC}{AC}$, folglich durch weitere Substitution
$W \cdot \frac{BC}{AC} \cdot om = K . Dm + K' . Em$. Sind nun auf der einen Seite so viel Menschen als auf der andern angebracht, oder $K = K'$, so ist
$W \cdot \frac{BC}{AC} \cdot om = K (Dm + Em) = K . DE$, woraus die Kraft $K = W \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{om}{DE}$ folgt.

Die Grössen A C und D E sind die Längen der zwei Hebel, wovon wir den ersten zu 18 und den zweiten zu 12 Fuss annehmen wollen; es sey ferner $BC = 2$ Fuss und om oder die halbe Entfernung der Nägellöcher von einander $= 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuss, so ist die Kraft, womit der Stock im Punkte B in die Höhe gezogen wird, $K = W . \frac{2}{18} . \frac{\frac{1}{3}}{12} = \frac{W}{324}$. Wenn man also an jedem Ende des Hebels D E einen Arbeiter von 30 ℔ mittlerer Kraft anstellt, so wird hiedurch der Baumstock im Punkte B mit einer Kraft $W = K . 324 = 30 . 324 = 9720$ ℔ gehoben. Uibrigens ist es einleuchtend, dass man die Wirkung dieser Heblade durch Anwendung längerer Hebebäume noch mehr vergrössern und nach Maassgabe des Widerstandes, den der Zusammenhang der Wurzeln äussert, erhöhen kann.

§. 158.

Die zwei französischen Hebladen, welche aus den *Memoires de Mathematique et de Physique de l'Academie Royale des Sciences*, Anno 1617, pag. 319 entlehnt wurden, sind einfache Hebel, wie die deutsche Heblade, sie haben jedoch den Vortheil, dass sie sich selbst einhängen.

Die eine hievon besteht aus einer stehenden eisernen Stange, die auf beiden Seiten mit starken und tiefen Zähnen nach Art einer Säge versehen ist. Diese Stange umgibt die eiserne Gabel eines Hebels, an welcher drei Bügel angebracht sind. Zwei hievon hängen sich in die Zähne der eisernen Stange abwechselnd ein und der dritte ist mit einem eisernen Haken D versehen, an welchen man die Last hängt. Drückt man nun den Hebel bei A herunter, so gibt die Achse m des in o p (Fig. 16) eingehängten Bügels p o m die unbewegliche Unterlage ab, die an D angehängte Last wird gehoben und zu gleicher Zeit hängt sich der zweite Bügel E q in einen höhern Zahn ein. Dieser letztere dient nunmehr der Last zur Unterlage, wenn der Hebel bei A wieder gehoben wird. Dieses Spiel setzt man nun auf gleiche Weise fort, bis man die Last auf die gehörige Höhe bringt.

Fig. 15, 16 und 17. Tab. 6.

Damit die zwei Bügel sich von selbst in die obern Zähne einhängen, sind an denselben zwei Federn o F und q G angebracht, welche mittelst eines Drahtes G F oben gegen einander gebunden sind, und dadurch die Bügel in die Zähne hineindrücken. Der Hebel A B ist von einem zähen Holze, alle übrigen Theile aber von Eisen. Der Hebel wird in die gespaltene Hülse B H (Fig. 17) eingeschoben, sodann der Ring H gegen B hinaufgetrieben, und gegen das Zurückweichen desselben in I ein Nagel vorgeschlagen.

§. 159.

Die andere **französische Heblade** besteht aus einer eisernen, auf einer Seite gezähnten Stange C D, welche mit der Last zugleich in die Höhe gehoben wird. Man bewirkt diess durch einen Hebel A B, der auf dieselbe Art wie bei der vorigen Heblade (Fig. 15) mit zwei Bügeln n o und p q versehen ist, mit dem Unterschiede jedoch, dass diese Bügel unterhalb des Hebels AB angebracht sind; dieselben dienen auch bei dieser Heblade abwechselnd zum Halten und zum Heben der Last. Die Achse oder der Unterstützungspunkt des Hebels befindet sich in m (Fig. 19) an einem eigends hiezu vorgerichteten Haken p E, welcher oben in E an dem Obertheile der drei Füsse eingehängt ist. Fig. 18. bis 22. Tab. 6.

Befindet sich der Hebel in der Lage AB (Fig. 18) und wird bei A gehoben, so geht der Bügel n o hinunter und hängt sich in den nächsten Zahn ein, während inzwischen die Last von dem untern Bügel p q gehalten wird. Drückt man nun den Hebel AB herab, so wird die Last mit der gezähnten Stange am Bügel n o gehoben, und der zweite Bügel fällt durch sein eigenes Gewicht in einen folgenden Zahn ein. Auf diese Weise wird die Operation so oft wiederholt, bis die Last sammt der gezähnten Stange auf die gehörige Höhe gehoben ist.

Auch diese Heblade ist, mit Ausnahme des Hebels AB und der drei Füsse, ganz von Eisen; die Construction ihrer einzelnen Theile ist aus Fig. 19 bis 22 ersichtlich. Die Berechnung der beschriebenen zwei französischen Hebladen ist dieselbe, wie bei einem Hebel der ersten Art.

§. 160.

Eine Frage von Wichtigkeit ist die **Bestimmung der Entfernung der Löcher** bei der deutschen und schwedischen, und jene der Zähne bei der französischen Heblade Fig. 15, Tab. 5. Um diese Entfernungen zu bestimmen, sey a s die horizontale Linie, welche die Höhe s v = h, auf welche der Hebel durch einen menschlichen Arm gehoben werden kann, bezeichnet. Es sey a g die Linie, in welche die vordern Theilungspunkte, und q h diejenige, in welche die hintern Theilungspunkte für die Löcher der Heblade hineinfallen. Man nehme in der Mitte der ersten Theilungslinie den Punkt d an, und ziehe sowohl die Horizontale d t, als auch die Linien d s und d v, welche nunmehr zwei Theilungspunkte n und l geben. Zieht man durch diese Punkte abermals die Linien s l e und v n c, so erhält man wieder die zwei Theilungspunkte e und c. Man trägt nunmehr die Entfernungen c d = d e in der vordern Vertikallinie a g und die Entfernung n l in der hintern Vertikallinie q h sowohl auf- als abwärts, wodurch nun beide Reihen Oeffnungen erhalten werden. Fig. 15. Tab. 5.

Die Entfernungen dieser Oeffnungen werden auf folgende Art berechnet: Da das Dreieck d n l dem Dreiecke d s v ähnlich ist, so verhält sich d n : n l = d s : s v. Setzen wir die Entfernung der Oeffnungen in der schiefen Richtung d n = a = 4 Zoll, die Länge des Hebels d s = b = 7 Fuss, und die ganze Hubshöhe, auf welche der Arbeiter mit seinem Arme zu reichen im Stande ist, s v = h = 5 Fuss, so ist die Entfernung der Löcher in der hintern Reihe oder $nl = \frac{dn \cdot sv}{ds} = \frac{a \cdot h}{b} = \frac{4'' \cdot 5'}{7'} = 2{,}857$

Zoll. Da ferner die Dreiecke vnl und vcd einander ähnlich sind, so verhält sich

$$vn : nl = vc : cd \text{ oder } b - a : \frac{a.h}{b} = b : cd, \text{ woraus}$$

$$cd = \frac{a.h}{b-a} = \frac{4''.\ 5'}{7' - \frac{1}{3}'} = 3 \text{ Zoll.}$$

Man sieht hieraus, dass die Entfernung der Löcher in der vordern Reihe, nämlich bc = cd grösser, als die Entfernung der Löcher on = nl in der hintern Reihe seyn müsse. Wenn daher der Punkt d in der Mitte der Höhe von n und l sich befindet, so steht c etwas über der Mitte von n und o, u. s. w. bis die obersten zwei Punkte a und q in einer horizontalen Linie liegen. In dem obigen Beispiele war die Entfernung cd = 3 Zoll und die halbe Höhe der Heblade da = $2\frac{1}{2}$ Fuss = 30 Zoll; es ergeben sich daher in der Höhe da gerade 10 Abtheilungen. Die Entfernung nl war = 2,857 = $\frac{20}{7}$ Zoll; die Anzahl der Abtheilungen in der Linie mq beträgt daher, $\frac{mq}{nl} = \frac{30''}{\frac{20}{7}''} = 10\frac{1}{2}$, d. h. es sind von q nach n zehn Abtheilungen, und von n nach m noch eine halbe Abtheilung vorhanden.

Fig. 15. Tab. 5. Diese Construction der Hebladen ist auch an und für sich betrachtet schon begreiflich. Es müssen nämlich alle Linien apw, cnv, ghu in die horizontale Linie gu und alle Linien gir, els in die Horizontale as fallen, weil beide Horizontalen die Gränze bezeichnen, auf welche der Hub des menschlichen Armes reicht. Würden nun (Fig. 16) die Punkte b, c, d eben so weit, wie o, n, l von einander entfernt angenommen, so müsste man, um die Last auf die Höhe der einzelnen Löcher zu bringen, nach und nach die Bögen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ beschreiben; es kämen daher die Punkte β, β', β'' immer höher, und man würde in kurzer Zeit den Hebel nicht mehr erreichen, folglich die obersten Oeffnungen nicht benützen und daher die Last nicht auf die ganze Höhe der Heblade erheben können.

Fig. 15. Bei dieser Construction ist jedoch zu bemerken, dass die Entfernung der Löcher in der schiefen Richtung nämlich gi, ap bedeutend grösser ist, als dl und dn. Es ist nämlich $gi = \sqrt{(gh^2 + hi^2)} = \sqrt{(dm^2 + nl^2)} = dm + \frac{nl^2}{2\,dm} + \ldots$, ferner $dl = \sqrt{(dm^2 + ml^2)} = \sqrt{\left(dm^2 + \frac{nl^2}{4}\right)} = dm + \frac{nl^2}{8.dm} + \ldots$; es ist daher der Unterschied $gi - dl = \frac{3}{8} \cdot \frac{nl^2}{dm}$. Um diess in unserm Falle zu berechnen, haben wir $dm = \sqrt{(dl^2 - ml^2)} = \sqrt{(4^2 - (1{,}4)^2)} = 3{,}75$; folglich den obigen Unterschied $= \frac{3}{8} \cdot \frac{(2{,}8)^2}{3{,}75} = 0{,}78$ Zoll, welches allerdings bedeutend ist. Da nun die Linie gi gegen dl um 0,78 Zoll grösser wird, so muss man bei den Oeffnungen m und n (Fig. 13 und 16, Tab. 6) in dem eisernen Ende des Hebels einen Spielraum von 0,39 Zoll beiderseits lassen, d. h. diese Entfernung mn muss sowohl 4 Zoll, als auch 4,78 Zoll halten können.

Wollte man diesen Spielraum nicht annehmen, und die Entfernungen $gh = gi \ldots\ldots = el = ld = dn \ldots\ldots$ setzen, zugleich aber auch die schiefe Lage bei dem Gebrauche der Heblade berücksichtigen, so ergibt sich eine Construction, welche sich am besten, wie Fig. 23, Tab. 6, durch Verzeichnung finden lässt; es bilden nämlich in diesem Falle die äussern Oeffnungen a, b, c, d eben so wie die innern m, l, k krumme Linien, deren Berechnung für die Anwendung zu schwierig und um so mehr überflüssig ist, als diess durch den Spielraum in den Oeffnungen n und m Fig. 13 und 16, Tab. 6 für die Bolzen ersetzt werden kann. Fig. 23. Tab. 6.

§. 161.

Wenn Stöcke oder Bäume sammt den Wurzeln aus der Erde gehoben werden sollen, kann man sich noch folgender französischen Vorrichtung bedienen. Man gebraucht nämlich einen Hebel AB, welcher an seinem vordern Ende mit dem eisernen Ansatzstücke B o n m versehen ist; in der Mitte zwischen m und o ist in n eine Kette angebracht, welche um einen festen Baumstock C geschlungen wird. Eine zweite lange Kette wird an dem zweiten Stocke oder oben in der Höhe des Baumes in f befestigt und der Haken m q bei q in diese Kette eingehängt. Wenn diess geschehen ist, so beschreiben die Arbeiter den Bogen A A′, wodurch m nach m′ und q nach q′ zurückgeht, folglich auch die Entfernung des Stockes oder Baumes D von dem Stocke C um q q′ vermindert und der erstere um eben so viel angezogen wird. Wenn sich nun der Hebel in der Lage A′ m′ befindet, so wird der Haken o r bei r′ in die vom Baume herabkommende Kette von einem Arbeiter eingehängt, und der Hebel A′ m′ von den übrigen Arbeitern von A′ nach A zurückgeführt, wo dieselbe Operation, wie zuerst, wiederholt wird, bis endlich der Baum sammt der Wurzel sich niederlegt oder der Stock ausgehoben wird. Fig. 17. Tab. 5, dann Fig. 2 und 3. Tab. 7.

Diese Vorrichtung bildet in der ersten Lage A m einen Hebel der ersten Art, wobei n der Umdrehungspunkt ist und die Last in m hängt. In der zweiten Lage A′ m′ bildet dieselbe einen Hebel der zweiten Art, wobei die Last in o′ und der Umdrehungspunkt wieder in n vorhanden ist. Im erstern Falle haben wir die Proportion $K : P = mn : nA$. Da jedoch der eigentliche Widerstand W erst unten an den Wurzeln des Baumes in h vorhanden ist, so wird die Kraft, womit die Wurzel ausgerissen wird, da hier ein Winkelhebel vorkömmt, nach §. 68, Fig. 24, Tab. 1 noch in dem Verhältnisse der Höhe ig zur Basis hg vermehrt oder es ist

$$P : W = hg : ig;$$

demnach ist auch $K : W = mn.hg : nA.ig$, woraus die Kraft $K = W \cdot \frac{mn}{nA} \cdot \frac{hg}{ig}$.

Beispiel. Es sey die Länge des Hebels $nA = 12$ Fuss und $mn = 4$ Zoll; die Höhe $ig = 40$ Fuss und $hg = 2$ Fuss, so ist $K = W \cdot \frac{1/3}{12} \cdot \frac{2}{40} = \frac{W}{720}$; man übt daher mit dieser Heblade eine sehr grosse Kraft aus.

§. 162.

Hier verdient noch eine Methode bemerkt zu werden, welche man in England zum Ausreissen der Baumstöcke angewendet hat. Dieselbe besteht in dem Gebrauche eines gusseisernen transportablen Kranichs, welcher an einem starken Fig. 4. Tab. 7.

Baumstamme mit Ketten angehängt wird. Hierauf wird eine zweite Kette an einem schwächern Baumstamme befestigt, der Kranich mittelst der zwei Kurbeln in Bewegung gesetzt, und auf diese Weise der Stock ausgerissen. Man kann auch an eine Hauptkette mehrere Seitenketten und diese an eben so viele Baumstöcke befestigen, welche nun der Reihe nach ausgerissen werden. Die Erklärung des Kranichs und die bedeutende Wirksamkeit dieser Maschine werden wir im IX. Kapitel näher kennen lernen.

§. 163.

Fig. 5, 6 und 7. Tab. 7. Wenn Pfähle unter Wasser aus einem Flussbette ausgezogen werden, bedient man sich dazu einer sogenannten Zugschraube, welche Fig. 5 deutlich dargestellt ist. Auf einem Schiffe, das an den Pfahl angelegt wird, befestigt man (Fig. 7) zwei Träme AB, CD, und legt quer über dieselben einen dritten Tram EF, der stärker als die erstern ist, und durch welchen die eiserne Schraube GH (Fig. 5) durchgeht. An dem unteren Ende der Schraubenspindel ist ein Ring oder Haken H vorhanden, in welchen eine Kette eingehängt, zweimal um den auszuziehenden Pfahl geschlungen und mit seinem andern Ende in den Haken oder in ein Glied der ersten Kette eingehängt wird. Dann wird die um den Pfahl geschlungene Kette mit einem Klotze oder Hebel unter das Wasser an dem Pfahle so weit als möglich herabgestossen. Nachher zieht man mit dem Schraubenschlüssel IL die Schraube an, wodurch das Schiff einige Zoll tief in das Wasser eingedrückt wird. Ist diess geschehen, so nimmt man einen Schlägel und schlägt rechts und links an den Pfahl, damit er auf solche Art locker werde, worauf das Schiff sammt dem Pfahle in die Höhe springt und ohne Anstand von ein paar Arbeitern herausgehoben werden kann. Wenn der Pfahl durch diese erste Operation nicht gewältigt wird, so wird die Schraube noch um einige Gewinde tiefer angezogen, und das und selbe Verfahren wiederholt.

Die von der k. böhm. Wasserbaudirection an der Moldau und Elbe gebrauchten Zugschrauben haben folgende Dimensionen: Die Länge der Schraubenspindel GH beträgt 2½ bis 3 Wiener Fuss, wovon der angeschnittene oder mit Gewinden versehene Theil 18 Zoll und der untere mit einem Oehre (H) versehene Theil 12 bis 18 Zoll lang ist. Der Durchmesser der Schraubenspindel sammt Gewinde beträgt 3 Zoll; die Gewinde sind winkelrecht, ⅜ Zoll stark und eben so tief eingeschnitten. Die Höhe der Schraubenmutter beträgt 3 Zoll; sie ist unten mit einer ½ Zoll dicken Platte versehen, welche auf einer andern, auf dem 12 bis 15 Zoll hohen Trame EF befestigten, eisernen Platte aufliegt und mittelst des Schraubenschlüssels auf derselben herumgedreht wird.

Wenn der Pfahl sehr stark ist, pflegt man zwei Schiffe parallel zu einander um denselben zu stellen, worauf die Träme AB, CD über beide Schiffe gelegt, von beiden Seiten Zugschrauben angebracht und der Pfahl mittelst derselben ausgehoben wird.

B. W a g e n.

§. 164.

Unter die wichtigsten und gemeinnützigsten Anwendungen des Hebels gehören die Wagen, welche zur Bestimmung des Gewichtes der Körper dienen. Es gibt mehrere Arten von Wagen, die nach den verschiedenen Zwecken, wozu man sie im bürgerlichen Leben braucht, eingerichtet sind, nämlich:

1tens. Die gemeine oder Krämerwage.
2tens. Die Schnell- oder Römische Wage.
3tens. Die Wage mit einem Zeiger.
4tens. Die verjüngten Wagen.
5tens. Die Strassen- oder Mauthwage.
6tens. Die Federwagen.

§. 165.

Die Krämerwage hat den Zweck, das Gewicht einer Waare durch ein demselben gleichkommendes Gewicht anzugeben; sie besteht aus einem Hebel a b, welcher in der Mitte c unterstützt wird, und an dessen beiden Endpunkten Schalen aufgehängt werden, um darein von der einen Seite die Waare und von der andern Seite so viel Gewichte zu legen, bis sie dem Gewichte der Waare gleich kommen. Der Wagebalken wird gewöhnlich an der Achse c beiderseits in den Oehren der sogenannten Schere c d aufgehängt, und ober dieser Achse befindet sich die Zunge c e, welche auf dem Wagebalken winkelrecht befestigt ist. Der horizontale Stand des Wagebalkens wird daher erkannt, wenn die Zunge senkrecht steht, oder mit der nach der Richtung der Schwere herabhängenden Schere d c einspielt. Fig. 1. Tab. 8.

Die Forderungen, welche man an eine Krämerwage macht, sind:

1tens. Dass die Waare genau so schwer sey, als das Gewicht in der gegenseitigen Schale;
2tens. dass der Wagebalken sich hiebei in eine horizontale Lage stelle,
3tens. dass dieser horizontale Stand durch einen kleinen Unterschied in den Gewichten sich merklich ändere; endlich
4tens. dass die Wage, wenn sie aus ihrer Lage verrückt wird, sich nach einigen Schwingungen wieder in denselben Punkt einstelle.

Diese vier Eigenschaften werden gewöhnlich unter Gleichheit der Gewichte, horizontalem Stande, Empfindlichkeit und Trägheit der Wage begriffen.

§. 166.

Um der ersten Eigenschaft zu entsprechen, müssen die beiden Arme der Krämerwage gleich lang seyn. Denn da bei dieser Wage nach der Eigenschaft des Hebels im Zustande des Gleichgewichtes $P.bc = W.ac$ ist, und $P = W$ nach der Forderung seyn soll, so muss auch $bc = ac$ seyn. Fig. 2.

Es versteht sich von selbst, dass die Wagschalen, noch bevor Gewichte hineingelegt wurden, an dem Wagebalken im Gleichgewichte seyn müssen. Denn diese Wagschalen vertreten offenbar die Stelle abzuwiegender Gewichte; es muss daher die Bedingniss, die den letztern zukommt, auch bei den Wagschalen vorhanden seyn.

§. 167.

Es handelt sich nun, wie man untersucht, ob eine Wage gleiche Hebelsarme oder Wagebalken-Arme habe?

Mit dem Zirkel dieselben genau abzumessen, würde sehr beschwerlich und so zu sagen unmöglich seyn. Wollte man z. B. bei einer Wage, worauf 1 Ctr. gewogen wird, noch 1 Loth erkennen, so müsste man, da 1 Ctr. : 1 Loth = 3200 : 1 sich verhält, im Stande seyn, den 3200ten Theil der Länge eines Armes dieser Wage mit dem Zirkel abzumessen; wäre daher der Arm a c ein Fuss lang, so müsste man mit dem Zirkel $\frac{3}{22}$ Linie abmessen können, was nicht leicht möglich ist.

Es ist daher vortheilhaft, die Gleichheit der Hebelsarme einer Krämerwage durch das Abwägen gleicher Gewichte zu bestimmen. Zu diesem Behufe muss man sich vorerst diese vollkommen gleichen Gewichte verschaffen. Man legt hiezu irgend ein Gewicht W in eine Wagschale und in die andere Schale so viele Gewichte (P) irgend einer Materie, bis ein vollkommenes Gleichgewicht erfolgt. Hierauf nimmt man ein zweites Gewicht W′, was gewöhnlich etwas schwerer als W ist, legt es in dieselbe Wagschale, während in der andern noch die Gewichte P vorhanden sind, und nun wird W′ so lange adjustirt (z. B. abgefeilt), bis wieder ein vollkommenes Gleichgewicht vorhanden ist. Ist diess der Fall, so ist W genau = W′, und man hat zwei vollkommen gleiche Gewichte. Wenn man itzt die Wage selbst prüfen und adjustiren will, so legt man diese Gewichte W und W′ in beide Wagschalen; spielt die Zunge ein, so müssen die Arme auch gleich lang seyn. Im Gegentheile müssen die Arme so lange zugerichtet werden, bis ein vollkommenes Einspielen erfolgt.

Diess ist die Art, wie genaue Wagen verfertigt und adjustirt werden. Wenn jedoch die Wage bereits fertig ist, und es sich nur darum handelt, sie zu prüfen, so Fig. 2. Tab. 8. legt man in die eine Schale irgend ein Gewicht W, und in die andere Wagschale ein zweites Gewicht P, welches mit dem ersten allenfalls durch Zulagsgewichte in das Gleichgewicht gebracht wird. Sodann verwechselt man diese Gewichte und beobachtet, ob nun wieder Gleichgewicht statt findet, in welchem Falle sowohl die Gewichte als auch die Arme einander gleich seyn müssen. Wir haben nämlich für den ersten Fall $W . ac = P . bc$, nach dem Verwechseln aber $P . ac = W . bc$, folglich wenn man diese zwei Gleichungen mitsammen dividirt, $\frac{W}{P} = \frac{P}{W}$, woraus $W^2 = P^2$ und $W = P$ folgt. Substituirt man diesen Werth in eine der zwei obern Gleichungen, so ergibt sich $ac = bc$; die Wage hat daher in diesem Falle die erforderliche Eigenschaft der gleichen Hebelsarme.

§. 168.

Wir wollen nun annehmen, die Wage hätte bei der im vorigen §. angegebenen Probe in Hinsicht der Gleichheit der Arme nicht eingespielt; man besitze aber keine andere

Wage und müsste sich einer unrichtigen zum Abwägen bedienen; es frägt sich daher, **wie man mittelst einer unrichtigen Krämerwage das wahre Gewicht einer Waare finden könne.**

In diesem Falle legt man bei der Umwechslung der Gewichte ein anderes Gewicht R in die Schale bei a, welches nun grösser oder kleiner als P seyn mag; erfolgt hiedurch Gleichgewicht, so ist $R.ac = W.bc$ und da wir im ersten Falle $W.ac = P.bc$ hatten, so erhalten wir durch die Division dieser zwei Gleichungen mit einander $\frac{R}{W} = \frac{W}{P}$ und daher das wirkliche Gewicht der Waare $W = \sqrt{P.R.}$ Fig. 2. Tab. 8.

Beispiel. Hätte man das Gewicht einer Waare in einer Schale der Wage = 81 ℔ und nach dem Umwechseln in der andern Schale = 100 ℔ gefunden, so ist das wahre Gewicht derselben $= \sqrt{81 . 100} = 90$ ℔, welches von dem Mittel beider Gewichte, nämlich $\frac{100 + 81}{2} = 90{,}5$ ℔, um ½ ℔ abweicht; man würde daher in diesem Falle durch Annahme des Mittels um ½ ℔ vom wahren Gewichte fehlen. Stünde jedoch in einem andern Falle die Waare auf der einen Seite mit 100, und auf der andern mit 101 ℔ im Gleichgewichte, so ist das wahre Gewicht $= \sqrt{100 . 101} = 100{,}4987$, wogegen das Mittel $\frac{100 + 101}{2} = 100{,}5000$ beträgt; woraus man sieht, dass man nur bei kleinen Unterschieden das Mittel allenfalls für das wahre Gewicht annehmen könne.

§. 169.

Die **zweite Eigenschaft** oder die zweite Forderung, welche man an eine Krämerwage macht, ist, **dass sich die Wage bei gleichen Gewichten horizontal stelle.** Soll die Wage diese Eigenschaft besitzen, so muss die Achse derselben (nämlich der Punkt c, um welchen die Umdrehung geschieht) etwas über der Linie, welche durch die beiden Aufhängspunkte a und b der Gewichte gezogen wird, erhöht seyn, oder die Achse c muss mit den zwei Aufhängspunkten a und b ein gleichschenklichtes Dreieck acb bilden. Wenn nämlich a und b die zwei Aufhängspunkte der Gewichte sind, so muss der Schwerpunkt dieser Gewichte in der Mitte von ab oder in o vorhanden seyn; derselbe wird sich daher im Zustande der Ruhe senkrecht unter der Achse befinden müssen. Wird nun der Wagebalken gedreht, oder der Schwerpunkt von o nach d versetzt, so erhält derselbe bei der Umdrehung um die Achse c den Hebelsarm de, woraus das Moment $(W + P)\,de$ entsteht. Dieses Moment treibt daher immer den Schwerpunkt der Gewichte herab, bis der Wagebalken die horizontale Lage ab annimmt, wobei es = 0 wird. Fig. 3.

Nehmen wir im Gegentheile an, die Achse der Wage sey in o oder **mit den zwei Aufhängspunkten a und b in einer Linie**, so wird der Schwerpunkt der Gewichte keinen Einfluss mehr auf die Umdrehung haben, und es wird in jeder Lage aob, a′ob′, welche die Wage auch immer annimmt, Gleichgewicht erfolgen, und nicht nur $W.ao = P.bo$, sondern auch $W.mo = P.no$ seyn, wie aus §. 68 der Lehre vom Hebel bekannt ist. Fig. 4.

Fig. 5. Tab. 8. Wäre ferner die Achse c unter den Aufhängspunkten und daher unter dem Schwerpunkte der Gewichte $W + P$ angebracht, so würde dieser Schwerpunkt bei einer jeden noch so kleinen Bewegung ein Moment $(W + P)\, de$ erhalten, welches nach der Richtung der mitgetheilten Bewegung fortwirkete; sonach würde diese Bewegung immerfort vermehrt und die Folge herbeigeführt, dass die Wage umschlagen müsste.

Es ist aber hiebei zu bemerken, dass nicht bloss die zwei Gewichte (mit Einschluss der Wagschalen), sondern auch der Wagebalken ein Gewicht und einen Schwerpunkt habe, folglich bei einer Umdrehung ein Moment erhalten könne, welches den horizontalen Stand der Wage herzustellen vermag, wenn diess durch die Gewichte nicht bewirkt wird. Hieraus folgt, dass es nicht immer nöthig sey, dass der Schwerpunkt des Wagebalkens und der zwei Gewichte unter der Achse liege; es kann nämlich der Schwerpunkt der zwei Gewichte auch in der Achse seyn, wenn dagegen nur der Schwerpunkt des Wagebalkens unter derselben ist: denn in diesem Falle erhält der letzte Schwerpunkt ein Moment, welches die Wage in einer jeden schiefen Lage herunterzieht. Eben so könnte der Schwerpunkt der zwei Gewichte sogar über der Achse liegen, wenn nur jener des Wagebalkens unter derselben ist und ein grösseres Moment hat.

Um praktisch den horizontalen Stand einer Wage leicht beurtheilen zu können, Fig. 3. befestigt man, wie bereits oben bemerkt wurde, in der Richtung der mittlern Linie c o des gleichschenklichen Dreieckes a c b die Zunge c g.

§. 170.

Die dritte Eigenschaft einer Krämerwage ist die Empfindlichkeit. Man erkennt dieselbe, wenn ein kleines Zulagsgewicht einen grossen Ausschlag, d. h. eine grosse Abweichung der Zunge von ihrer senkrechten Richtung bewirkt.

Um zu erfahren, wodurch man diese Eigenschaft erhalte, wollen wir uns eine solche Fig. 6. Wage durch einfache Linien gezeichnet vorstellen. Es sey a b der Wagebalken in seinem horizontalen Stande, seine Achse sey in c und die Zunge c g auf der, durch die Aufhängspunkte gehenden Linie a b senkrecht; die Arme seyen einander gleich oder $ao = ob$, und an a und b zwei gleiche Gewichte W und P angehängt. Wird nun an einer Seite das Gewicht p zugelegt, so sinkt der Wagebalken von dieser Seite und steigt auf der andern in die Höhe. Wir wollen annehmen, derselbe bleibe in der Lage k s und die Zunge in d c f stehen, so wird durch diese Verwendung des Wagebalkens der Schwerpunkt o der zwei Gewichte den Kreisbogen o d um die Achse beschreiben, und auf gleiche Art wird der Schwerpunkt p des Wagebalkens (dessen Gewicht wir $= B$ setzen) einen gleichen Winkel oder den Bogen p n zurücklegen.

Es ist offenbar, dass Anfangs in der horizontalen Lage im Zustande des Gleichgewichtes $P.ob = W.ao$ seyn musste. Im zweiten Falle aber ist, wenn man durch c als den Umdrehungspunkt eine horizontale Linie zum Messen der Entfernungen zieht $W.lc + B.ic = (P + p)\, cq$; denn es zieht nunmehr auf der Seite von W auch noch das Gewicht (B) des Wagbalkens von n nach p herunter; es ist daher eben so viel, als wenn in n das Gewicht B aufgehängt wäre, dessen Moment $B\,.\,ic$ ist. Dieses Moment

war in der horizontalen Lage des Wagebalkens nicht vorhanden, da n mit p zusammenfiel, Fig. 6.
folglich die Entfernung $ic = 0$ war. Tab.
Wir wollen nun aus der für das Gleichgewicht in der schiefen Lage aufgestellten 8.
Gleichung den Ausschlag $x = hf$ berechnen.

Zu diesem Behufe setzen wir die Länge der Zunge $cf = z$, und $ch = y$; es sey ferner die Entfernung der Achse vom Schwerpunkte der aufgehängten Gewichte $co = cd = e$; die Entfernung der Achse vom Schwerpunkte des Wagebalkens (welcher hier absichtlich der deutlichern Zeichnung wegen so tief angenommen wurde) oder $cp = cn = b$, endlich die Hebelsarme $ao = ob = kd = ds = a$.

Nun ist das Dreieck dmk dem Dreiecke chf ähnlich, folglich verhält sich $dm : dk = ch : cf$ oder $dm : a = y : z$, woraus $dm = \frac{a \cdot y}{z} = dr$; da ferner die Dreiecke cde und cfh einander ähnlich sind, so ist $de : cd = fh : cf$ oder $de : e = x : z$ und sonach $de = \frac{e \cdot x}{z}$. Hieraus ergibt sich $lc = me = md + de = \frac{a \cdot y + e \cdot x}{z}$ und $cq = rd - de = \frac{a \cdot y - e \cdot x}{z}$.

Endlich ist das Dreieck cin dem Dreiecke fhc ähnlich, folglich verhält sich $ci : cn = fh : fc$ oder $ci : b = x : z$, woraus $ci = \frac{b \cdot x}{z}$.

Substituiren wir nun die drei gefundenen Werthe in die obige Gleichung, so ist $W\left(\frac{a \cdot y + e \cdot x}{z}\right) + B \cdot \frac{b \cdot x}{z} = \left(P + p\right)\left(\frac{a \cdot y - e \cdot x}{z}\right)$. Multipliciren wir in dieser Gleichung durchaus mit z und verrichten die noch angezeigten Multiplikationen, so ist

$$W \cdot a \cdot y + W \cdot e \cdot x + B \cdot b \cdot x = P \cdot a \cdot y - P \cdot e \cdot x + p \cdot a \cdot y - p \cdot e \cdot x,$$

$$\text{woraus } x = \frac{(P - W + p)\, a \cdot y}{W \cdot e + B \cdot b + P \cdot e + p \cdot e}.$$

Da wir hier nur die Wirkung des Zulagsgewichtes p auf den Ausschlag zu untersuchen haben, so müssen wir annehmen, dass die Wage die zwei ersten Eigenschaften einer guten Krämerwage schon besitze, nämlich dass $W = P$ und $P - W = 0$ sey; folglich ist der Ausschlag

$$x = \underbrace{\frac{p \cdot a \cdot y}{(2\,P + p)\, e + B \cdot b}}, \text{ oder } \frac{x}{y} = \frac{p \cdot a}{(2\,P + p)\, e + B \cdot b}.$$

In dieser Gleichung ist offenbar $\frac{x}{y} = \frac{hf}{hc} = \text{tang. } \alpha$; das Produkt $p \cdot a = p \cdot ob$ ist das statische Moment des zugelegten Gewichtes p um die Achse c, das Produkt $(2\,P + p)\, e = (2\,P + p)\, co$ ist das statische Moment der in der Linie ab befindlichen Gewichte $2P + p$, und das Produkt $B \cdot b = B \cdot cp$ ist das statische Moment des Wagebalkens um die Achse c. Hieraus ist demnach ersichtlich, dass die Tangente des Winkels, um welchen die Zunge vom senkrechten Stande oder der Wagebalken vom horizontalen Stande abweicht, erhalten werde, wenn das Moment des zugelegten Gewichtes durch die Summe der Momente der Gewichte, mit welchen der Wagebalken belastet ist, und dem Momente des Wagebalkengewichtes dividirt wird.

§. 171.

Fig. 6. Tab. 8. Obgleich aus dieser Gleichung der Winkel, um welchen die Wage vom wagerechten Stande abweicht, sehr leicht berechnet werden kann, so lässt sich doch in praktischer Hinsicht die Genauigkeit der Wage leichter aus dem Ausschlage x oder hf als aus dem Winkel α beurtheilen.

Soll nun x oder der Ausschlag gross seyn, so muss dafür gesorgt werden, dass der Bruch $\frac{p \cdot a \cdot y}{(2P + p)e + B \cdot b}$ gross werde, folglich der Zähler gross und der Nenner klein sey. In dieser Hinsicht erfolgt ein grosser Ausschlag, wenn

1tens. p oder das Zulagsgewicht gross ist. Nachdem es aber in der Bedingniss unserer Aufgabe liegt, dass ein kleines p einen grossen Ausschlag geben soll, so kann hieraus nichts weiter geschlossen werden, als dass überhaupt grössere Zulagsgewichte einen grössern, kleinere Zulagsgewichte einen kleinern Ausschlag geben.

2tens. Der Ausschlag ist gross, wenn a oder der Wagebalken-Arm lang ist. Desshalb gibt ein Wagebalken mit längern Armen bei demselben Zulagsgewichte einen bedeutendern Ausschlag, als ein Wagebalken mit kürzern Armen.

3tens. Wenn y oder die Höhe des horizontalen Ausschlages hf über der Achse c oder die Länge der Zunge cf gross ist. Diess folgt schon daraus, weil überhaupt für denselben Winkel die Länge des Bogens gf, folglich auch der Sinus hf um so grösser ausfällt, je länger der Radius oder die Zunge cf gemacht wird.

4tens. Der Ausschlag ist ferner gross, wenn $2P + p$, oder die Summe der abzuwägenden Gewichte nicht gross ist. Man findet desshalb gewöhnlich, dass der Ausschlag hf, der von einem bestimmten Zulagsgewichte bewirkt wird, um so kleiner ausfällt, je grösser die Gewichte sind, die auf die Wagschalen gelegt werden. Wenn man z. B. auf jede Wagschale 1 ℔ legt, und den Ausschlag hf misst, der von einem zugelegten Lothe bewirkt wird, so wird gewöhnlich derselbe Ausschlag bedeutend kleiner, wenn zu dem Gewichte in jeder Wagschale noch 20 oder 50 ℔ zugelegt werden.

5tens. Der Ausschlag x wird auch gross, wenn e oder die Entfernung co der Achse von der Verbindungslinie ab der beiden Aufhängspunkte klein ist. Da die Linie ab sowohl unter, als auch über die Achse c gestellt werden kann, so kann auch der Fall eintreten, dass diese Linie durch die Achse selbst geht, in welchem Falle $e = 0$ und $\frac{x}{y} = \frac{p \cdot a}{B \cdot b}$ ist. Da nun a, B und b bei einer und derselben Wage immer einerlei Werthe haben, so ist, wenn zwei verschiedene Gewichte p und p′ zugelegt werden $\frac{x}{y} : \frac{x'}{y'} = p : p'$, d. h. die Tangente des Ausschlagswinkels $\left(\text{oder} \frac{x}{y} = \text{tang. } \alpha\right)$ ist genau bloss dem Zulagsgewichte p proportional; sie bleibt demnach dieselbe, es mögen grosse oder kleine Gewichte W und P gewogen werden. Diese Wage ist sodann die empfindlichste und gibt den grössten Ausschlag, weil derselbe vom Gewichte des Wagebalkens allein abhängt. Wenn man daher bei einer solchen Wage auf eine Wagschale z. B. zehn Gran $= p$ zulegt und findet, dass der Ausschlag eine Linie $= x$ beträgt, so kann man oben in der Linie hf eine Skale

anbringen und sie beiderseits in Linien theilen. Man kann nun mit dieser Wage, auch ohne dass die Wagebalken genau horizontal stehen, dennoch das genaue Gewicht des gewogenen Gegenstandes angeben, weil eine jede Abtheilung genau 10 Gran beträgt.

Eine so vollkommene Wage gelingt aber selten, indem gewöhnlich der Ausschlag für dasselbe Zulagsgewicht desto kleiner ist, je mehr man auf der Wage wiegt, und die Achsen bei mehrerem Gebrauche stumpf werden, so wie auch die Wagebalken bei grossen Gewichten sich biegen. Diese Eigenschaft kann daher nur bei solchen Wagen statt finden, wo verhältnissmässig wenig gewogen wird, wie bei Probierwagen.

6tens. Der Ausschlag wird noch gross, wenn B, d. h. das Gewicht des Wagebalkens klein ist. Dieses richtet sich aber wieder nach den zu wägenden Gewichten, denn macht man den Wagebalken schwach, damit er nicht viel wiege, und legt nun eine schwere Waare und anderseits ein eben so schweres Gewicht in die Schalen, so wird er an seinen zwei Enden heruntergebogen, wodurch e, d. h. die Entfernung des Schwerpunktes der aufgehängten Gewichte von der Achse gross wird, was der Empfindlichkeit (nach 5tens) nachtheilig ist. Der Wagebalken sey daher so leicht als möglich, jedoch so, dass die Arme noch im Stande sind, die Schwere der Waaren und Gewichte auszuhalten. Man macht desswegen die Breite und Höhe der Wagbalkenarme nicht gleich, sondern im Profil die Höhe grösser als die Breite. Ferner macht man sie an beiden Enden schwächer und in der Mitte stärker.

7tens. Endlich wird der Ausschlag gross, wenn b oder die Entfernung der Achse vom Schwerpunkte des Wagebalkens klein ist. Sie darf aber, wie wir schon aus §. 169 wissen, nicht = 0 oder gar einer negativen Grösse gleich, d. h. die Achse unter dem Schwerpunkte des Wagebalkens seyn; indessen richtet sich diese Grösse nach dem Grade der Empfindlichkeit, welchen man der Wage geben will.

§. 172.

Die vierte Eigenschaft einer Krämerwage ist: sie soll nicht träge, sondern leicht zu bewegen seyn; sie muss daher, sobald man ein kleines Gewicht auf der einen Seite mehr auflegt, sogleich auf dieser Seite herabsinken.

Die Trägheit entsteht meistens aus der Reibung. Wenn die Achsen stumpf oder abgerundet sind, so wird durch das Verwenden des Wagebalkens der Punkt o der Achse nach m verschoben, und beim Zurückgehen kommt der Punkt o wieder nach n u. s. w. Durch diese Bewegung auf der Fläche m o n entsteht Reibung, welche mit einem Widerstande verbunden ist, dessen Uiberwältigung eine Kraft erfordert. Weil dieser Widerstand die Bewegung hindert, d. h. jeder Bewegung, sie mag vor- oder rückwärts gehen, entgegen ist, so gibt sich die Reibung daraus zu erkennen, wenn die Zunge nicht immer am Ende der Schwingungen an denselben Punkt g zurückkehrt, sondern einmal bei f und das anderemal bei f' stehen bleibt. Es steht nämlich in diesem Falle der Widerstand, der durch die Reibung erzeugt wird, mit der Kraft, welche die Wage noch bis zu dem Punkte g zurücktreiben will, im Gleichgewichte; es können also in einem solchen Falle die beiderseitigen Gewichte einander vollkommen gleich

Fig. 7. Tab. 8.

Fig. 8.

seyn, und die Wage steht doch wegen der Reibung nicht horizontal; man verliert daher das Hauptkennzeichen der Gleichheit der Gewichte, nämlich den horizontalen Stand. Derselbe Fall würde auch vorhanden seyn, wenn die Achse des Wagebalkens an der Seite anstreifen möchte, und dort ebenfalls durch eine Reibung aufgehalten würde. Da, wie wir im V. Kapitel zeigen werden, der Widerstand der Reibung dem Drucke proportional ist, so wird auch die Trägheit einer Wage um so grösser, je schwerer die Gegenstände sind, welche auf derselben gewogen werden. In dieser Hinsicht kann eine Wage mit stumpfen Achsen bei kleinen Gewichten noch brauchbar seyn, bei grössern aber ihre Brauchbarkeit verlieren.

Ist die Achse einer Wage cylindrisch, so sieht man von selbst, dass man unter der Entfernung des Schwerpunktes der zwei Gewichte von der Achse nicht die
Fig. 9. Tab. 8. Entfernung desselben von der Auflage c, sondern von der Mitte der Achse a zu verstehen habe. Sollte daher nach §. 171 die Entfernung der Achse von der Aufhängslinie nicht = 0 seyn, so kann doch diese Aufhängslinie nicht nur unterhalb der Achse in d, sondern auch durch die Auflage c, oder sogar durch die Achse selbst in b gehen, so bleibt doch noch b = b c. Dasselbe findet statt, wenn die Achse nicht rund, son-
Fig. 10. dern auf irgend eine Art, wie a o n b gekrümmt ist. In diesem Falle kann man sich nämlich einen Berührungskreis m n o zu dem untersten Punkte o der Achse denken; es geschieht daher eigentlich die Umdrehung um den Mittelpunkt c desselben, von welchem man auch die Entfernung der Schwerpunkte zu rechnen hat.

Wenn nun diese Achsen auf horizontalen Flächen aufruhen, sonach bei ihrer Verwendung nur eine wälzende Bewegung und folglich keine Reibung eintreten kann, so finden bei einer solchen Wage doch alle übrigen bisher angeführten
Fig. 11. Sätze statt. Denn es sey z. B. der Schwerpunkt der zwei Gewichte zugleich in der horizontalen Linie a o b, worauf sich die Achse bewegt; wird nun gleich der Punkt o durch die Verwendung der Achse nach m versetzt, und die Zunge aus dem senkrechten Stande o g in den geneigten m h gebracht, so hat die Wage doch in dieser geneigten Lage d e ungleiche Hebelsarme, da f i kleiner als i n ist, obgleich in der ersten Lage a o = o b war; es findet daher in diesem Falle nur dann Gleichheit der Gewichte statt, wenn die Wage vollkommen horizontal steht, wie es bei einer jeden guten Wage nothwendig ist.

Ist aber die Pfanne oder Unterlage der Achse nicht horizontal, sondern hohl, d. h. nach irgend einer krummen Linie eingebogen, so kann aus dem horizontalen Stande der Wage noch nicht auf das Gleichgewicht geschlossen wer-
Fig. 12. den; denn wird die Achse durch irgend einen Umstand von o nach f verschoben, und das Zurückgehen desselben durch die Reibung in f verhindert, so wird der horizontale Stand a c b der Wage nur durch ungleiche Gewichte erhalten werden können. Da nämlich die Wage nicht nach der senkrechten Richtung durch c, sondern durch f unterstützt wird, so werden die Hebelsarme der Gewichte nicht mehr a c und b c, sondern a d und b d, mithin ungleich seyn, es wird daher bei a ein grösseres Gewicht als bei b nothwendig seyn. Wir wollen den Unterschied zwischen den beiderseitigen Gewichten = p setzen, so lässt sich dessen Grösse auf folgende Art bestimmen: Es sey der Halbmesser der Achse f c = r und jener der Pfanne f g = o g = R, wenn nämlich der

Bogen i o k ein Kreisbogen ist; ferner der Abstand $ch = h$ und die Hebelsarme $ac = bc = a$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke c d f und c h g Fig. 12. Tab. 8.

$cd : cf = ch : cg$ oder $cd : r = h : R - r$, woraus $cd = \frac{r \cdot h}{R - r}$.

Da nun wegen der Gleichheit der statischen Momente $(P + p)\,ad = P \cdot bd$ seyn muss und $ad = a - dc$, $bd = a + dc$ ist, so erhalten wir durch die Substitution $(P + p)\left(a - \frac{r \cdot h}{R - r}\right) = P\left(a + \frac{r \cdot h}{R - r}\right)$, woraus $p = \frac{2P \cdot r \cdot h}{(R - r)a - r \cdot h}$. Wenn nun $(R - r)a$ viel grösser als $r \cdot h$ ist, so fällt die zweite Grösse gegen die erste weg, und es bleibt $p = \frac{2P \cdot r \cdot h}{(R - r)a}$.

Beispiel. Es seyen die beiderseits aufliegenden Gewichte $2P = 9$ ℔, der Halbmesser der Achse $r = 1$ Linie und jener der Pfanne $R = 4$ Linien, die Länge der Wagebalkenarme $a = 6$ Zoll, endlich die Verrückung des Mittelpunktes der Achse $h = 1$ Linie, so ist $p = \frac{9 \cdot 32 \cdot 1 \cdot 1}{(4 - 1)6 \cdot 12} = 1\frac{1}{3}$ Loth, welche Grösse man daher in diesem Falle nicht erkennen wird.

Wird in dem obigen Ausdrucke der Halbmesser der Pfanne (R) unendlich gross angenommen, so ist die Unterlage als ein endlicher Theil eines unendlich grossen Kreises eine gerade Linie und es wird p unendlich klein oder $= 0$, da in dem hiefür berechneten Werthe $\frac{2P \cdot r \cdot h}{(R - r)a - r \cdot h}$ mit einer unendlich grossen Zahl dividirt wird; wenn daher die Unterlage der Achsen eine horizontale gerade Linie ist, so sind im horizontalen Stande der Wage die beiderseitigen Gewichte einander gleich $(W = P)$, wie wir schon oben bemerkten.

§. 173.

Die angeführten Nachtheile werden vermieden, wenn die beiden vorstehenden Ende der Achse nicht rund, sondern schneidig gemacht werden. Eine solche Achse gibt dann nur eine Berührungslinie, welche in jedem Stande sich nur auf derselben Spitze o drehen kann, und ausser dem Punkte o keine zweite Achse in c (Fig. 12) hat, wodurch also der vorher gerügte Anstand von selbst wegfällt. Fig. 13.

Die schneidigen Ende der Achsen müssen aber von beiden Seiten nur in einer und derselben geraden Linie liegen, weil sonst die Wage zwar zu demselben Punkte zurückkehren, aber bei der Verwendung ungleiche Arme erhalten würde. Stellt nämlich a b die Ansicht des Wagebalkens von oben und d e f g die untere Linie der Schneide vor, welche nicht eine und dieselbe gerade Linie ausmacht, so wird sich offenbar die Wage einmal um die Linie e f, das anderemal um die Linie d g drehen, und daher im ersten Falle der Arm b m, im zweiten a n um m n länger werden, als der andere. Eine solche Wage wird aber nebstdem noch den Fehler haben, dass sie Fig. 14.

Fig. 14. Tab. 8. durch kleine Gewichte gar nicht aus ihrer Lage gebracht wird, da sie auf der ganzen Fläche defg ruht. Der Fehler, welcher hieraus entsteht, lässt sich auf folgende Art berechnen:

Liegt die Wage horizontal, so ist c der Unterstützungspunkt, und die Gewichte P und W sind im Gleichgewichte, folglich, da $ac = cb$ angenommen wird, auch $P = W$. Wird die Wage bei a herabgedrückt, so dreht sie sich um die Linie ef; es sey nun das Gewicht, welches in dieser Lage Gleichgewicht bewirkt $= P'$, so ist $P'.am = W.bm$ und $P' = W.\frac{bm}{am}$. Wird von dieser Gleichung die obere $P = W$ abgezogen, so ergibt sich

$$P' - P = W \cdot \frac{bm}{am} - W = W\left(\frac{bm - am}{am}\right) = W\left(\frac{bc + cm - ac + cn}{am}\right).$$

Da aber der Hebelsarm $bc = ac$ ist, so wird

$$P' - P = W\left(\frac{cm + cn}{am}\right) = W \cdot \frac{mn}{am}.$$

Es wird demnach der Fehler, den die breite Achse mn verursacht, desto grösser, je breiter dieselbe, je grösser das abgewogene Gewicht W, und je kleiner die Länge des Wagebalkenarmes am ist.

§. 174.

Man vermeidet den Fehler, welcher bei Wagen aus einer krummen Achse entstehen kann, indem man die Schneiden der Achse in zwei Spitzen verwandelt, welche von Stahl seyn und die Glashärte erhalten müssen. Damit aber auch die Unterlage nicht angegriffen werde, so stellt man diese Spitzen auf Lager von Edelsteinen, Diamant oder Rubin. Weil nunmehr jede Spitze nur einen Punkt bildet, und von einem Punkte zum andern nur eine und dieselbe gerade Linie gezogen werden kann, so bleibt die Linie der Auflage unveränderlich.

Der Winkel der Spitzen o (Fig. 13) richtet sich nach der Grösse der Wage und der abzuwägenden Gewichte. Sind diese klein, so kann es auch der Winkel seyn; bei grossen und schweren Wagen pflegt man ihn = 90 Grad zu machen. Dasselbe geschieht, wenn man sich schneidiger Achsen bedient; damit sich nämlich die Schneide nicht umbiege, darf der Winkel, den beide Seitenflächen an der Spitze einschliessen, nicht viel kleiner als ein rechter seyn; derselbe erhält meistens 60 Grade, bei feinen Probierwagen auch weniger.

Aus demselben Grunde werden oft die schneidigen Achsen in schneidige Ringe gehängt, welche, weil die schneidigen Linien mitsammen einen rechten Winkel machen, einander nur in einem Punkte berühren können, und daher die Stelle von Spitzen ersetzen; dasselbe findet sowohl bei der Achse unterhalb der Zunge, als auch bei den beiderseitigen Aufhängspunkten der Wagschalen statt.

§. 175.

Ein Kennzeichen der Beschaffenheit einer Wage sind auch die Spielungs- oder Schwingungszeiten.

Es sey das statische Moment des Wagebalkens $= B.b$, das mechanische oder Trägheitsmoment $= B.f^2$, so sind die Spielungszeiten der Wage so gross, als die eines Pendels, dessen Länge $= \frac{B.f^2 + 2P(a^2 + e^2)}{B.b + 2P.e}$, wie bei der Theorie der Bewegung um Achsen gezeigt werden wird.

Wenn demnach $B.b$ und $2P.e$ sehr klein sind, wie wir bereits (§. 171) wissen, dass es die Empfindlichkeit fordert, so wird das Pendel und mithin auch die Schwingungszeit länger. Empfindliche Wagen schwingen demnach immer sehr langsam, weil sie kleinere statische Momente haben.

Wenn $P.e = 0$, oder wenn die Linie durch die Aufhängspunkte zugleich durch die Achse geht, so ist die Pendellänge $= \frac{B.f^2 + 2P.a^2}{B.b}$, demnach grösser als im obigen Falle; die Wage spielt also langsamer, wenn Gewichte abgewogen werden, als ohne Gewichten.

Wenn $B.b = 0$ oder wenn $B.b$ gegen $2P.e$ und $B.f^2$ gegen $2P.a^2$ sehr klein ist, welches statt findet, wenn der Wagebalken nicht schwer oder wenn seine Schwere sich grösstentheils in der Nähe der Achsen befindet, so bleibt die Pendellänge $= \frac{2P(a^2 + e^2)}{2P.e} = \frac{a^2}{e}$ beinahe; demnach sind die Spielungszeiten bei grossen Gewichten unabänderlich und ihre Dauer, die sich immer wie die Quadratwurzel der Pendellänge verhält, ist um so grösser, je länger der Arm des Wagebalkens a und je kleiner die Entfernung (e) der Achse von der Linie durch die Aufhängspunkte gemacht wird.

Aus diesem ergibt sich, dass die Forderungen, es solle eine Wage sehr empfindlich seyn und zugleich auch kurze Schwingungszeiten haben, einander entgegen stehen. Die Empfindlichkeit fordert nämlich, dass $B.b$ und $2P.e$ sehr klein sey, dieselbe Grösse befindet sich aber bei der Pendellänge im Divisor, sie gibt daher eine grosse Pendellänge, und es muss sonach auch die Schwingungszeit einer empfindlichen Wage gross seyn. Man kann demnach aus der blossen Ansicht einer Wage, welche in kurzen Zeiten hin und herspielt, sogleich schliessen, dass sie keine grosse Empfindlichkeit haben könne.

§. 176.

Aus der oben §. 170 für den Ausschlag gefundenen Formel $x = \frac{p.a.y}{(2P + p)e + B.b}$ lässt sich immer eine Grösse oder das Verhältniss zweier Grössen zu einander berechnen, wenn die übrigen gegeben sind.

1tes Beispiel. Man soll die Dimensionen zur Verfertigung einer Wage angeben, auf der man höchstens 2 ℔ wiegt, und die hiebei einen Ausschlag von 1 Linie auf 1 Gran gibt.

Hier sind offenbar bloss die drei Grössen $x = 1'''$, $p = 1$ Gran $= \frac{1}{240}$ Loth und $2P = 2$ ℔ $= 64$ Loth gegeben. Wenn e oder die Entfernung der Achse von den Aufhängspunkten $= 0$ ist, so bleibt $x = \frac{p.a.y}{B.b}$ oder $1''' = \frac{1.a.y}{B.b}$, sonach ist die Entfer-

nung des Schwerpunktes des Wagebalkens von der Achse, $b = \frac{a.y}{B}$. Nun sey a die Länge eines Armes = 6 Zoll = 72 Linien, y die Entfernung bis zur horizontalen Skale = 5 Zoll = 60 Linien, und B das Gewicht des Wagebalkens = ¼ ℔ = $\frac{32.240}{4}$ Gran, so ist $b = \frac{72.60}{8.240} = 2\frac{1}{4}$ Linien. Soll daher diese Wage auf 1 Gran Zulage 1 Linie Ausschlag geben, so muss bei den angenommenen Dimensionen die Entfernung des Schwerpunktes des Wagebalkens von der Achse nur 2¼ Linien betragen.

2tes. Beispiel. Es sey an einer Wage a = 9 Zoll, y = 6 Zoll, b = ½ Zoll, B = 16 Loth, e = ¼ Zoll und P = W = 10 ℔, wie viel wird man hiebei zulegen müssen, damit der Ausschlag 1 Zoll betrage?

Da in diesem Falle p unbekannt ist, so muss man es aus der obigen Formel suchen und es ist $p = \frac{2P.e.x + B.b.x}{a.y - e.x}$ oder durch Substitution der gegebenen Grössen

$$p = \frac{20.32.\frac{1}{4}.1 + 16.\frac{1}{2}.1}{9.6 - \frac{1}{4}.1} = \frac{672}{215} = 3{,}126 \text{ Loth.}$$

§. 177.

Es kommt manchmal der Fall vor, dass man bei der Abwägung einer Waare nicht so kleine Gewichte hat, um das Gleichgewicht herzustellen; es frägt sich nun, zu berechnen, wie viel der Unterschied des Ausschlags x im Gewichte betrage?

Wenn man eine Waare W durch das Gewicht P abwiegt und die Wage bleibt in der schiefen Lage a b stehen, so ist offenbar W schwerer als P oder allgemein W = P + p, wo p den Unterschied beider Gewichte (W — P) ausdrückt. Man lege nun p′ oder das kleinste Gewicht, das man hat, in die Wagschale zu P, und hiedurch komme die Wage in die Lage e d, so ist offenbar wieder die Waare leichter als P + p′; man müsste demnach, wenn die Wage genau einspielen soll, ein kleineres Gewicht als p′ zulegen; da man diess aber nicht hat, so kann es auf folgende Art aus dem Ausschlage berechnet werden:

Fig. 15. Tab. 8.

Zieht man nämlich die Horizontale m o, so gibt der Punkt m den Stand der Zunge im ersten und o im zweiten Falle. Im ersten Falle war W = P + p, demnach die Summe der beiderseits aufgelegten Gewichte = W + P = 2P + p. Substituiren wir nun in die §. 170 für den Ausschlag gefundene allgemeine Formel, so ist $m\,n = \frac{p.a\,y}{(2\,P + p)\,e + B.b}$. Im zweiten Falle wurde der Ausschlag n o durch die Differenz der Gewichte p′ — p hervorgebracht, folglich ist $n\,o = \frac{(p' - p)\,a.y}{(2P + p + p')\,e + B.b}$.

Macht man aus diesen zwei Gleichungen eine Proportion, so kann man ohne Anstand die Nenner gleich setzen, da das Zulagsgewicht p′ ohnehin nicht viel beträgt, und es ist m n : n o = p : p′ — p, oder wenn man das erste und zweite Glied addirt, m n + n o : m n = p′ : p,

woraus das zu findende Gewicht $p = \frac{m\,n}{m\,o} \cdot p'$, und daher das wirkliche Gewicht der Waare, $W = P + p = P + \frac{m\,n}{m\,o} \cdot p'$.

In der Ausübung macht man an der Zunge der Wage eine horizontale Skale, die in eine beliebige Anzahl gleicher Abtheilungen eingetheilt ist, und verfährt damit folgendermassen:

Beispiel. Man fände das Gewicht einer Waare, P = 3 ℔, hiebei aber bliebe die Zunge in m stehen, von wo bis zur Einspielung in n fünf Abtheilungen fehlen. Hierauf legt man ein Gewicht z. B. p' = 1 Loth zu, wodurch nicht nur p gezogen wird, sondern auch die Zunge bis auf m o = 16 Theile hinübergeht. Man hat daher die Proportion: 16 Theile (= m o) geben 1 Loth (= p'), folglich werden 5 Theile (= m n) $\frac{5}{16}$ Loth (= p) geben; es ist daher das gesuchte Gewicht der Waare, W = 3 ℔ + $\frac{5}{16}$ Loth = 3 ℔ 1¼ Quintel.

Durch solche Wagen war man im Stande, kleine Gewichte bis auf $\frac{1}{100}$ Gran und noch genauer zu wägen, wie man öfters in physikalischen Schriften angeführt findet. Diese Einrichtung ist daher überhaupt bei allen genauen Wagen zu empfehlen, indem es z. B. bei Probierwagen, wie wir schon oben bemerkten, gewöhnlich sehr lange dauert, bis sie genau einspielen. Die Skale selbst ist entweder an der Zunge oben oder unterhalb des Wagebalkens horizontal, oder auch an beiden Enden des Wagebalkens, wo man dann Spitzen anbringt, senkrecht aufgestellt.

§. 178.

Bei der Verfertigung einer Wage hat man vorzüglich dafür zu sorgen, dass sowohl der Wagebalken für sich im Gleichgewichte stehe, folglich die Momente der beiden Arme an und für sich einander gleich sind, als auch dass die Entfernung der Aufhängspunkte von der Achse beiderseits gleich sey. Da eine Verrückung oder Zurichtung der Aufhängsachsen zugleich die Momente der beiden Arme des Wagebalkens und daher ihr Gleichgewicht verändert, so pflegen sich die Künstler zuerst um die gleichen Gewichte der Arme des Wagebalkens wenig zu bekümmern und diese bloss durch Ankleben eines Stückchen Wachses, oder durch Verschieben eines blechernen Ringes auf dem Wagebalken u. dgl. zu bewirken, dafür aber zuerst die gleiche Entfernung der Aufhängspunkte herzustellen. Dieses wird bewirkt, indem man sich vorher nach der Anleitung, welche hierüber §. 167. gegeben wurde, zwei vollkommen gleiche Gewichte verschafft.

Ist dieses geschehen, so wird der Wagebalken bloss für sich durch Zulegung eines Stück Wachses oder andern Körpers ins Gleichgewicht gestellt. Dann werden die zwei gleichen Gewichte angehängt und nachgesehen, ob die Arme einspielen oder von welcher Seite eine Uiberwucht vorhanden sey. Da man schon vorläufig die Entfernung der Achse von den Aufhängspunkten beinahe gleich gemacht hat, so wird die noch nöthige grössere Gleichheit bloss durch Zurichten dieser Achsen bewirkt. Wenn sich hiebei die Gleichheit der Momente des Wagebalkens ändert, so wird dieses abermals durch

ein wenig Wachs, welches man auf dem zu leichten Arme anklebt, hergestellt, und neuerdings durch Anhängen der zwei gleichen Gewichte versucht, ob die Hebelsarme einander gleich sind. Dieses wird so oft wiederholt, bis die Gleichheit der Arme hergestellt ist.

Nachdem endlich dieses bewirkt ist, so wird noch, ohne die Achsen zu verrücken, von den zu schweren Armen so viel abgefeilt, bis auch diese im Gleichgewichte sind. Es versteht sich von selbst, dass man ebenfalls die Wagschalen, deren man sich bedienen will, auf gleiche Art wie die Gewichte, vor ihrem Gebrauche erst adjustiren oder ausgleichen müsse.

In Bezug auf die Empfindlichkeit der Wage ist noch zu bemerken, dass der Schwerpunkt des Wagebalkens nothwendig unter den Schwerpunkt der Achse gebracht werden müsse, damit der Wagebalken sich selbst in die horizontale Lage stelle. Die Wagschalen sind bloss als Gewichte anzusehen und können hiebei in keine Betrachtung kommen, d. h. die Adjustirung des Wagebalkens muss für sich allein (ohne die Wagschalen anzuhängen) geschehen.

Für die Empfindlichkeit selbst ist gewöhnlich der Grad vorgeschrieben. Z. B. Man soll bei einer Wage, worauf Lasten bis zu 20 ℔ gewogen werden, noch ein Quintel oder den 2560ten Theil sehen. Man muss daher diese Gewichte aufhängen und nachsehen, ob durch die Zulage von 1 Quintel ein hinreichender Ausschlag erfolge. Ist diess nicht der Fall, so müssen die Aufhängspunkte erhöht oder der Achse genähert werden. Wenn im Gegentheile der Ausschlag zu gross wäre, so würde diese zu grosse Empfindlichkeit die Schnelligkeit des Abwägens hindern, man muss daher die Aufhängspunkte erniedrigen. Das leztere findet auch dann statt, wenn eine Wage zwar für sich allein im Gleichgewichte steht, jedoch bei grössern Auflagsgewichten überschlägt.

Bei einer Probierwage, wo die grösste Genauigkeit erfordert wird, muss man über den Umstand der langsamen Spielungen hinausgehen, demnach die Linie der Aufhängspunkte der Achse möglichst nahe bringen, jedoch dafür sorgen, dass die Wage bei einer Vermehrung der Gewichte ebenfalls nicht umschlage.

§. 179.

Die Probierwage unterscheidet sich von der gewöhnlichen Krämerwage nur durch die grössere Genauigkeit in ihrer Bauart. Da auf derselben nur kleine Gewichte gewogen werden, so hat sie sehr leichte Wagebalken, um sie desto empfindlicher zu machen. Fig. 16 bis 23. Tab. 8. Die Fig. 16 bis 22 enthalten die Darstellung einer, an dem technischen Institute in Prag für den Gebrauch bei chemischen Untersuchungen verfertigten Probierwage. Auf diese Wage werden höchstens Gewichte von 1 ℔ in jede Wagschale gelegt, wobei ihre Genauigkeit bis auf $\frac{1}{50}$ Gran geht, welches von den beiden aufgelegten Gewichten der 768000te Theil ist. Fig. 16 zeigt die vordere Ansicht, Fig. 17 die Seitenansicht derselben und Fig. 18 den Grundriss. Der Wagebalken ist aus zwei stählernen Uhrfedern verfertigt, wovon eine horizontal, die andere vertikal steht, und beide mitsammen durch Niten verbunden sind. Die Gestalt der obern horizontalen Platte ist aus Fig. 18 und jene der untern vertikalen Platte aus Fig. 16 ersichtlich. Die Länge eines Wagebalkenarmes oder die Entfernung

(a) der Achse von den Aufhängspunkten beträgt 11 Zoll 3,5 Linien = 135,5‴, demnach die Länge 2 a = 22″ 7‴. Der Wagebalken ist in der Mitte 15 Linien, an beiden Enden 5 Linien hoch. Das Gewicht des ganzen Wagebalkens mit Einschluss der Zunge und der Achsen beträgt 10 Loth 3 Quintel 17 Gran = 2597 Gran. Die Länge oder Höhe der Zunge über der Achse beträgt y = 9 Zoll 11 Linien = 119 Linien. Die Verbindung der Achse mit dem Wagebalken und der Zunge ist im Grundrisse Fig. 21, in der Längenansicht Fig. 22 und im Querdurchschnitte Fig. 23, im vierfachen Maasse zu sehen; Fig. 19 und 20 stellt das Ende des Wagebalkens und den Eingriff des Hakens, an welchen die Schale aufgehängt wird, ebenfalls im vierfachen Maasse vor.

Die horizontale Skale hinter dem obern Ende der Zunge ist 2 Zoll 2 Linien lang und in 50 gleiche Theile abgetheilt; eine Abtheilung hält demnach 0,52 Linien. Das Gewicht einer jeden Wagschale sammt Haken ist 3 Loth 3 Quintel 25 Gran = 925 Gran; die Wage trägt demnach an den leeren Wagschalen ein Gewicht von 1850 Gran.

Wenn die Wage nicht gebraucht wird, so liegen beide Arme auf zwei hölzernen ausgepolsterten Unterlagen A und B, um die Achse nicht unnütz mit dem Gewichte des Wagebalkens zu beschweren; zu gleicher Zeit sitzen auch die Schalen unten auf. Bei dem Gebrauche wird sie durch folgenden Mechanismus aufgezogen; eine Schraube ohne Ende b͡c greift in das gezähnte Rad c d, um dessen Welle sich eine Schnur e e e durch die Umdrehung der Kurbel a b aufwindet, und hiedurch das stählerne Gehänge f f f f in die Höhe zieht. Dieses Gehänge trägt die Unterlagen g g für die Achsen h h; es wird daher die Wage auf ihren Achsen ruhend aufgezogen, und nun mit derselben abgewogen. Fig. 17 und 23. Tab. 8.

Die ganze Wage ist in einem Kasten von drei Seiten mit Gläsern, die sich ausheben lassen, eingeschlossen; bei dem Gebrauche derselben wird dasjenige Glas ausgehoben, wo man ein Gewicht zulegen will, worauf die Wage wieder geschlossen und die Spielungen so lange abgewartet werden, bis sie nicht mehr als höchstens eine Abtheilung betragen.

Mit dieser Wage wurden am 19ten und 20ten August 1830 folgende Versuche mit aller möglichen Genauigkeit vorgenommen:

Zuerst wurde in eine Wagschale e i n h a l b e r G r a n gelegt, während die andere Wagschale leer blieb, und die Zunge gab, nachdem die Wage in Ruhe kam, einen Ausschlag von 22 Abtheilungen. Nun wurde der halbe Gran aus der ersten Wagschale herausgenommen und in die andere gelegt, wobei der Ausschlag 24 Abtheilungen betrug. Das Mittel aus beiden Versuchen gab sonach 23 Abtheilungen; die Zeit einer Schwingung (Spielung) betrug 10 Sekunden. Da die leere Wagschale als ein angehängtes Gewicht zu betrachten ist, und jede derselben 925 Gran wiegt, so beträgt bei diesem Versuche 2 P = 2 . 925 = 1850 Gran und p = 0,5 Gran.

Bei dem zweiten Versuche wurden in eine jede Wagschale 4 Loth = 960 Gran oder in beide 1920 Gran gelegt, wornach die Summe der angehängten Gewichte 2 P = 1920 + 1850 = 3770 Gran betrug. Dann wurde abermals ½ Gran = p in eine Wagschale zugelegt, und der Ausschlag betrug, nachdem die Wage in Ruhe kam, 19 Abtheilungen und als diess Gewicht in die andere Wagschale gelegt wurde 19½ Ab-

theilungen. Das Mittel von beiden gibt 19¼ Abtheilungen; die Zeit einer Schwingung war 12^Sec.^. In nachstehender Tabelle sind sowohl diese zwei, als noch drei andere mit dieser Wage vorgenommene Versuche zusammengestellt:

Nro. der Versuche.	Gewicht beider Wagschalen.	Aufgelegtes Gewicht in beide Wagschalen.	Summe beider oder 2 P.	Zulagsgewicht auf einer Seite oder p.	Ausschlag x: Auf einer Seite (Abtheilungen)	Auf der andern Seite (Abtheilungen)	Im Mittel (Abtheilungen)	Zeit einer Schwingung.
I	1850 Gran	0	1850 Gran	0,5 Gran	22	24	23	10 Sec.
II	1850 Gran	1920 Gran	3770 Gran	0,5 Gran	19	19,5	19,25	12 Sec.
III	1850 Gran	3840 Gran	5690 Gran	0,5 Gran	16	17	16,5	13,5 Sec.
IV	1850 Gran	5760 Gran	7610 Gran	0,5 Gran	15	14	14,5	15 Sec.
V	1850 Gran	7680 Gran	9530 Gran	0,5 Gran	12,5	13	12,75	16 Sec.

Aus diesen Versuchen wurde der Abstand (b) der Achse vom Schwerpunkte des Wagebalkens und derselbe Abstand von der Linie durch die Aufhängspunkte oder e mittelst der §. 170 für den Ausschlag gefundenen Gleichung $\frac{x}{y} = \frac{p \, . \, a}{(2\,P + p)\,e + B \, . \, b}$ oder $p \, . \, a \cdot \frac{y}{x} = (2\,P + p)\,e + B \, . \, b$ berechnet. Nach den Abmessungen der Wage ist $a = 135{,}5$ Linien und die Höhe der Skale $y = 119$ Linien. Werden diese und die bei den Versuchen gefundenen Werthe in der vorstehenden Gleichung substituirt, so erhalten wir aus den fünf Versuchen folgende fünf Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2} \, . \, 135{,}5 \cdot \frac{119}{23 \, . \, 0{,}52} = 1850{,}5 \, . \, e + 2597 \, . \, b \quad \text{(I).}$$

$$\tfrac{1}{2} \, . \, 135{,}5 \cdot \frac{119}{19{,}25 \, . \, 0{,}52} = 3770{,}5 \, . \, e + 2597 \, . \, b \quad \text{(II).}$$

$$\tfrac{1}{2} \, . \, 135{,}5 \cdot \frac{119}{16{,}5 \, . \, 0{,}52} = 5690{,}5 \, . \, e + 2597 \, . \, b \quad \text{(III).}$$

$$\tfrac{1}{2} \, . \, 135{,}5 \cdot \frac{119}{14{,}5 \, . \, 0{,}52} = 7610{,}5 \, . \, e + 2597 \, . \, b \quad \text{(IV).}$$

$$\tfrac{1}{2} \, . \, 135{,}5 \cdot \frac{119}{12{,}75 \, . \, 0{,}52} = 9530{,}5 \, . \, e + 2597 \, . \, b \quad \text{(V).}$$

Zieht man die Gleichung I von IV ab, so bleibt

$$5760 \,.\, e = \tfrac{1}{2} \,.\, 135{,}5 \,.\, \frac{119}{0{,}52}\left(\frac{1}{14{,}5} - \frac{1}{23}\right) = 395{,}163.$$ Subtrahirt man ferner die Gleichung II von V, so ist $$5760 \,.\, e = \tfrac{1}{2} \,.\, 135{,}5 \,\frac{119}{0{,}52}\left(\frac{1}{12{,}75} - \frac{1}{19{,}25}\right) = 410{,}606.$$ Aus beiden Gleichungen gibt das Mittel $5760 \,.\, e = 402{,}885$, folglich sehr nahe $e = 0{,}07$ Linien. Substituirt man diesen Werth in die obigen fünf Gleichungen und addirt sie, so folgt $b = 0{,}209$ Linien.

Aus diesen zwei Werthen lassen sich nun die Versuche selbst berechnen; wir haben nämlich bei dem I^ten Versuche

$$x = \frac{p \,.\, a \,.\, y}{(2\,P + p)\, e + B \,.\, b} = \frac{\tfrac{1}{2} \,.\, 135{,}5 \,.\, 119}{1850{,}5 \,.\, 0{,}70 + 2597 \,.\, 0{,}209} = 11{,}99 \text{ Linien} = 23{,}06 \text{ Abtheilungen},$$ wogegen der Ausschlag 23 Abtheilungen betrug. Auf gleiche Art ergeben sich für den II^ten Fall aus der Rechnung 19,22 Abthl., wogegen bei dem Versuche 19,25 waren

— III^ten	— — —	16,51	— — — — —	16,5 —
— IV^ten	— — —	14,42	— — — — —	14,5 —
— V^ten	— — —	12,81	— — — — —	12,75 —.

Aus dieser Uibereinstimmung der Berechnung mit den Versuchen ist zu ersehen, dass der Ausschlag x wirklich nur durch die für die Empfindlichkeit (§. 170) gefundene Formel bestimmt werde. Hieraus folgt ferner:

1tens. Dass die Unterschiede der Rechnung und der Erfahrung so wenig betragen, dass der Werth von $e = 0{,}07$ Linien, welcher diesen Rechnungen zum Grunde liegt, nicht um 0,01 Linie abweichen könne. Berechnet man nämlich diesen Werth aus allen fünf Versuchen, so ergibt sich kein Unterschied, der $= 0{,}01'''$ wäre; es muss sich daher auch die Verbindungslinie der beiden Achsen während den Versuchen durch die Auflegung von Gewichten um weniger als $0{,}01'''$ geändert haben.

2tens. Da die Reibung die Bewegung von beiden Seiten hindert, sonach den Ausschlag von der einen Seite um eben so viel vermindert, als von der andern Seite vergrössert, so hat man die Versuche immer von beiden Seiten wiederholt, und aus beiden Abständen das Mittel genommen, wodurch also die Wirkung der Reibung ganz aus der Rechnung entfallen ist; da ferner der grösste Unterschied zwischen der Rechnung und der Erfahrung nur 0,08 einer Abtheilung oder 0,04 Linie beträgt, so kann man über die vorhandenen Unterschiede um so mehr hinausgehen, als dieselben theils positiv, theils negativ vorkommen, und sich in der Summe gegen einander aufheben.

3tens. Die Höhe des Wagebalkens, welche in seiner Mitte 15 Linien beträgt, war vollkommen hinreichend, um jede Wirkung von einer Biegung zu beseitigen, weil sonst die Grösse e bei schwerern Gewichten eine grössere und bei kleinern Gewichten eine kleinere Wirkung hätte zeigen müssen.

Uiberhaupt ist die Empfindlichkeit dieser Wage aus der Gleichung

$$x = \frac{p \,.\, 135{,}5 \,.\, 119}{(2\,P + p)\, 0{,}07 + 2597 \,.\, 0{,}209}$$ ersichtlich. Sind nämlich die Gewichte $2\,P + p$ sehr

klein, so ist $x = \frac{p \cdot 135{,}5 \cdot 119}{2597 \cdot 0{,}209} = 29{,}7\, p$; wenn daher $p = 1$ Gran ist, so wird der Ausschlag 29,7 Linien betragen. Sind jedoch die Gewichte 2 P gross, z. B. = 2 ℔ = 2 . 32 . 240 Gran, so beträgt der sich ergebende Ausschlag, von $p = 1$ Gran

$$x = \frac{1 \cdot 135{,}5 \cdot 119}{(2 \cdot 32 \cdot 240 + 1)\, 0{,}07 + 2597 \cdot 0{,}209} = 9{,}97 \text{ Linien.}$$

Da man nun an der Skale ⅕ Linie noch sehr wohl unterscheiden kann, so wird die Empfindlichkeit dieser Wage, wenn auf beiden Seiten 2 ℔ = 2 P gewogen werden, noch bis zu $\frac{1}{50}$ Gran oder bis zu dem 768000^{ten} Theil der aufgelegten Gewichte bemerkbar seyn.

Eine grössere Genauigkeit und eine noch grössere Empfindlichkeit würde diese Wage erhalten haben, wenn die Entfernung $e = 0{,}07$ Linien hätte beseitigt werden können, und auf solche Art die Empfindlichkeit nur von dem Gewichte des Wagebalkens allein abhängig gemacht worden wäre. Man hat aber diesen Gegenstand nicht so wichtig gefunden, um hierauf noch die hiezu erforderliche Zeit des Künstlers zu verwenden.

§. 180.

Fig. 1. Tab. 9. Die S c h n e l l w a g e besteht aus einem Hebel a c b, dessen Arme a c und c b von ungleicher Länge sind. An dem kürzern wird die Waare W, welche gewogen werden soll, an dem längern Arme aber ein bestimmtes unveränderliches Gewicht P angehängt; das letztere, welches man L a u f g e w i c h t nennt, wird bei dem Abwägen von der Achse so weit hinausgeschoben, bis der Wagebalken horizontal steht, und Gleichgewicht erfolgt. Weil man bei dieser Wage nur ein einziges Gewicht braucht, folglich den Stand des Gleichgewichtes schneller erfahren kann, als es bei einer Krämerwage durch Zulage und Wegnahme der Schalengewichte der Fall ist, so heisst sie S c h n e l l w a g e, und weil sie bei den Römern sehr im Gebrauche war, auch die R ö m i s c h e W a g e. Man bedient sich derselben jedoch bei uns meistentheils nur z u m A b w ä g e n g r o s s e r L a s t e n, wo sie also den Vortheil gewährt, dass man die vielen Gewichte, welche bei einer Krämerwage eben so gross als die Waare seyn müssen, erspart.

Da der längere Hebelsarm dieser Wage, wenn grosse Lasten z. B. beladene Wägen gewogen werden sollen, 12 bis 15 Fuss und auch mehr beträgt, folglich auch das Laufgewicht von der Achse der Wage so weit verschoben wird, so wäre es schwierig und unbequem, den horizontalen Stand durch eine über der Achse befestigte Zunge zu erkennen, indem man fortwährend das Laufgewicht verrücken, sodann wieder zur Zunge zurückkehren und dort nachsehen müsste. Man lässt daher bei grossen Schnellwagen die Zunge über der Achse weg, und befestigt auf dem Laufgewichte eine S c h r o t - o d e r S e t z - w a g e, welche sammt dem Laufgewichte bei dem Abwägen hin- und hergeschoben wird. Diese Schrotwage m o n ruht auf zwei Rollen, die ihr zugleich die Eigenschaft
Fig. 9. der leichten Beweglichkeit geben. Von dem Punkte o hängt ein Loth o p herab, welches durch sein Einspielen in den bezeichneten Punkt zu erkennen gibt, ob der Wagebalken horizontal steht.

§. 181.

Aus der vorstehenden Erklärung ergeben sich d i e n o t h w e n d i g e n E i g e n s c h a f t e n e i n e r g u t e n S c h n e l l w a g e. Sie muss erstens das Gleichgewicht durch ihren

wagerechten Stand anzeigen. Hiezu ist nöthig, dass, wie bei einer Krämerwage, die Linie, welche vom Aufhängspunkte des Laufgewichtes zu jenem der Waare gezogen wird, unterhalb der Achse liege; die Ursache hievon erscheint §. 169. bei der Krämerwage.

Es frägt sich nunmehr zweitens um ihre Eintheilung. Wir wollen zu diesem Behufe annehmen, dass die Wagschale (S) sammt den, allenfalls zum Abwägen grösserer Gegenstände daran befestigten Ketten, so schwer sey, dass sie dem Gewichte B des Wagebalkens, dessen Schwerpunkt in e ist, und dem im Punkte d hängenden Laufgewichte P Gleichgewicht halte; es werden demnach die beiderseitigen Momente einander gleich seyn müssen, oder $S.ac = P.cd + B.ce$ (I). Fig. 2. Tab. 9.

Wird nun auf die Wagschale eine Waare W gelegt, oder an die in a befestigten Ketten angehängt, so muss, wenn wieder der horizontale Stand der Wage hergestellt werden soll, das Laufgewicht einen grössern Hebel erhalten und z. B. bis f verschoben werden; wir haben daher abermals $(W + S)\,ac = P.cf + B.ce$ (II). Wird nun die Gleichung I von II abgezogen, so bleibt $W.ac = P\,(cf - cd) = P.df$, und wenn diese Gleichung in eine Proportion aufgelöst wird, so ist $W : P = df : ac$ (III).

Hätte man für eine andere Last W' das Laufgewicht P bis g verschieben müssen, so würde wie oben $(W' + S)\,ac = P.cg + B.ce$ seyn, und zieht man hievon abermals die Gleichung I ab, so ist $W'.ac = P.dg$, woraus wieder $W' : P = dg.ac$ folgt (IV). Aus den zwei Proportionen III und IV ergibt sich nunmehr $W : W' = df : dg$ (V) d. h. die Räume auf der Skale, nämlich d f und d g, sind den abzuwägenden Gewichten W und W' proportional.

Die Eintheilung der Wage lässt sich nunmehr aus der Proportion III herleiten; denn verwechselt man die innern Glieder, so verhält sich $W : df = P : ac$. Theilt man sonach ac in eben so viele gleiche Theile, als P Pfunde hat, so muss man df in eben solche Theile eintheilen, und es wird ein jeder Theil genau 1 ℔ andeuten. Wenn in einem andern Falle die Eintheilung von df für Pfunde bereits gemacht ist, so muss das Laufgewicht P so viele Pfunde erhalten, als ac gleiche Theile wie df enthält. Dieselben Regeln gelten, wenn die Eintheilung nicht auf einzelne Pfunde, sondern z. B. von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Pfunden geht.

§. 182.

Bei den gewöhnlichen Schnellwagen würde es schwierig seyn, in a eine so schwere Wagschale oder so viel Ketten anzuhängen, dass ihr Gewicht S dem Gewichte B des Wagebalkens und dem bei d angehängten Laufgewichte P das Gleichgewicht halte. In diesem Falle beschwert man den Punkt a mit einem solchen Gewichte, bis der horizontale Stand der Wage erfolgt, und schreibt nun dieses Gewicht in d an; den folgenden Abtheilungen in d g wird dann ebenfalls so viel Gewicht auf der Skale mehr zugeschrieben, als in a angehängt wurde.

Beispiel. Man soll die Eintheilung einer Schnellwage angeben, womit sich bis zu 50 ℔ wägen lässt und wobei noch ¼ ℔ ersichtlich zu machen ist.

Man nehme die Länge für die Abtheilungen oder $dg = 2$ Fuss an, und theile selbe in 40 Theile, so entfallen 6 Zoll auf 10 Pfund, und eine Abtheilung für 1 ℔ misst Fig. 3.

Fig. 0,6 Zoll; diess reicht hin, um vom freien Auge in 4 Theile getheilt zu werden und so-
3. Tab. nach das Gewicht der Waare bis auf Viertel Pfunde zu bestimmen. Beträgt das Laufge-
9. wicht z. B. P = 5 ℔, so ist die Entfernung a c = 5 . 0,6 = 3 Zoll. Nehmen wir nun an, dass das Laufgewicht in d steht, wenn in a an die Kette oder Wagschale 10 Pfunde angehängt werden, so muss dieser erste Theilungspunkt d mit 10 ℔ bezeichnet, von demselben aus die Eintheilung d g vorgenommen, mit den entsprechenden Zahlen bezeichnet, und daher am Ende der Theilung in g die Zahl 50 beigesetzt werden. Man kann aber auch die Theilung rückwärts von d gegen c so weit verlängern, als es der Raum zulässt. Wird nun mit dieser Wage abgewogen, so gibt die Zahl, bei welcher das Laufgewicht stehen bleibt, das genaue Gewicht der Waare an.

Wenn man kleinere Gewichte als 10 ℔ abwägt, und die von d nach c vorgenommene Theilung hiezu nicht mehr hinreicht, so legt man zu der Waare ein bestimmtes Gewicht z. B. 10 ℔ zu, und zieht dann von dem Gewichte, welches die Skale anzeigt, wieder 10 ℔ ab, um das wirkliche Gewicht der Waare zu erhalten.

Um mit demselben Wagebalken bis zu 200 ℔ oder viermal so viel als nach der angegebenen Eintheilung abwägen zu können, bringt man noch auf der untern Seite des Hebels in c′ eine Achse mit einer Zunge so an, dass die Entfernung a c′ = ¼ a c betrage, und theilt die untere Linie d′ g′ ebenfalls in viermal kleinere Theile ein. Man braucht
Fig. nunmehr die Schnellwage nur umzukehren, und kann mit derselben abermals an dem in a
4. befindlichen Haken, der sich sogleich umschlägt, mit demselben Laufgewichte P Abwägungen vornehmen.

Nachdem die Abtheilungen in der Linie d′ g′ viermal kleiner als jene in d g gemacht worden, muss man abermals versuchen, wohin das Laufgewicht P gestellt werden müsse, wenn 4 mal 10 oder 40 ℔ in a angehängt werden; diess bestimmt den Punkt d′, von welchem die obigen Theilungen sowohl vor als rückwärts fortgesetzt werden; zu d′ kommt die Zahl 40; um 0,15 . 10 = 1,5 Zoll weiter die Zahl 50 u. s. w. in g′ die Zahl 200. Auf solche Art kann man mit ein- und derselben Schnellwage auf einer Seite bis zu 50 ℔, und wenn man sie umkehrt, bis zu 200 ℔ wiegen.

§. 183.

Da die Eintheilung in 10 für unsere dekadische Arithmetik viele Bequemlichkeit hat, so ist es vortheilhaft, grosse Schnell-Wagen, womit z. B. beladene Wägen abgewogen werden, zum Abwägen von 1 bis 10, dann bis 20, bis 30 u. s. w. Zentnern einzurichten. Wir wollen demnach zuerst annehmen, es sey eine solche Schnellwage zu verfertigen, wobei 10 Zentner abgewogen und ebenfalls einzelne Pfunde noch deutlich gesehen werden sollen.

Fig. Nimmt man die Länge der Skale oder die Entfernung d g = 10 Fuss an, so
2. gibt die Eintheilung dieser Linie in Fusse die ganzen Zentner, in halbe Fusse die halben Zentner und in Viertelfusse die Viertel Zentner an. Die letztere Entfernung fünfmal getheilt, gibt die Theilung von 5 zu 5 Pfunden, und wenn diese abermals

in 5 getheilt wird, so erhält man einzelne Pfunde. Die Entfernung der letzten Theilstriche beträgt $\frac{10 \text{ Fuss}}{1000} = 1,44$ Linien, welches vollkommen deutlich zu erkennen ist. Fig. 2. Tab. 9.

Beträgt nun das Laufgewicht P = 1 Ctr., welches ein Mann noch handhaben kann, so muss die Länge a c = 1 Fuss seyn. Da solche Wagen ohnehin auf feste Gerüste gehängt werden, so unterliegt es keinem Anstande bei a nebst den gewöhnlichen Ketten noch ein so grosses Gewicht zuzulegen, bis im Falle P bei d aufgehängt ist, ein vollkommenes Gleichgewicht erfolgt. Man bezeichnet daher den Punkt d mit 0 und beschreibt die weitern Theilungspunkte gewöhnlich von 10 zu 10 oder auch von 5 zu 5 ℔. Mit dieser Wage kann demnach von 1 ℔ bis zu 10 Ctr. abgewogen werden.

Will man schwerere Lasten als 10 Ctr. abwägen, so werden in a 10 Zentner (Gewichte) angehängt und das Ende des längern Armes, nämlich der Punkt b mit einem so grossen Gewichte P′ beschwert, bis Gleichgewicht erfolgt; will man noch grössere Gewichte wägen, so hängt man für 20 Ctr. das Gewicht P′ + P′, oder 2 P′, für 30 Zentner das Gewicht 3 P′ u. s. w. in b auf. Die kleinern Theile von 1 bis 1000 Pfund erhält man immer noch durch das erste Laufgewicht P.

Da nach dieser Art zu theilen das Gewicht P′, um mit 10 Zentnern im Gleichgewichte zu seyn, etwas geringer als P oder 1 Zentner ist, und da ein Mann gewöhnlich mehr als 1 Zentner wiegt, so kann der Wagemeister leicht erfahren, wie viel Gewichte (P′) er bei einer Abwägung in b aufhängen müsse; er schiebt nämlich das Laufgewicht P bis d zurück, legt dann ein Gewicht P′ nach dem andern in b auf, und versucht jedesmal mit seinen Händen, ob er den Wagebalken in b herabdrücken könne. Sobald er merkt, dass eine geringere Zulage nöthig sey, als sein eigenes Gewicht, oder als der Druck eines noch aufzuhängenden P′ beträgt, so lässt er es bei den in b angehängten Gewichten bewenden und verschiebt nur das Laufgewicht P von d aus so weit, bis die Wage horizontal steht. Das Gewicht des beladenen Wagens wird nun so viele 10 Zentner, als Gewichte P′ in b aufgehängt sind, und noch so viel mehr betragen, als der Stand des Laufgewichtes anzeigt. Auf diese Art kann man mit einer solchen Wage so viel abwägen, als die Stärke des Wagebalkens zu tragen im Stande ist.

§. 184.

Die dritte Eigenschaft einer guten Schnellwage ist die Empfindlichkeit; es soll nämlich bei einer kleinen Verschiebung des Laufgewichtes der Wagebalken bedeutend herabsinken und daher die Zunge der Schrotwage einen grossen Ausschlag geben.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns wieder eine Schnellwage in einfachen Linien gezeichnet vorstellen, wobei für den horizontalen Stand des Wagebalkens das Laufgewicht P sich in p befindet. Es wird demnach für diesen Zustand die Gleichung Fig. 5. Tab. 9.

$(S + W)\, m n = B \,.\, n o + P \,.\, n p$ (1) statt finden.

Wird nun das Laufgewicht P um ein kleines Stück p q = e verschoben, so wird sich der längere Arm senken und der Wagebalken nach einigen Spielungen den Stand des Gleichgewichtes in der Linie b v′ erlangen, sonach sein Schwerpunkt, welchen wir in o′

Fig. 5. Tab. 9. annehmen, nach t kommen und das Bleiloth der Setzwage aus der mittlern Linie u v in den senkrechten Stand u w′ treten, sonach den Ausschlag v w = x geben. Dieser wird auf ähnliche Art wie bei der Krämerwage berechnet.

Da der Wagebalken in der Lage b v′ in Ruhe bleibt, folglich Gleichgewicht vorhanden ist, so müssen die statischen Momente von beiden Seiten abermals einander gleich seyn oder $(S + W)\, ac = B \,.\, cd + P \,.\, ce$ (II).

Wir wollen nun die Länge des kürzern Armes $bg = mn = a$, die Höhe der Achse c über der Aufhängslinie m n p, nämlich $cn = cg = h$, die horizontale Entfernung des Schwerpunktes des Wagebalkens von der Achse, $no = gs = b$, und die Tiefe desselben Schwerpunktes unter der Aufhängslinie, $oo' = st = H$, die Entfernung des Laufgewichtes von der Achse, $np = E$, und die Verschiebung $pq = e$, folglich $nq = E + e = gv'$; endlich $vw = x$, $uw = y$, und $vu = z$ setzen, so ist, wenn diese Werthe in die Gleichung I substituirt werden, $(S + W)\, a = B \,.\, b + P \,.\, E$ (III).

Um die Hebelsarme a c, c d, c e in der Gleichung II durch die eben gegebenen Werthe auszudrücken, haben wir

$$ac = fh = fg + gh,$$
$$cd = hi = gi - gh = gk - ik - .gh \text{ und}$$
$$ce = hl = gl - gh.$$

Es sind demnach die fünf Grössen fg, gh, gk, ik und gl auszudrücken.

Die Dreiecke bfg, glv′ und uvw sind einander ähnlich, folglich verhält sich $fg : a = y : z$, woraus $fg = \frac{a \,.\, y}{z}$.

Die Dreiecke cgh, gv′l und uvw sind einander ähnlich, folglich verhält sich $gh : h = x : z$, woraus $gh = \frac{h \,.\, x}{z}$.

Die Dreiecke gks, glv′ und uvw sind einander ähnlich, demnach verhält sich $gk : b = y : z$, woraus $gk = \frac{b \,.\, y}{z}$.

Die Dreiecke rst und uvw sind einander ähnlich, demnach verhält sich $rs : H = x : z$, woraus $rs = \frac{H \,.\, x}{z} = ik$.

Endlich sind die Dreiecke glv′ und uwv einander ähnlich, und es verhält sich $gl : E + e = y : z$, woraus $gl = \frac{(E + e)\, y}{z}$.

Werden diese 5 Werthe in die Gleichung II substituirt, so ergibt sich

$$(S + W)\left(\frac{a \,.\, y + h \,.\, x}{z}\right) = B\left(\frac{b \,.\, y - H \,.\, x - h \,.\, x}{z}\right) + P\left(\frac{E \,.\, y + e \,.\, y - h \,.\, x}{z}\right) \text{ (IV).}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit z, die Gleichung III mit y, und zieht dieselbe von der Gleichung IV ab, so ergibt sich

$(S + W)\, h \,.\, x = - B\, (H \,.\, x + h \,.\, x) + P\, (e \,.\, y - h \,.\, x)$. Hieraus folgt weiters

$$x = \underbrace{\frac{P \,.\, e \,.\, y}{(S + W + P)\, h + B\, (H + h)}}.$$

Diese Gleichung hat mit jener, welche wir §. 170 für die Empfindlichkeit der Krämerwage fanden, die grösste Aehnlichkeit. Um hieraus zu beurtheilen, unter welchen

Umständen der Ausschlag oder die Empfindlichkeit gross werde, müssen wir vorläufig bemerken, dass durch eine Vermehrung der Grössen P und e zwar ein grösserer Ausschlag bewirkt werde; da jedoch durch eine Vergrösserung des Laufgewichtes P die Grösse der Abtheilungen für eine gegebene Länge des Wagebalkens vermindert, folglich der Empfindlichkeit wieder zu nahe getreten würde, so müssen wir das Laufgewicht, so wie die Länge des Wagebalkens und die Grösse ihrer Abtheilungen hiebei als gegeben betrachten. Eben so würde aus einer grössern Verschiebung des Laufgewichtes $pq = e$ auch eine Vermehrung des Ausschlages x erfolgen; da jedoch der Frage über die Empfindlichkeit einer Wage die Bedingniss zum Grunde liegt, wie aus einer kleinen Verschiebung dennoch ein grosser Ausschlag erfolgen könne, so dürfen wir auch die Grösse der Verschiebung e hiebei nicht berücksichtigen. Hiernach ergibt sich aus der gefundenen Formel für die Empfindlichkeit: Fig. 5. Tab. 9.

1tens. Der Ausschlag wird desto grösser, je grösser y, d. h. je höher die Setzwage oder auch die Länge des Pendels u v ist.

2tens. Je kleiner die Gewichte S und W sind, welche abgewogen werden sollen.

3tens. Je kleiner h ist, d. h. wenn die Achse nicht viel höher als die Linie der Aufhängspunkte liegt. Am empfindlichsten ist die Wage, wenn $h = 0$ ist, oder wenn die Gewichte S und W auf die Empfindlichkeit keinen Einfluss nehmen, d. h. wenn die Achse mit den Aufhängspunkten in einer Linie liegt; in diesem Falle ist der Ausschlag $x = \frac{P.e.y}{B.H}$.

4tens. Wenn das Gewicht B des Wagebalkens klein, oder mit andern Worten, wenn die Wage leicht gebaut ist. Es wird sonach eine Wage für schwere Lasten, da sie stärker gebaut, demnach schwerer seyn muss, weniger empfindlich seyn, als eine von leichterer Gattung.

5tens. Wenn $H + h$ klein ist, d. h. wenn der Schwerpunkt des Wagebalkens nicht weit unter der Achse sich befindet. Derselbe muss immer etwas darunter liegen, damit im Falle, als die Achse und die Aufhängspunkte sich in einer Linie befinden, der Wagebalken die horizontale Lage herstellen könne. Wäre $h = 0$ und $H + h = 0$, d. h. wenn sowohl die Linie der Aufhängspunkte, als der Schwerpunkt des Wagebalkens durch die Achse gehen, so wird die Wage in jeder Lage im Gleichgewichte seyn, folglich bei einem zugelegten Gewichte der Ausschlag unendlich gross werden, d. h. der Wagebalken würde sich senkrecht stellen und sonach die Wage nicht zu brauchen seyn.

Da die Grössen b und E aus der Rechnung verschwunden sind, so sieht man, dass es in Hinsicht auf die Empfindlichkeit der Wage gleichgültig sey, ob die Entfernung (b) des Schwerpunktes des Wagebalkens von der Achse gross oder klein und ob der Schwerpunkt rechts oder links von der Achse falle; eben so, dass die Empfindlichkeit dieselbe sey, es mag das Laufgewicht auf was immer für einer Entfernung (E) stehen.

Aus dem Angeführten erhellet, dass die Empfindlichkeit der Schnellwage von denselben Umständen abhängt, wie bei der Krämerwage.

Beispiel. Es sey die abzuwägende Last $S + W = 1200$ ℔, $P = 50$ ℔, das Gewicht des Wagebalkens $B = 30$ ℔, $y = 12$ Zoll, die Tiefe der Aufhängslinie unter der Achse, $h = \frac{1}{4}$ Zoll und $H + h = \frac{1}{2}$ Zoll, dann die Verschiebung $e = 1$ Linie $= \frac{1}{12}$ Zoll, so erhalten wir den Ausschlag $x = \frac{50 \,.\, \frac{1}{12} \,.\, 12}{(1200 + 50)\frac{1}{4} + 30 \,.\, \frac{1}{2}} = 0{,}15$ Zoll. Nehmen wir dagegen an, dass die Aufhängspunkte mit der Achse in einer Linie liegen, so ist der Ausschlag $x = \frac{50 \,.\, \frac{1}{12} \,.\, 12}{30 \,.\, \frac{1}{4}} = 6\frac{2}{3}$ Zoll; die zweite Schnellwage ist demnach bei weitem empfindlicher, als die erste, wie es der bedeutende Unterschied zwischen der Abweichung des Senkels von der mittlern Linie in beiden Fällen darthut.

§. 185.

Die vierte Eigenschaft einer guten Schnellwage beruht darin, dass, wenn eine kleine Verschiebung statt findet, sogleich eine Veränderung ihrer Stellung erfolgt. Sie darf daher nicht träge seyn oder eine Reibung in den Achsen haben. Zur Verhütung der Trägheit ist dasselbe zu beobachten, was wir §. 172 bei der Krämerwage angeführt haben.

§. 186.

Die Schnellwage wurde in ältern Zeiten im Handel sehr häufig gebraucht, hievon ist es aber gegenwärtig abgekommen, indem die viel bequemere Krämerwage an ihre Stelle getreten ist. Der häufigste Gebrauch, den man dermalen noch von der Schnellwage macht, ist zum Abwägen schwerer Wägen, die mit Kaufmannswaaren, Heu, Stroh u. dgl. beladen sind. Die Zeichnung einer solchen Wage enthält Fig. 6 bis 11. Sie besteht aus einem eisernen, hinlänglich starken Wagebalken c f, über dessen Construction bei der Schnellwage bereits das Nöthige angeführt wurde. Wenn das Wagegebäude nicht so hergestellt ist, dass die Wägen durchfahren können, sondern dieselben ausserhalb dem Gebäude zum Behufe des Abwägens anfahren müssen, wie es Fig. 6 angenommen ist, so wird der Wagebalken vor der Vornahme einer jeden Abwägung zuerst aus dem Gebäude herausgefahren. Um diess bewirken zu können, hängt derselbe mittelst der Kette e g und der Stange d f an der eisernen Stange e d, welche mittelst der zwei Rollen in e und d auf einer Holzbahn h i herausgefahren wird, indem man zu diesem Behufe das Seil a b, welches am hintern Ende der Stange bei e befestigt ist, in der Richtung von a gegen c anzieht. Oberhalb der Stange e d befindet sich in k ein Haken, welcher sich, wenn die Stange herausgefahren wird, in das eiserne Gehänge l k von selbst einhängt. Nun werden die 4 Ketten, welche an dem kürzern Wagebalkenarme der Schnellwage befestigt sind, um die Achsen des Wagens geschlungen und hierauf der Hebebaum l n mittelst der eisernen, unten gezähnten Stange n o aufgezogen. Diess geschieht, indem man durch die Kurbel p (Fig. 7) die Schraube ohne Ende q r und dadurch das gezähnte Rad r s sammt dem Getriebe t in Bewegung setzt. Wenn der Wagen so weit aufgezogen ist, dass die Räder auf dem Boden nicht mehr aufstehen, so wird die Kette e g (Fig. 6) abgenommen, damit der Wagebalken ganz frei sey, und hierauf das Abwägen mit dem Laufgewichte auf die bereits bekannte Art vorgenommen.

Fig. 6. Tab. 9.

Fig. 7.

Nach Beendigung der Abwägung wird der Hebebaum n l wieder so weit herabgelas- Fig.
sen, bis die Wagenräder den Boden erreichen, worauf die Ketten von den Achsen oder 6. Tab.
Naben der Räder wieder abgenommen, und die Schnellwage mittelst des beschriebenen 9.
Zugwerkes in das Gebäude wieder zurückgeführt wird, um dem Einflusse der Witterung nicht unnöthig ausgesetzt zu seyn.

Da beladene Wägen 60 bis 100 und mehr Zentner wiegen, so müssen die Achsen und der Wagebalken die hinlängliche Stärke erhalten; der Wagebalken wird gewöhnlich 9 bis 12 Fuss lang gemacht. Wollte man auf einer solchen Wage nur bis zu 60 Zentnern wägen, so würde der Wagebalken, wenn man einzelne Pfunde an der Skale durch Theile von einer Linie zu unterscheiden hätte, 60.100 Linien = 6 Klafter, 5 Fuss, 8 Zoll Länge erhalten müssen. Da diess in einem Gebäude nicht leicht möglich ist, und der Wagebalken überdiess zu schwer würde, so berechnet man seine Länge bloss für ein Gewicht von 10 Zentnern, und wägt die grössern Gewichte mittelst eines bei c angebrachten Gegengewichtes nach der Anleitung, welche hierüber §. 183 gegeben wurde.

Die Schrotwage, deren wir bereits §. 180 erwähnten, ist Fig. 8 in der Vorderan- Fig.
sicht, Fig. 9 und 10 im Durchschnitte und Fig. 11 in der Seitenansicht dargestellt. Die 8 bis
zwei in Fig. 9 ersichtlichen Rollen, auf welchen die Schrotwage auf dem Wagebalken 11.
nach der Richtung m n vor- und rückwärts verschoben wird, sind in dem äussern Gehäuse Fig. 8 in den Zapfen a und b beweglich. Wenn nun der Punkt gefunden ist, wo das Senkblei o p einspielt, so wird der Fig. 10 durchschnittene Körper o f g h i k zwischen den zwei Rollen so viel herabgeschoben, als erfordert wird, damit die Schrotwage in den drei Punkten g, h, i auf dem Wagebalken aufsitze und die Beweglichkeit der Rollen aufhöre. Dieses Herabdrücken geschieht mittelst einer elyptischen Scheibe, die Fig. 9 unterhalb p ersichtlich ist; der grössere Durchmesser dieser Scheibe ist dem kleinern Durchmesser der Oeffnung, innerhalb welcher sie sich bewegt, gleich, und der Unterschied der Durchmesser der Scheibe ist etwas grösser, als das Hervorstehen der zwei Rollen vor den Punkten g, h, i beträgt. Die elyptische Scheibe wird durch die Handgriffe e, e (Fig. 11) verwendet, die Achsen dieser Handgriffe sind in dem äussern Gehäuse (Fig. 8) befestigt; es wird daher begreiflich, wie dadurch das Laufgewicht auf dem Wagebalken einen festen Stand erhält.

§. 187.

Die Wage mit Zeiger besteht aus einem gebrochenen Hebel a c b, der um c Fig.
beweglich ist, und an dessen einem Arme c a ein beständiges Gewicht P, an dem an- 12.
dern Arme c b aber die abzuwägende Waare W an dem Haken i befestigt wird. Das Gewicht der Waare wird von derjenigen Abtheilung der Skale k r angezeigt, wo der längere Arm c b stehen bleibt; wird nämlich eine Waare in i angehängt, so wird durch das Gewicht derselben das Gegengewicht P gehoben, und es erfolgt erst dann Ruhe, wenn die beiderseitigen Momente um den Umdrehungspunkt c einander gleich sind. Da hiebei der längere Wagebalken bei einer bestimmten Abtheilung der Skale stehen bleibt, so wird es sich nur darum handeln, wie die Skale k r einzutheilen sey, damit die Zahl dieser Abtheilungen das Gewicht der angehängten Waare in jedem Falle verlässig anzeigen möge. Man ersieht hieraus, dass das Abwägen bei dieser Wage bloss

mit einem beständigen Gewichte P geschieht, welches weder wie bei der Krämerwage vermehrt, noch wie bei der Schnellwage verschoben wird.

Da die Skale gewöhnlich entweder senkrecht wie Fig. 15, oder wagerecht wie Fig. 16 gestellt wird, so wollen wir nur diese zwei Fälle abhandeln, obwohl noch unendlich viele andere Stellungen gedacht, und für jede eine Methode für ihre Abtheilungen angegeben werden könnte.

§. 188.

Fig. 13. Tab. 9. Wir wollen nun die Eintheilung für eine Wage mit senkrechter Skale berechnen, wenn die Waare zwischen der Skale und der Achse an dem längern Hebel aufgehängt wird. Bevor noch ein Gewicht W in i aufgehängt wird, befinde sich die Wage in der Lage a c b. In diesem Falle muss offenbar der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Gewichtes P und der beiden Hebelsarme c a und c b in irgend einem Punkte m der senkrechten Linie c m sich befinden, weil der Stillstand der Wage nicht anders erfolgen kann, als wenn der gemeinschaftliche Schwerpunkt in der Richtung der Schwere c m unterstützt ist. Wird hierauf die abzuwägende Waare in i angehängt, so zieht sie den Wagebalken um irgend einen Winkel w herunter, und derselbe kommt nach erfolgter Ruhe in die Lage l c d; es wird daher der Schwerpunkt des Gewichtes $P+B$ von m nach n gehen, und denselben Winkel w beschreiben. Die statischen Momente in dieser Lage sind einander gleich, folglich $(P+B)\,no = W.\,ch$ (I).

Wir wollen nunmehr wieder die Hebelsarme n o und c h durch bekannte Linien ausdrücken, und ziehen zu diesem Behufe aus k das Perpendikel k e auf die Linie c d. Da die drei in der Figur angezeigten Drehungswinkel einander gleich sind,

so sind die Dreiecke c k e und c n o einander ähnlich, demnach verhält sich $no : nc = ke : kc$,
dann sind die — kfe — cgh — — — — — $cg : ch = kf : ke$,

und multiplicirt man diese Proportionen mitsammen, so ist $no.\,cg : nc.\,ch = kf : kc$,

woraus $no = \dfrac{kf.\,nc.\,ch}{kc.\,cg}$ folgt (II).

Wird dieser Werth in die Gleichung I substituirt,

so ist $(P+B)\dfrac{kf.\,nc.\,ch}{kc.\,cg} = W.\,ch$, woraus der Ausschlag $kf = \dfrac{W.\,kc.\,cg}{(P+B)\,nc}$ sich ergibt (III).

Fig. 14. Wird nun statt W ein anderes schwereres oder leichteres Gewicht W′ in denselben Haken i eingehängt, so wird der Wagebalken z. B. bis f′ sinken, und da die in dem Ausdrucke III vorkommenden Grössen, nämlich die Länge k c des grössern Wagebalkens, die Entfernung c g des Aufhängspunktes der Waare, das Gewicht $P+B$ der ganzen Wage und n c oder die Entfernung des Schwerpunktes der Wage von der Achse beständig und unveränderlich sind, so wird der Ausschlag $kf' = \dfrac{W'.\,kc.\,cg}{(P+B)\,nc}$ seyn (IV). Bildet man aus den Gleichungen III und IV eine Proportion, so verhält sich

$kf : kf' = \dfrac{W.\,kc.\,cg}{(P+B)\,nc} : \dfrac{W'.\,kc.\,cg}{(P+B)\,nc} = W : W'$, d. h. die Abtheilungen auf der Skale sind den angehängten Gewichten vollkommen proportio-

nal. Wenn daher das Gewicht der Waare 1, 2, 3 Pfunde beträgt, so müssen Fig. 14.
auch die Abtheilungen k f, k f', k f'' an der Skale, wohin der Zeiger zu stehen Tab.
kommt, sich wie die Zahlen 1, 2, 3 verhalten, sonach die Unterschiede kf, ff', f'f'' einander gleich seyn. 9.

Die Gleichung $kf = \frac{W.kc.cg}{(P + B)\,nc}$ gibt uns auch an, unter welchen Umständen, die Abtheilungen an der Skale gross ausfallen, nämlich wenn

1tens. W oder das Gewicht der abzuwägenden Waare gross ist,

2tens. wenn kc oder die Länge des grössern Wagebalkens viel beträgt,

3tens. wenn cg oder die Entfernung des Aufhängspunktes der Waare von der Achse gross ist.

4tens. wenn das Gewicht der ganzen Wage P + B und

5tens. wenn die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Achse klein ist.

§. 189.

Die Construction einer Wage mit einem Zeiger ergibt sich nach dem Vorhergehenden und aus der Bestimmung, wozu die Wage dienen soll.

Beispiel. Man wollte eine solche Wage verfertigen, um mit derselben bis zu 10 ℔ abzuwägen, und hiebei noch die einzelnen Lothe zu erkennen.

Nimmt man die Entfernung zweier Theilstriche an der Skale, welche den Gewichtsunterschied für 1 Loth ausdrücken, zu 1 Linie an, so wird die Länge der ganzen Skale 10 . 32 Linien = 2 Fuss, 2 Zoll, 8 Linien betragen. Wird nun die Waare Fig. 15.
auf der entgegengesetzten Seite von der Skale angehängt, so kommt der Nullpunkt der Theilung an das untere Ende r der Skale, und oben bei k die Zahl 10 ℔ beizusetzen; die ganze Länge kr wird hierauf von Linie zu Linie getheilt, und mit den entsprechenden Zahlen, z. B. von 8 zu 8 Loth beschrieben. Damit aber die Abtheilungen auf der Skale sicher und genau zu erkennen seyen, darf der Durchschnitt des Zeigers und der Skale nicht unter einem zu spitzigen Winkel geschehen. Man nimmt daher diesen Winkel in den äussersten Durchschnittspunkten r und k gewöhnlich zu 60 Grad an, in welchem Falle das Dreieck ckr gleichseitig wird. Aus dieser Bestimmung lässt sich die Entfernung der Skale von der Achse oder die Linie $cf = \sqrt{(kc^2 - kf^2)} = \sqrt{\left(kc^2 - \frac{kc^2}{4}\right)} = kc \,.\, 0{,}866$ berechnen; sie beträgt nämlich in unserem Falle $320''' . 0{,}866 = 277{,}12$ Linien $= 23''\, 1{,}12'''$.

Es bleibt nun noch übrig, das Gewicht des Wagebalkens sammt Wagschale (B) nebst dem an dem Arme kc befestigten Gewichte (P) zu bestimmen. Hiezu dient die im vorigen §. gefundene Gleichung $kr = \frac{W.kc.cg}{(P + B)\,nc}$, woraus, da $kr = kc$ und $W = 10$ ℔ ist, das Gewicht $P + B = \frac{10.cg}{nc}$ folgt. Nimmt man nun den Wagebalkenarm cg zu 6 Zoll und nc zu 8 Zoll an, so ergibt sich $P + B = 7\tfrac{1}{2}$ ℔. So viel müsste das Gewicht des Wagebalkens, der Wagschale und das Gegengewicht P betragen. Wiegen also der Hebel und die Wagschale $4\tfrac{1}{2}$ ℔, so hat man $P = 3$ ℔, welches an den Arm nc angesteckt und so weit geschoben oder geschraubt wird, bis die leere

Wage in dem Nullpunkte der Skale (in r) genau einspielt. Diese Correction mit der Schraube ist hier desshalb nothwendig, weil die Entfernung n c des gemeinschaftlichen Schwerpunktes, welche zu 8 Zoll bloss angenommen wurde, erst durch diese Verschiebung oder Schraubung berichtigt werden muss.

§. 190.

Fig. 16. Tab. 9. Die zweite Art der Zeiger-Wagen hat eine horizontale Skale; sie besteht aus einem rechtwinkeligen Hebel a c b, an dessen kürzerem Arme in a die Waare angehängt und mit der vordern Kante des längern Armes c b der Punkt an der Skale, welcher das Gewicht anzeigt, bezeichnet wird. Mit diesem Hebel a c b ist noch ein Arm c h fest verbunden, an dessen Ende das beständige Gewicht P befestigt oder angeschraubt wird. Wird nun eine Waare in a angehängt, so beschreibt der Punkt a um c einen Kreis und geht nach d, das Gewicht P geht von h nach i, und der Zeiger beschreibt an der Skale den Raum b f, welcher auf folgende Art berechnet wird:

Da die statischen Momente in dieser zweiten Lage einander gleich sind, so ist $W \cdot cg = P \cdot ck$.

Das Dreieck d g c ist dem Dreiecke f e b ähnlich, daher verhält sich $cg : cd = be : bf$
— — c k i — — c e b — — — — $ci : ck = bc : be$.

Werden diese Proportionen mitsammen multiplicirt, so ist $cg \cdot ci : cd \cdot ck = bc : bf$,

woraus $cg = \frac{cd \cdot ck \cdot bc}{ci \cdot bf}$, und diess in die obige Gleichung substituirt, gibt

$W \cdot \frac{cd \cdot ck \cdot bc}{ci \cdot bf} = P \cdot ck$; hieraus folgt der Ausschlag $bf = \frac{W \cdot cd \cdot bc}{P \cdot ci}$.

Legt man in einem andern Falle die Waare W′ auf, so ist, da alle Grössen, mit Ausnahme des Ausschlags b f, dieselben bleiben, $bf' = \frac{W' \cdot cd \cdot bc}{P \cdot ci}$. Beide Gleichungen in eine Proportion gesetzt, geben $bf : bf' = W : W'$, d. h. auch bei dieser Wage sind die Entfernungen an der Skale den abgewogenen Gewichten genau proportional.

§. 191.

Eine vorzügliche Anwendung der Wage mit dem Zeiger findet bei der Garnwage statt, welche in den Fabriken bei Sortirung der baumwollnen Garne gebraucht wird. Sie ist eben so gebaut, wie die bereits beschriebene Zeigerwage und unterscheidet sich von derselben nur in Hinsicht auf ihren Zweck und die Eintheilung der Skale.

Da die Garne von den Spinnmaschinen gewöhnlich nicht vollkommen gleich ausfallen, bei der Weberei jedoch nur Garne von gleicher Stärke oder Feinheit zu einem und demselben Stücke erfordert werden, so ist es nöthig, sie nach ihrer verschiedenen Stärke zu sortiren. Alle Garne werden, wenn sie von den Spinnmaschinen kommen, mittelst der sogenannten Weife in Strähne abgetheilt. Die Länge der Strähne in den englischen und deutschen Fabriken wird durchaus gleich angenommen und zwar beträgt der Umfang des Haspels (der Weife), worauf die Garne gewunden werden, genau 1,5 englische *Yards* (52,0663 Wiener Zoll) und jeder Strähn besteht aus 7 Gebinden, ein jeder von 80 Umwindungen. Die Länge eines Baumwollgarn-

strähnes beträgt daher 560 Umwindungen zu 1,5 *Yards* = 840 *Yards* = 2429,784 Wiener Fuss = 985,656 Wiener Ellen (da 1 engl. *Yard* = 1,1734 Wiener Ellen hält.)

Da auf diese Weise alle Strähne in den Bauwollspinnereien eine gleiche Länge erhalten, so wiegt nothwendig ein Strähn von stärkerem Gespinnste mehr als ein Strähn von feinerem Gespinnste; das Gewicht der Strähne gibt daher ein Mittel zum Sortiren derselben. Man hat zur grössern Bequemlichkeit jedem Strähne ein Nro. gegeben, worunter in den deutschen und englischen Fabriken immer diejenige Zahl verstanden wird, welche ausdrückt, wie viel solche Strähne auf ein englisches Handelspfund (0,8099 Wiener Pfund oder 25,9163 Wiener Loth) gehen. Ein Strähn Baumwollengarn von Nro. 60 ist daher dasjenige, wovon 60 Stück, ein jedes von 2429,784 Wiener Fuss Länge, zusammen 25,9168 Wiener Loth wiegen. Garne von doppelter oder dreifacher Nummer sind daher 2mal oder 3mal feiner, d. h. enthalten so vielmal weniger Baumwolle; es steigt daher die Feinheit der Garne mit dem Nro.

§. 192.

Wird das Nro. eines Strähnes mit n und das Gewicht des englischen Pfundes (25,9168 Wiener Loth) mit p bezeichnet, so ist das Gewicht des Strähnes, $W = \frac{p}{n}$. Substituirt man diesen Werth in die §. 188 gefundene Formel, so ist $kf = \frac{p.kc.cg}{n.(P+B)nc}$. Sind daher bei einer Wage die Abmessungen derselben, nämlich kc, cg, nc und das Gewicht P + B bekannt, so kann man für n die Zahlen des Nro. annehmen, und hiezu die Abtheilungen der Skale berechnen. Zu diesen Abtheilungen wird sonach an der Skale nicht das Gewicht der abgewogenen Waare, sondern das Nro. des Strähnes beigesetzt. Fig. 17. Tab. 9.

Beispiel. Es soll eine Garnwage angegeben werden, womit man von Nro. 20 bis Nro. 80 wägen kann, und wobei die Abtheilung an der Skale zwischen Nro. 79 und 80 noch ½ Linie beträgt. Wie ist die Eintheilung der Skale zu machen, und wie gross müssen die einzelnen Bestandtheile der Garnwage seyn?

Wir wollen annehmen, dass W das Gewicht eines Strähnes von Nro. 80 = n, W′ das Gewicht von Nro. 79 = n′, und R der schwerste Strähn von Nro. 20 = N sey. Bezeichnet k den Nullpunkt, wo die Wage in der unbeschwerten Lage stehen bleibt, f den Punkt an der Skale für Nro. 80, f′ für Nro. 79 und r für Nro. 20, so haben wir nach §. 188

$kf = \frac{p.kc.cg}{n(P+B)nc}$, $kf' = \frac{p.kc.cg}{n'(P+B)nc}$ und $kr = \frac{p.kc.cg}{N(P+B)nc}$. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so ergibt sich der Unterschied, welcher nach der Bedingniss der Aufgabe ½ Linie betragen soll, nämlich

$$kf' - kf = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)\frac{p.kc.cg}{(P+B)nc} = \left(\frac{n-n'}{n.n'}\right)\frac{p.kc.cg}{(P+B)nc}$$

oder ½ Linie $= \left(\frac{80-79}{80.79}\right)\frac{25{,}9163.kc.cg}{(P+B)nc}$, woraus $\frac{25{,}9163.kc.cg}{(P+B)nc} = 3160$ folgt.

Substituiren wir diesen Werth in die letzte Gleichung für Nro. 20, so erhalten wir

$$kr = \frac{3160}{20} = 158''' = 13''\,2'''.$$

Hieraus ersieht man, dass bei der Eintheilung der Skale die Grösse der übrigen Bestandtheile ganz entfällt; denn wenn man statt N verschiedene Werthe in die Gleichung $kr = \frac{3160}{N}$ setzt, so findet sich der jedem Nummero angehörige Raum an der Skale.

Nro. des Strähnes N.	Länge der Skale $kr = \frac{3160}{N}$	Differenz hievon.	Nro. des Strähnes N.	Länge der Skale $kr = \frac{3160}{N}$	Differenz hievon.
20	158,0 Linien	14,4 Linien			2,3 Linien
22	143,6 —	11,9 —	54	58,5 Linien	2,1 —
24	131,7 —	10,2 —	56	56,4 —	1,9 —
26	121,5 —	8,6 —	58	54,5 —	1,8 —
28	112,9 —	7,6 —	60	52,7 —	1,7 —
30	105,3 —	6,5 —	62	51,0 —	1,6 —
32	98,3 —	5,9 —	64	49,4 —	1,5 —
34	92,9 —	5,1 —	66	47,9 —	1,4 —
36	87,8 —	4,6 —	68	46,5 —	1,4 —
38	83,2 —	4,2 —	70	45,1 —	1,2 —
40	79,0 —	3,8 —	72	43,9 —	1,2 —
42	75,2 —	3,4 —	74	42,7 —	1,1 —
44	71,8 —	3,1 —	76	41,6 —	1,1 —
46	68,7 —	2,9 —	78	40,5 —	0,5 —
48	65,8 —	2,6 —	79	40,0 —	0,5 —
50	63,2 —	2,4 —	80	39,5 —	
52	60,8 —				

Die anliegende Tabelle enthält die Berechnung der Abtheilungen der Skale von 2 zu 2 Nummern, wobei zugleich die Differenzen dieser Abtheilungen besonders bemerkt wurden. Man ersieht hieraus, dass die Abtheilungen nicht wie bei der Zeigerwage §. 188 gleich gross, sondern **ungleich** sind; sie betragen bei den geringern Nummern mehr als bei den höhern und zwischen Nro. 80 und 79 findet auf der Skale wirklich der Unterschied von ½ Linie statt, wie gefordert wurde, da $40''' - 39{,}5''' = \frac{1}{2}$ Linie.

Fig. 17. Tab. 9. Aus der Länge der Skale von Nro. 80 bis Nro. 20, nämlich $fr = kr - kf = 158''' - 39{,}5''' = 118{,}5'''$, ergibt sich nunmehr die Grösse der übrigen Theile der Wage. Nimmt man wegen der Deutlichkeit des Ablesens, wie §. 189, das Dreieck fcr gleichseitig an, so ist die horizontale Entfernung der Skale von der Achse $cd = \sqrt{(cf^2 - fd^2)} = \sqrt{(118{,}5^2 - 59{,}25^2)} = 102{,}6$ Linien.

Da der Zeiger nur bis zu den Punkten f und r zu reichen hat, indem mit dieser Wage nur Garne von Nro. 20 bis 80 sortirt werden, so ergibt sich ihre nothwendige Länge $cf = 118{,}5$ Linien. Wird ferner der Haken g, wie es gewöhnlich der Fall ist, in der Mitte des Armes cf angebracht, so ist $cg = \frac{cf}{2} = 59{,}25$ Linien. Diese Werthe in die obige Gleichung substituirt, geben $\frac{25{,}9168 \cdot 118{,}5 \cdot 59{,}25}{(P + B)\, nc} = 3160$, woraus $(P + B)\, nc = 57{,}6$ folgt, wo $P + B$ in Lothen und nc in Linien genommen werden muss. Beträgt daher z. B. $P + B = 3$ Loth, so muss man $nc = 19{,}2$ Linien machen. Da diess jedoch nur ein **beiläufiger Werth** ist, indem nc nicht die Entfernung des angeschraubten Gewich-

tes P, sondern die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von P + B ist, so muss man das Gewicht von 3 Loth an dem Hebel n c so weit hinaufschrauben, bis die unbeschwerte Wage bei dem Punkte k, wenn der Hebel so weit reicht, oder wenn diess nicht der Fall ist, bei demjenigen Nro. der Skale einspielt, welches mit dem angehängten Strähne von einem bekannten Nro. übereintrifft.

§. 193.

Die eben berechnete Garnwage kann auch gebraucht werden, um Strähne von höhern Nummern abzuwägen. Wenn man nämlich den längern Arm k c (Fig. 12) in 3 gleiche Theile theilt, auf dem ersten Drittheile von der Achse einen Haken anbringt, und diesem Abstande gemäss das Moment (P + B) n c bestimmt, so dient diese Wage, wie die im vorigen §. berechnete, zum Sortiren der Garne von Nro. 20 bis 80. Versetzt man itzt den Haken auf das zweite Drittheil von der Achse, so wird ein Strähn, der das halbe Gewicht hat, dasselbe Moment, wie ein am ersten Drittheil angehängter eben so schwerer Strähn haben, weil seine Entfernung doppelt ist; er wird also, wenn z. B. der Strähn am ersten Drittheile Nro. 40 zeigte, auch Nro. 40 weisen; da aber sein Gewicht nur halb so gross, als des vorigen ist, so wird seine Nummer doppelt so hoch oder Nro. 80 seyn. Man braucht daher für jene Garne, die auf dem Haken am zweiten Drittheile abgewogen werden, nur die Nummern, welche sie zeigen, mit 2 zu multipliciren, um ihre wahren Nro. zu erhalten. Demnach kann man mit derselben Wage sowohl von Nro. 20 bis 80, als auch mit Verwendung des zweiten Hakens bis zu 160 abwägen. Fig. 12. Tab. 9.

Wird aber der Arm in 4 gleiche Theile getheilt, so dient der erste Haken für Garne von Nro. 20 bis 80, der zweite bis 2mal 80, und der dritte bis 3mal 80 oder bis zu Nro. 240.

Es versteht sich, dass in diesem Falle, da die Abtheilungen an der Skale dieselben sind, aber für 3mal grössere Gewichte gelten, auch die Grösse der Zwischenräume von einer Nummer zur andern um eben so viel geringer ist, und daher auch die Deutlichkeit bei dem Ablesen nur ein Drittheil von derjenigen beträgt, wenn die Wage bloss zur Sortirung der Garne von Nro. 20 bis 80 gebraucht wird.

§. 194.

Bei den gebräuchlichen Garnwagen findet man häufig auch die Theilung auf einem Kreisbogen, welcher den Vortheil gewährt, dass der Endpunkt des Zeigers denselben Kreisbogen beschreibt, und daher für alle Theilungspunkte eine gleiche Länge hat. Errichtet man Fig. 18 in e, wo die Theilung der Skale beginnt, die Linie e g senkrecht auf e d, so fallen in diese Linie die Tangenten aller Winkel e d n, e d b ..., welche der Zeiger, wenn Gewichte angehängt werden, beschreibt. Bezeichnet e d f den grössten Winkel oder ist d f die Richtung des Zeigers, wenn das grösste Gewicht angehängt wird, so ist auch e g die Tangente dieses grössten Winkels e d f. Da nun der Ausschlag diesen Tangenten e o, e h proportional ist, so braucht man nur die Linie e g für gleiche Gewichte in gleiche Theile zu theilen, und diese mit d zu verbinden; die Durchschnittslinien mit dem Kreisbogen geben nunmehr die Abtheilungen am Kreise, welche den angehängten Gewichten proportional sind. Fig. 18. Tab. 9.

Fig. 18. Tab. 9. Weil aber der Punkt g zu weit entfernt ist, so theilt man lieber den Winkel e d f in zwei gleiche Theile e b = b f und errichtet in e und f die Tangenten e h = f h. Dieselben Tangenten sind aber auch e h = a b und f h = b c. Wir können also statt e g zu theilen, für den ersten Bogen e d b nur e h oder a b, und für den zweiten Bogen b d f die Linie b c eintheilen. Es wird sonach die ganze Höhe a c in gleiche Theile abgetheilt, welche den angehängten Gewichten proportional sind. Daher verhält sich das Gewicht des schwersten Strähnes R zum Gewichte eines gegebenen Strähnes W, wie die von dem Zeiger in der vertikalen Skale beschriebenen Räume a c zu a m oder

$R : W = ac : am$. Nun ist (nach Seite 197) $R = \frac{p}{N}$ und $W = \frac{p}{n}$, dann die Linie

$ac = 2\,ab = 2\,r\,.\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2}$ und $am = ab - bm = r\,.\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2} - r\cdot\text{tang.}\,\varphi$, folglich

substituirt $\frac{p}{N} : \frac{p}{n} = 2\,r\,.\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2} : r\,.\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2} - r\,.\,\text{tang.}\,\varphi$, woraus

$$\text{tang.}\,\varphi = \left(1 - \frac{2\,N}{n}\right)\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Der Winkel α wird häufig zu 90 Grad angenommen, es ist jedoch der Deutlichkeit des Ablesens wegen besser, ihn = 60 Grad zu machen; die Zahl N ist in jedem Falle gegeben, da es die niedrigste Nummer ist, welche mit dieser Wage gewogen werden soll. Nimmt man daher für n verschiedene Werthe an, so findet man den Winkel φ, um welchen die zur Zahl n gehörige Theilung von der Mittellinie d b abweicht.

Auf diese Art kann der Winkel berechnet, und die Theilung des Bogens vorgenommen werden. Soll dieselbe Theilung durch Verzeichnung gemacht werden, so theilt man nach der Anleitung, welche oben gegeben wurde, die Tangente a c in die den Nummern n entsprechenden Theile, und verbindet dann die Theilungspunkte mit d.

Man sieht nun auch, dass die Bögen den angehängten Gewichten bloss dann proportional sind, wenn die Länge der erstern nur einige Grade beträgt, denn nur in diesem Falle sind die Tangenten den Bögen beinahe proportional.

§. 195.

Fig. 19. Aus dem Angeführten ergibt sich, dass die Theilung einer Garnwage unrichtig sey, wenn sie nach dem Grundsatze vorgenommen wird, dass die Bewegungen des Zeigers, d. h. die beschriebenen Bögen sich gerade wie die angehängten Gewichte (oder verkehrt wie die Nummern der angehängten Strähne) verhalten.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir annehmen, dass eine Garnwage von Nro. 12 bis Nro. 60 construirt werden soll. In diesem Falle ist das Gewicht von Nro. 60 $= \frac{p}{60}$ und jenes von Nro. 12 $= \frac{p}{12} = \frac{5\,p}{60}$, wo p das Fabrikspfund bezeichnet. Ist der Bogen a g = 90 Grade und theilt man denselben in 5 Theile oder von 18 zu 18 Graden ein, so wird, wenn man die Gewichte der Strähne den beschriebenen Bögen proportional annimmt,

bei 18 Grad oder bei f das Gewicht $\frac{p}{60}$ oder Nro. 60 stehen müssen,

bei 2 . 18 = 36 Grad oder bei e das Gewicht $\frac{2p}{60}$ oder Nro. 30 stehen müssen, Fig. 19. Tab. 9.

— 3 . 18 = 54 — — d — — $\frac{3p}{60}$ — Nro. 20 — —

— 4 . 18 = 72 — — b — — $\frac{4p}{60}$ — Nro. 15 — —

— 5 . 18 = 90 — — a — — $\frac{5p}{60}$ — Nro. 12 — —

Wir wollen nunmehr berechnen, welche Gewichte und Garnnummern diesen Bögen entsprechen. Um hiebei die möglichste Uibereinstimmung zu erhalten, wollen wir annehmen, dass nicht nur in den zwei äussersten Punkten a und f der Skale, nämlich bei Nro. 12 und bei Nro. 60, sondern auch bei dem mittlern Punkte d oder bei Nro. 20 die Eintheilung der Wage ganz richtig gestellt sey. Ziehen wir nun zu d die Tangente ni, so werden die Linien dn und dk als Tangenten von 36 Grad einander gleich seyn, und jede dem Gewichte $\frac{2p}{60}$ entsprechen.

Das Gewicht q, wodurch der Zeiger von dem Stande des mittleren Strähngewichtes $\frac{3p}{60}$ bei 3.18 = 54 Grad noch um 18 Grad weiter, oder bis zu dem Winkel von 72 Grad gehoben wird, ergibt sich nach §. 194 aus der Proportion:

$\text{tang. } 36^0 : \frac{2p}{60} = \text{tang. } 18^0 : q$, woraus $q = \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}$.

Da diess das Gewicht ist, um wie viel das Gewicht in b grösser seyn muss, als in d, so beträgt das ganze Gewicht, welches den Zeiger bis zu 72 Grad zu erhöhen im Stande ist, $\frac{3p}{60} + \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}$. Wird das Gewicht des Fabrikspfundes (p) mit diesem ganzen Gewichte dividirt, so erhält man die zu 72 Grad gehörige richtige Garnnummer

$$n = \frac{p}{\frac{3p}{60} + \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}} = \frac{60}{3 + 2 \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}} = \frac{60}{3 + 2 \cdot \frac{0{,}3249197}{0{,}7265426}} = 15{,}4,$$

wogegen nach dem Gesetze der gleichförmigen Bewegung des Zeigers für den Punkt b bei 72 Grad Nro. 15 angenommen wurde; diese Nummer ist daher gegen die richtige Nummer um 0,4 zu klein.

Wenn man auf gleiche Art das Gewicht sucht, welches dem Punkte e oder dem Winkel von 36 Grad entspricht, so haben wir wie oben zuerst die Proportion:

$\text{tang. } 36^0 : \frac{2p}{60} = \text{tang. } 18^0 : q$, und wenn dieses Gewicht $q = \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}$, von jenem in d oder von $\frac{3p}{60}$ abgezogen wird, so erhält man das Gewicht, welches den Zeiger bis zu 36 Grad stellt, $= \frac{3p}{60} - \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}$. Wird mit diesem Gewichte das Fabrikspfund dividirt, so ist die zum Winkel von 36 Grad gehörige richtige Garnnummer

$$n' = \frac{p}{\frac{3p}{60} - \frac{2p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 18^0}{\text{tang. } 36^0}} = 28{,}5,$$

statt der oben angenommenen Nummer 30.

Fig. 19. Tab. 9. Wollte man auf die noch höhern Nummern übergehen, und z. B. das Gewicht und die Garnnummer für den Winkel von 9 Grad oder den Punkt h suchen, so würde nach dem Grundsatze, dass die Bögen den Gewichten proportional sind, folgen, dass das Gewicht bei 9 Grad die Hälfte von jenem bei 18 Grad, oder $= \frac{p}{2.60} = \frac{p}{120}$, folglich die Nummer $= 120$ seyn müsste.

Weil aber der Punkt h von d um $36 + 9 = 45$ Grad absteht, so erhalten wir das Gewicht, welches den Zeiger nach h stellt, aus der Proportion $\text{tang. } 36^0 : \frac{2\,p}{60} = \text{tang. } 45^0 : \frac{2\,p}{60} \cdot \frac{\text{tang. } 45^0}{\text{tang. } 36^0}$, demnach ist, wie in den vorigen Fällen die hiezu gehörige richtige Nummer $n'' = \frac{60}{3 - 2 \cdot \frac{\text{tang. } 45^0}{\text{tang. } 36^0}} = \frac{60}{3 - 2 \cdot \frac{1{,}0000000}{0{,}7265426}} = 242{,}7$; die Nummer ist daher mehr als doppelt so hoch, als sie aus dem Verhältnisse der blossen Winkel folgt.

Hieraus ist nunmehr zu ersehen, dass sich die im Eingange des §. erwähnte Theilungsart einer Garnwage um so fehlerhafter zeigen werde, je höher die Nummern sind.

§. 196.

Fig. 20. Bei einigen Garnwagen ist statt des Gewichtes P eine Feder A angebracht, welche sich, wenn die Garne an den Arm angehängt werden, desto mehr spannt, je grösser W ist; es kann demnach auch bei der Anwendung einer solchen Feder der Ausschlag bestimmt und hiernach die Skale getheilt werden.

Die Erfahrung lehrt jedoch, dass der Widerstand der Feder bei grössern Spannungen nicht mehr der Spannkraft genau proportional sey, und dass auch die Federkraft durch die Kälte vermehrt und durch die Wärme vermindert werde; es kann daher die Skale bloss durch Versuche verfertigt werden, indem man Strähne von bekanntem Nro. anhängt, und die Punkte, bei denen der Arm stehen bleibt, an der Skale bemerkt. Da sich aber die Federkraft mit der Temperatur ändert, und auch mit der Länge der Zeit abnimmt, so müssen solche Wagen bei ihrem Gebrauche beständig in gleicher Temperatur gehalten, von Zeit zu Zeit geprüft und wieder adjustirt werden. Hieraus ersieht man, dass es vortheilhafter sey, sich einer Wage mit einem angebrachten Gewichte, statt einer Feder zu bedienen.

§. 197.

Die Beweglichkeit einer jeden Garnwage erfordert übrigens, dass dieselbe von der Reibung möglichst befreit werde; demnach macht man die Achse des Wagebalkens von Stahl, und lässt sie in zwei feine Spitzen auslaufen. Die Zapfenlager bestehen aus geschlagenen Messingplatten, welche an diese Achse bloss andrücken, und die Achse durch ihre Elastizität immer in demselben Punkte erhalten.

§. 198.

Verjüngte Wagen überhaupt sind Wagen, wobei man mittelst kleiner Gewichte grössere Lasten abwägen kann.

Man verfährt hiebei nach den verschiedenen Zwecken auch auf verschiedene Art, z. B. man wollte wissen, ob ein Haufen Erz schmelzwürdig sey. Diess erfährt man, indem man untersucht, wie viel Metall (z. B. Silber) in einem Zentner von diesem Erze enthalten sey. Zu dieser Absicht übergeht man den Haufen und nimmt an mehrern Orten Stücke heraus, die man dem mittlern Gehalte angemessen findet. Man lässt diese Stücke auf die gewöhnliche Art pochen und schlemmen; das geschlemmte Gut wird getrocknet, und davon mit einer genauen Probierwage ein sogenannter Probierzentner, welcher gewöhnlich ein halbes Loth oder ein Quintel beträgt, abgewogen. Man setzt nun die erforderlichen Schmelzmittel hinzu, und bringt das Ganze in dem Probierofen in Fluss. Ist derselbe beendigt, so wird der Tiegel bei Seite gesetzt und nachdem alles erkaltet ist, zerschlägt man die geschmolzene Masse mit dem Hammer, und wägt das erhaltene Metallkorn wieder auf der Probierwage ab. Zur Sicherheit macht man gewöhnlich zwei oder mehrere solche Proben und nimmt, wenn sich Unterschiede zeigen, das Mittel hievon. Das Verhältniss dieses Kornes zu dem eingesetzten Probierzentner gibt nun den Maasstab zur Bestimmung der Schmelzwürdigkeit des Erzes.

Da hiebei aus dem Kleinen auf das Grosse geschlossen wird, so sieht man von selbst, dass die Probierwage und die Probiergewichte möglichst genau und richtig seyn müssen. Es frägt sich daher noch, wie man so kleine Probiergewichte mit der erforderlichen Genauigkeit verfertigen könne. Diess geschieht durch Zertheilung eines feinen Drahtes, welcher seiner Natur nach, da er durch dieselbe Oeffnung durchgegangen ist, überall einen gleichen Durchmesser hat. Wägt man hievon ein halbes Loth ab, so erhält man einen Probierzentner, und wird dieser Draht nach Verhältniss seiner Länge in 4 gleiche Theile getheilt und zerschnitten, so gibt ein Stück 25 Probierpfunde. Um auch einzelne Probier-Pfunde zu erhalten, kann man entweder diese Stücke abermals theilen, oder man nimmt statt des stärkern Drahtes einen dünnern von gleicher Stärke, der nun abermals mit dem Zirkel nach Verhältniss seiner Länge getheilt wird. Hiemit fährt man so lange fort, bis man die erforderlichen kleinsten Unterabtheilungen eines Probierzentners erhalten hat. Es versteht sich von selbst, dass man die kleinen Theile sowohl gegen einander, als auch zusammen mit dem ungetheilten grössern Stücke abwägen, und sich von der Richtigkeit ihrer Gewichte überzeugen muss.

§. 199.

Man kann auf gleiche Art eine Probierwage zum Abwägen des Getreides einrichten. Das gesetzliche Getreidemaass in der östreichischen Monarchie ist der Nied. Oestr. Metzen, nämlich ein Cylinder, dessen Durchmesser 15 Zoll 5 Linien 2 Punkte, und dessen Höhe 18 N. Oe. Zoll beträgt. Der Metzen wird eingetheilt in zwei halbe Metzen = 4 Viertel = 8 Achtel = 16 Massel = 32 Halbmassel = 64 Futtermassel = 128 Becher = 256 halbe Becher = 512 Viertel-Becher = 1024 Achtel-Becher oder Getreidprobemetzen. Dem zu Folge lässt man ein Gefäss verfertigen, welches der Gewichtsbestimmung des Getreides zum Grunde gelegt wird, und den 1024ten Theil von einem Metzen hält; die Maasse dieses Gefässes werden erhalten, wenn man die für den Durchmesser und die Höhe eines Metzens angeführten Maasse mit der Kubikwurzel aus 1024 oder mit $10{,}0794$ dividirt.

Nunmehr muss das hiezu nöthige Probiergewicht gleichfalls der 1024$^{\text{te}}$ Theil eines Pfundes seyn; es wird daher 1 Loth Krämergewicht gerade 32 Probier-Pfund betragen, da 32mal 32 = 1024 ist, eben so wird ½ Loth genau 16 Pfunde, ¼ Loth genau 8 Pfunde u. s. w. vorstellen.

Das Abwägen geschieht nunmehr mittelst einer kleinen Krämerwage, in deren Schalen der abgewogene und abgestrichene Probemetzen hineingeschüttet wird. Man pflegt solche Wagen zum Verkaufe zu verfertigen, die von den Getreidehändlern, militärischen Verpflegsbeamten etc. in der Tasche getragen werden.

§. 200.

Die zweite Art der verjüngten Wagen sind Krämerwagen mit ungleichen Hebelsarmen. Ist z. B. die Länge des einen Wagebalkens = 1 und des andern = 10, so stehen auch bei einer solchen Wage 10 Pfund mit 1 Pfund im Gleichgewichte, man kann daher die Waaren mit 10mal kleinern Gewichten abwägen. Es versteht sich jedoch von selbst, dass hiebei der Schwerpunkt des Wagebalkens in der senkrechten Richtung unter der Achse liegen müsse. Man kann auf diese Art die Hebelsarme nach den verschiedenen Zwecken der Wage einrichten.

§. 201.

Die in Schweden gebräuchliche Schiffswage wird zur Wägung grosser Schiffslasten verwendet, und besteht aus einem doppelten Hebel. Die Einrichtung derselben
Fig. 21. Tab. 9. ersieht man aus Fig. 21. In dem hölzernen Gerüste ABCD kann der Balken oi hinauf und herabbewegt, und hiemit die ganze Wage, deren Achsen an den eisernen Stangen ag und eh befestigt sind, gehoben oder gesenkt werden. Das Erstere geschieht, wenn die Waare auf die Wagschale aufgelegt ist, und gewogen werden soll; das Zweite, wenn die Abwägung bereits statt hatte. Die Wage ist in der Figur im aufgezogenen Zustande dargestellt. Der Balken oi hängt in n und h an zwei Seilen ln und kh, welche über die Rollen k, l, m gehen und auf der Welle des Rades ps aufgewunden werden. Zur Erleichterung dieses Aufwindens wird das Rad ps durch das Getriebe r mittelst des Kurbelarmes rq in Bewegung gesetzt. Der Sperrkegel pt verhindert das Zurückgehen der Seile. Will man den Balken oi und mittelst desselben die Wage herablassen, so wird der Sperrkegel ausgehoben, und der Kurbelarm zurückbewegt. Der horizontale Stand des obern Wagebalkens df wird durch die winkelrecht daran befestigte Zunge eu, welche mit der Verlängerung der senkrechten Stange he einspielen muss, erkannt und hiedurch die horizontale Stellung des untern Wagebalkens ac hergestellt.

Ist die Wage aufgezogen, so wirkt die Last W an dem Hebel der zweiten Art ac, und zieht mittelst der Verbindungsstange cd den Hebel der ersten Art df herunter, an dessen längern Arme das erforderliche Gewicht P in der Wagschale aufgelegt wird. Nennen wir die Kraft, womit die Verbindungsstange cd herabgezogen wird = K,

$$\text{so ist } K : W = ab : ac$$
$$P : K = de : ef,$$
$$\text{folglich } P : W = ab \,.\, de : ac \,.\, ef, \text{ d. h.}$$

es verhalten sich die Gewichte, wie verkehrt die Produkte aus ihren Hebelsarmen. Wäre

z. B. ac = 10. ab und ef = 10. de, so ist P : W = 1 : 100. Es wird daher das Gewicht einer Tonne von 2000 ℔ = W durch ein 20 ℔ schweres Gewicht = P abgewogen werden. Hiebei ist jedoch auf das Gewicht der Hebel selbst noch keine Rücksicht genommen, da dieselben bei dieser Wage durch angebrachte Gegengewichte ausgeglichen werden. Da übrigens das Verhältniss der Hebelsarme willkührlich ist, so kann diese Wage nach dem jedesmaligen Zwecke eingerichtet werden.

§. 202.

In England werden die Strassenmäuthe nach Verhältniss der Schienenbreite der Räder und des Gewichtes der Wägen sammt Ladung bezahlt, und zu diesem Behufe die Wägen vor den Mauthgebäuden auf eigends hiezu erbauten Strassen- oder Mauthwagen abgewogen. In Frankreich werden gegenwärtig zwar keine Strassenzölle entrichtet, aber die Wägen werden auf gleichen Wagen abgewogen, um sich zu überzeugen, ob die nach Verhältniss der Schienenbreite gesetzlich bestimmte Ladung nicht überschritten werde. Auch in einigen deutschen Staaten bestehen ähnliche Einrichtungen.

Um das Abwägen zu beschleunigen, sind vor den Mauthhäusern bewegliche Brücken nach Verhältniss der gewöhnlichen Länge und Breite der Wägen angebracht, und diese Brücken mit der Strasse in gleiche Höhe gelegt, damit jeder Wagen ohne Anstand darauf fahren kann. Unterhalb der Brücke befindet sich ein Mechanismus, welcher in das Zimmer des Mauthners reicht, und ihn in den Stand setzt, das Gewicht des vorgefahrnen beladenen Wagens zu erkennen, ohne das Zimmer zu verlassen.

Der Mechanismus aller dieser Strassen- oder Mauthwagen besteht aus einer Verbindung mehrerer Hebel, die am Ende entweder mit einer verjüngten Wage oder Schnellwage oder auch mit einer Zeigerwage vereinigt sind. Von den verschiedenen bisher gebräuchlichen Strassenwagen enthält Tab. 10 eine der vorzüglichern. Hievon ist Fig. 1 der Längendurchschnitt, welcher durch die Brücke in der Richtung der im Grundrisse (Fig. 3) angezeigten Linie AB und vor der Wage in der Linie CD (Fig. 2) genommen wurde. Den Grundriss innerhalb des Mauthgebäudes enthält Fig. 2, und jenen der Brücke ausserhalb des Gebäudes Fig. 3. In Fig. 4 erscheint der Querdurchschnitt, welcher in der Richtung EFGH, welche im Grundrisse (Fig. 2 und 3) angezeigt ist, aufgenommen wurde. Die weitern Fig. 5 bis 16 enthalten die einzelnen Bestandtheile der Wage im dreimal grössern Maasstabe. Fig. 1 bis 16. Tab. 10.

Fig. 1 und 4 zeigen die Brücke aa, welche aus einem aus stärkern Zimmerholze verfertigten Rahmen besteht, der mit Pfosten bedeckt und mit Eisenschienen (gewöhnlich von 6 zu 6 Zoll Entfernung) zu dem Behufe übernagelt ist, damit die Wägen auf der Brücke an jedem Punkte ruhig stehen bleiben können. Dieser Rahmen sitzt an seinen beiden Enden a, a auf vier eisernen Hebeln bcd von gleicher Länge und hinlänglicher Stärke auf, wovon immer zwei so verbunden sind, wie es Fig. 3 in der obern Ansicht und Fig. 5 in derselben Ansicht jedoch im dreifachen Maasstabe zeigt. Fig. 6 enthält das Profil des Hebels bcd mit den drei daran befindlichen Achsen. Ein jeder von diesen zwei doppelarmigen Hebeln hat den Unterstützungspunkt in c, und ruht auf den Pfannen y, y,

Fig. 1 bis 16. Tab. 10. welche Fig. 12 im Grundrisse und Fig. 13 im Durchschnitte zu sehen sind. Fig. 11 enthält die untere Ansicht der Verbindungsstange der zwei Hebel mit den hiebei ersichtlichen schneidigen Achsen c, c, die in den Pfannen y, y ruhen. Die Pfannen selbst sind auf den unter der Brücke angebrachten festen Gestellen c c', c c' befestigt, welche Fig. 1 zu sehen sind.

Die zwei oben genannten doppelarmigen Hebel sind (Fig. 1) bei d, d mittelst der in e vereinigten Zugstangen d e f verbunden; die Zusammensetzung der letztern ist Fig. 14 und 15 in der Ansicht und im Profile dargestellt. Diese Zugstangen sind in f mit dem Hebel f i (Fig. 4) durch eine Achse verbunden; dieser Hebel hat seinen Unterstützungspunkt in h, und ist Fig. 7 und 8 im Profile und Grundrisse dargestellt. Die Achse ist mittelst der Zugstange i k (Fig. 4), welche Fig. 16 am obern und untern Ende in der Längen- und Seitenansicht gezeichnet ist, mit dem Ende k des Wagebalkens der Schnellwage o k (Fig. 1) verbunden. Der Wagebalken selbst hängt an der Stange m l (Fig. 1), die im Gebäude befestigt ist. Um die Seitenschwankungen des Wagebalkens der Schnellwage bei o zu verhindern, ist daselbst eine Gabel angebracht, welche jedoch den für die Spielungen erforderlichen Zwischenraum haben muss.

Im gewöhnlichen Zustande sitzt die Brücke an ihrer Peripherie auf einem hinlänglich festen Rahmen (Fig. 1 u. 4) w w auf, und wird erst dann frei gemacht, d. h. um zwei oder drei Zolle gehoben, wenn der abzuwägende Wagen bereits aufgefahren ist. Diess hat den Zweck, sowohl die Achsen während der Zeit, als der Wagen auffährt, zu schonen, als auch die in einem solchen Falle eintretenden übermässigen Schwingungen zu vermeiden. Die Vorrichtung, welche zu diesem Zwecke angebracht ist, besteht bloss aus dem Baume g g' g'' (Fig. 1 und 4), welcher bei g' (Fig. 4) die Achse h des Hebels f i trägt. An dem Ende des Baumes ist eine Schraubenmutter angebracht, wodurch die Schraube p t' die Fig. 9 besonders gezeichnet ist, geht. Diese Schraube wird durch den Bügel $\alpha\,\beta\,\gamma$ am Boden gehalten. Mit dieser Schraube ist das Rad q r fest verbunden; in dieses greift ein Getriebe r s ein, dessen Spindel von t bis u (Fig. 4) geht, und bei u durch die Kurbel v bewegt wird. Dreht man nämlich diese Kurbel herum, so werden die Räder r s und r q sammt der Schraube p t' bewegt, folglich der Hebebaum g g' g'' bei g'' gehoben oder herabgelassen.

Soll die Brücke, nachdem der Wagen aufgefahren ist, von dem untern Rahmen w w frei gemacht oder gehoben werden, so müssen, wie man am besten Fig. 1 sieht, die Achsen b, b am Hebel b c d gehoben, folglich die Punkte d, d sammt dem Zugwerke d f und h g' (Fig. 4) herabgedrückt werden. Diess geschieht immer so weit, bis der Hebebaum in g'' auf x x (Fig. 9) aufsitzt. Ist diess der Fall, so wird das Laufgewicht an der Schnellwage verschoben und das Abwägen wie gewöhnlich vorgenommen. Ist das letztere beendigt, so lässt man die Brücke durch die entgegengesetzte Bewegung wieder so weit herab, bis die Stange i k (Fig. 4) nicht mehr gespannt ist, folglich die Brücke auf dem Rahmen w w wieder aufsitzt.

Um endlich zu verhüthen, dass die Brücke bei dem Auffahren des Wagens aus den Pfannen der darunter befindlichen Hebel b c d verrückt werde, sind noch zu beiden Seiten des Rahmens zwei eiserne, an beiden Enden mit Oehren versehene Stangen, die in der Zeichnung nicht erscheinen, nach der Länge der Brücke so angebracht, dass der durch

ein Oehr gehende Nagel in dem nächsten Zimmerwerke und der Nagel, der durch das andere Oehr geht, in dem Rahmen der Brücke befestigt ist, wodurch also die horizontale Verschiebung der Brücke nach ihrer Länge gehindert wird, jedoch die senkrechte Bewegung derselben bei dem Abwägen vollkommen frei bleibt.

§. 203.

Wir wollen nunmehr berechnen, wie eine solche Strassenwage angeordnet, d. h. die Grösse der einzelnen Theile derselben bestimmt wird, um den vorhandenen Zweck der Abwägung mit der erforderlichen Genauigkeit zu erreichen. Um diese Rechnung zu erleichtern, sind Fig. 17 die Hauptbestandtheile der Wage in einfachen Linien dargestellt worden. Fig. 17. Tab. 10.

Zu diesem Behufe wollen wir zuerst zeigen, dass der Standort des Wagens auf der Brücke willkührlich ist, und keinen Einfluss bei dem Abwägen verursacht. Wir haben bereits im vorigen §. bemerkt, dass die vier unter der Brücke angebrachten Hebel b c d von gleicher Länge sind, und dass sie die gemeinschaftliche Zugstange d f, welche mit der Schnellwage in weiterer Verbindung steht, hinaufziehen. Der Druck auf diese Hebel oder auf die vier Punkte b, b′, b″, b‴ rührt offenbar von dem Gewichte der Brücke (B) und dem Gewichte des Wagens (W) her; wir können ihn daher in vier Theile w, x, y, z zertheilen, welche die Drücke auf die vier Hebel unter der Brücke bezeichnen, so dass $W + B = w + x + y + z$. (I).

Ein jeder dieser Theile hebt mit einer zugehörigen Kraft die Zugstange d f in die Höhe, nämlich w mit der Kraft $= p$, x mit q, y mit r und z mit der Kraft s; die ganze Kraft aber, womit d f in die Höhe gezogen wird, nennen wir T, welches daher $= p + q + r + s$. (II). Wir erhalten demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} w.bc = p.dc \\ x.b'c' = q.dc' \\ y.b''c'' = r.dc'' \\ z.b'''c''' = s.dc''', \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{und da } bc = b'c' = b''c'' = b'''c''' \\ \text{und } dc = dc' = dc'' = dc''', \end{array}$$

so erhalten wir $(w + x + y + z)\,bc = (p + q + r + s)\,dc$,
und substituirt, $(W + B)\,bc = T.dc$. Hieraus ergibt sich die ganze Kraft, womit die Stange d f in die Höhe gezogen wird, $T = \left(W + B\right)\frac{bc}{dc}$ (III); man sieht daher, dass diese Kraft immer dieselbe bleibt, der Wagen mag stehen, wo er wolle. Dasselbe ist der Fall, wenn z. B. die hintern Räder des Wagens mehr beladen sind als die vordern; die Stange d f wird immer mit einer Kraft in die Höhe gezogen, die bloss von dem ganzen Gewichte des Wagens und nicht von dem Drucke der einzelnen Räder abhängig ist. Hiebei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Hebelsarme b c und d c bei allen vier Hebeln genau dieselbe Länge haben, weil sonst durch die Stellung des Wagens eine Veränderung der Zugkraft T bewirkt würde.

Die Kraft T wirkt an dem Hebel der ersten Art f i; nennen wir daher die Kraft, womit die Stange k i herunter gezogen wird $= S$, so ist $T.fh = S.hi + M.m$, wo M das Gewicht des Hebels und m die Entfernung seines Schwerpunktes von der Achse bedeutet. Substituirt man aus der Gleichung III den Werth für T, so ist

Fig. 17. Tab. 10. $\left(W + B\right)\frac{bc}{dc} \cdot fh = S.hi + M.m$ (IV), woraus $S = \left(W + B\right)\frac{bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi} - \frac{M.m}{hi}$. Ist nun das Gleichgewicht an der Schnellwage durch die gehörige Verschiebung des Laufgewichtes bis n bewirkt worden, so haben wir abermals $S.km = P.mn + N.n$, wenn wir das Gewicht des Wagebalkens mit N auf der Entfernung n annehmen. Wird hierin der Werth für S substituirt, so ist $\left\{\left(W + B\right)\frac{bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi} - \frac{M.m}{hi}\right\} km = P.mn + N.n$ (V).

Nehmen wir nun an, das Laufgewicht stünde in n′, wenn die Brücke unbelastet, folglich $W = 0$ ist, so erhalten wir $\left\{B \cdot \frac{bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi} - \frac{M.m}{hi}\right\} km = P.mn' + N.n$ (VI), und wird diese Gleichung von der vorhergehenden abgezogen, so ist $\frac{W.bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi} \cdot km = P\,(mn - mn') = P.n'n$ (VII); d. h. das Gewicht der Waare W multiplicirt mit den Verhältnissen der Hebelsarme $\frac{bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi}$ und dem kürzern Hebelsarme km der Schnellwage ist = dem Laufgewichte P multiplicirt mit der Verschiebung n′n. Wir haben daher hier denselben Satz wie §. 181 bei der Schnellwage, nur erscheint hier die Spannung der Stange ki als Last.

Bei dieser Rechnung ist in der Gleichung VI vorausgesetzt, dass entweder alle Hebel sammt den Zugstangen und dem Gewichte der Brücke einander das Gleichgewicht halten, oder wenn diess nicht der Fall wäre, dass selbe durch Gegengewichte so ausgeglichen werden, damit, wenn das Laufgewicht bei dem Nullpunkte der Skale in n′ steht, die unbelastete Brücke mit dem Hebelwerke im Gleichgewichte ist, folglich der Wagebalken horizontal steht.

Beispiel. Es sey eine Brückenwage zu verfertigen, worauf bis 200 Zentner gewogen werden können, und ein Zentner durch eine Verschiebung des Laufgewichtes von ½ Zoll ausgedrückt wird.

Nehmen wir das Verhältniss der Hebelsarme $\frac{bc}{dc} = \frac{1}{5}$ und $\frac{fh}{hi} = \frac{1}{20}$ an, so ist nach VII: $W.\frac{1}{5}.\frac{1}{20}.km = P.n'n$ oder $P : \frac{W}{100} = km : n'n$, d. h. wie vielmal das Laufgewicht P kleiner ist als $\frac{W}{100}$, eben so oft muss auch der kürzere Hebelsarm km der Schnellwage in der Länge der Skale n′n enthalten seyn. Nach der Bedingniss der Construction muss für W = 200 Zentner, die Länge der Skale $n'n = 200.\frac{1}{2} = 100$ Zoll betragen; demnach ist $P : \frac{200}{100} = km : 100$, woraus $P = \frac{2.km}{100}$ Zentn. = 2.km ℔ folgt. Ist nun die Schnellwage bereits fertig, so misst man die Länge von km, und gibt dem Laufgewichte so viel Pfunde, als 2.km ganze Zolle misst. Ist dagegen die Wage erst zu konstruiren, so kann man km annehmen, und hiernach die Grösse des Laufgewichtes berechnen. Ist z. B. km = 10 Zolle, so muss ein Laufgewicht P = 2.10 = 20 ℔ genommen werden. Uiberhaupt gibt die Gleichung VII die Einrichtung dieser Wage an, wobei immer solche Werthe genommen werden müssen, welche den Umständen entsprechen.

Noch ist hier zu bemerken, dass man lange Bauholzwägen, deren vier Räder auf der Brücke nicht Raum finden, in der Art wägt, dass zuerst die vordern zwei Räder auf die Brücke fahren, daselbst gewogen werden, sodann die hintern Räder ebenfalls auffahren und gleichfalls gewogen werden. Die Summe beider erhaltenen Gewichte gibt das ganze Gewicht des Bauholzwagens sammt Ladung.

§. 204.

Wir haben §. 202 angeführt, dass die Brücke, wenn der Wagen bereits aufgefahren ist, um einige Zolle gehoben, und auf solche Art von dem Rahmen frei gemacht werden muss, auf welchem sie an ihrem Umfange ruht. Es handelt sich nun, die zu diesem Zwecke anzubringende, bereits beschriebene Vorrichtung so herzustellen, dass ein Mann mit Anwendung seiner mittlern Kraft die beladene Brücke heben und senken könne. Fig. 1. und 4. Tab. 10.

Da das Gewicht der Brücke durch das am Hebelsarme fh angebrachte Gegengewicht ausgeglichen wird, so ist die Zugkraft T bei d, $= W \cdot \frac{bc}{dc}$ und in dem angenommenen Beispiele $= \frac{W}{5}$. Die Zugkraft S bei i ist $= W \cdot \frac{bc}{dc} \cdot \frac{fh}{hi} = \frac{W}{5} \cdot \frac{1}{20} = \frac{W}{100}$. Die Summe von beiden oder $\frac{W}{5} + \frac{W}{100} = \frac{21}{100} \cdot W$ muss der Kraft gleich seyn, womit der Hebebaum $g\,g'\,g''$ in g' Widerstand leisten muss. Es wird also, wenn $\frac{g\,g'}{g\,g''} = \frac{2}{5}$ ist, die hiezu in g'' nöthige Kraft $= \frac{21}{100} \cdot W \cdot \frac{g\,g'}{g\,g''} = \frac{21}{100} \cdot W \cdot \frac{2}{5} = \frac{42}{500} \cdot W$ seyn.

Mit dieser Kraft muss die Schraube widerstehen; es wird sich daher die Kraft (k) an der Peripherie des Rades q r zur Last $\left(\frac{42}{500} \cdot W\right)$ eben so verhalten, wie die Höhe eines Schraubengewindes (h) zur Peripherie des Rades $\frac{22}{7} \cdot 2 \cdot t'r = \frac{22}{7} \cdot 2\,A$ oder Fig. 9.
$k : \frac{42}{500} \cdot W = h : \frac{22}{7} \cdot 2\,A$. Ferner verhält sich (Fig. 4) die Kraft K an der Peripherie des Kurbelarmes v zur Kraft (k) an der Peripherie des Rades q r wie der Halbmesser t s ($=a$) zu u v ($=b$) oder $K : k = a : b$. Aus diesen zwei Proportionen folgt $K : \frac{42}{500} \cdot W = h . a : \frac{22}{7} \cdot 2\,A . b$ und daher die zur Bewegung der Kurbel erforderliche Kraft $K = \frac{42}{500} \cdot W \cdot \frac{h\,.\,a}{{}^{22}\!/_{7}\,.\,2\,A\,.\,b}$. Weil sich aber $A : a$ wie die Anzahl der Zähne Z an dem Rade zur Anzahl der Zähne z an dem Getriebe verhält, so ist auch $K = \frac{42}{500} \cdot W\, \frac{h\,.\,z}{{}^{22}\!/_{7}\,.\,2\,b\,.\,Z}$. Nimmt man nun die Höhe des Schraubengewindes $h = 1$ Zoll und den Halbmesser der Kurbel $b = 7$ Zoll, dann $z : Z = 1 : 2$ an, so ist die Kraft, welche zum Aufziehen der mit 200 Zentner belasteten Brücke erfordert wird,
$K = \frac{42}{500} \cdot 20000 \,.\, \frac{1}{{}^{22}\!/_{7}\,.\,2\,.\,7} \cdot \frac{1}{2} = 19{,}1$ ℔, welches also keinem weitern Anstande für einen Menschen unterliegt.

§. 205.

Wenn die Strassenwage mit keiner Schnellwage, sondern mit einer verjüngten Wage in Verbindung ist, unterliegt die Berechnung und Anordnung derselben ebenfalls keiner Schwierigkeit. Wir haben §. 203 die Kraft, womit die Stange k i herabgezogen wird, $S = \left(W + B\right)\frac{bc}{dc}\cdot\frac{fh}{hi} - \frac{M.m}{hi}$ gefunden. Nehmen wir an, die Wagschale hänge an o, so muss daselbst, wenn nicht das Gewicht der leeren Brücke und der Hebelsarme durch ein bei f angebrachtes Gegengewicht ausgeglichen ist, nunmehr bei o ein Gewicht N angebracht seyn, welches beständig zur Herstellung des Gleichgewichtes mit allen Bestandtheilen der Maschine benöthigt wird, und ein weiteres Gewicht P, welches rücksichtlich der Belastung der Brücke zugelegt wird. Diese zwei Gewichte N + P müssen demnach mit S im Gleichgewichte stehen oder $\left(N + P\right) om = S . mk$ und substituirt $\left(N + P\right) om = \left(W + B\right)\frac{bc}{dc}\cdot\frac{fh}{hi}\cdot mk - \frac{M.m}{hi}\cdot mk.$
Da nun anfangs N mit der unbelasteten Brücke im Gleichgewichte stand, so ist, wenn man $W = 0$, folglich auch $P = 0$ setzt, $N . om = B\cdot\frac{bc}{dc}\cdot\frac{fh}{hi}\cdot mk - \frac{M.m}{hi}\cdot mk$. Subtrahirt man diese zwei Gleichungen von einander, so ist $P . om = W\cdot\frac{bc}{dc}\cdot\frac{fh}{hi}\cdot mk$, woraus $P = W\cdot\frac{bc}{dc}\cdot\frac{fh}{hi}\cdot\frac{mk}{om}$ folgt. Diese Gleichung ist abermals sehr einfach, da in ihr weder das Gewicht eines Hebels, noch jenes der Brücke vorkommt. Macht man aus ihr eine Proportion, so ist $P : W = bc . fh . mk : dc . hi . om$; d. h. es verhält sich wieder die Kraft zur Last, wie die Produkte der Hebelsarme von Seite der Last zu den Produkten der Hebelsarme von Seite der Kraft.

Beispiel. Es sey wieder $dc = 5 . bc$, $hi = 20 . fh$ und $om = 2 . mk$, so ist $W = 200 P$, folglich steht in diesem Falle ein halbes Pfund mit einem Zentner im Gleichgewichte. Auf dieselbe Art lässt sich auch eine jede andere Verjüngung herstellen.

§. 206.

Bedient man sich endlich einer Wage mit einem Zeiger, so ist die Berechnung gerade dieselbe, und unterliegt keiner weitern Schwierigkeit.

Uibrigens ist hier für die Anordnung einer Brückenwage noch zu bemerken, dass der Hebebaum $g g' g''$ bei g ein Gewicht zu unterstützen habe, welches $= \frac{21}{100}\cdot W\cdot\frac{g'g''}{gg''} = \frac{21}{100}\cdot W\cdot\frac{3}{5}$ ist. Beträgt daher W = 200 Zentner, so muss der Punkt g durch eine Kraft $= \frac{21}{100}\cdot 200\cdot\frac{3}{5} = 25,2$ Ztr. gehalten werden; das Mauerwerk muss demnach in g einen eben so grossen Widerstand leisten, welches durch die in Fig. 4 ersichtlichen Schliessen bewirkt wird.

Auf gleiche Art müssen auch die Füsse des Bügels $\alpha\beta\gamma$, durch welchen die Schraube $p t'$ gegen den Boden herabgedrückt wird, mit einer Kraft am Boden gehalten werden.

welche $= \frac{W + B}{100}$ ist; wäre jedoch das Gewicht (B) der Brücke durch ein Gegengewicht am Hebelsarme fh ausgeglichen worden, so beträgt die Kraft bloss $\frac{W}{100}$.

§. 207.

Wenn bedeutende Lasten auf einer Krämer- oder Schnellwage abgewogen werden, so ist immer der Nachtheil dabei vorhanden, dass das Auflegen der abzuwägenden Gegenstände mit Unbequemlichkeit verbunden ist und das Aufhängen und Aufziehen der Krämer- oder Schnellwage eigene Gerüste erfordert. Zur Abhülfe dessen sind mehrere Mechanismen vorgeschlagen worden, wovon einer von dem verstorbenen Mechaniker *A. Quintenz* in Strassburg angegeben, und von seinen Nachfolgern Hrn. *Fr. Rolle* und *Schwilgue* verbessert worden ist. Die hiernach verfertigten Wagen sind unter dem Namen der tragbaren Brückenwagen bekannt, und werden immer mehr und mehr von dem Handelsstande in Deutschland und Frankreich gebraucht. Man findet sie vorzüglich in der Schweitz sehr häufig, und ist überall mit der Genauigkeit ihrer Construction und der Bequemlichkeit, welche sie beim Abwägen gewähren, sehr zufrieden. Uiberdiess werden diese Wagen zu einem Preise von den Hrn. *Rolle* und *Schwilgue* in Strassburg bezogen, welcher ihre allgemeine Einführung sehr empfiehlt; es dürfte daher den Lesern dieses Werkes nicht unangenehm seyn, eine genaue Kenntniss von der Construction dieser Wagen, die gegenwärtig in jeder Grösse zum Abwägen aller Gattungen Waaren, so wie zum Abwägen geladener Wägen, des Schlachtviehes etc. verwendet werden, zu erhalten.

Die Darstellung einer solchen Wage mit einer 4 Fuss 5 Zoll langen, dreieckigen Brücke und allem hiezu gehörigen Detail enthält Tab. 11. Sie besteht, wie alle andern Wagen dieser Art, aus einer Brücke, die mittelst einer besonderen Hebelvorrichtung mit einer Wagschale in Verbindung steht, mittelst welcher die auf der Brücke befindliche Waare durch Auflegung verjüngter Gewichte gewogen wird. Fig. 1 enthält die Längenansicht und Fig. 2 den Längendurchschnitt, welcher in der Richtung A B C D E F des Grundrisses Fig. 3 genommen wurde. Fig. 4 stellt die untere Fläche der Brücke und Fig. 5 den Durchschnitt derselben in der Richtung G H vor; endlich enthalten Fig. 6 bis 20 die einzelnen Bestandtheile der Wage im doppelten Maasstabe. Fig. 1 bis 20. Tab. 11.

Fig. 1, 2, 3, 4 und 5 zeigen die Brücke a, welche aus einem von starken Pfosten verfertigten Rahmen besteht, der mit Bretern belegt, und mit Eisenschienen benagelt ist. Diese Brücke ist im Punkte b (Fig. 2 und 4) mit einem Haken, und in den Punkten c, c' mit zwei Pfannen versehen, welche an einer eisernen, zur Befestigung des Rahmens der Brücke unterhalb angebrachten und an demselben in d, d' angeschraubten Stange dd' befestigt sind. Die Brücke wird an dem einen Ende mittelst des Hakens b an die Zugstange b e (Fig. 1 und 2) eingehängt, und die am andern Ende derselben angebrachten Pfannen c, c' werden auf die unterhalb der Brücke am Hebel h c i (Fig. 15 und 16) befestigten scharfen Achsen in c, c' gelegt.

Der Hebel h c i (Fig. 15 und 16) besteht aus zwei Armen, welche an dem einen Ende in den Punkten i, i' mit der Stange g g' verbunden, und an dem andern Ende bei z z' zusammengeschraubt sind. An diesem Hebel h c i kommen drei schneidige Achsen vor, wovon die erste

Fig. 1 bis 20. Tab. 11. in h, die zweite in c und c' und die dritte am Ende der Verbindungsstange in g, g' (Fig. 16 u. 17) angebracht ist. Die Achsen g und g' ruhen in den Pfannen (Fig. 18 und 19) und bilden den Umdrehungspunkt des Hebels h c i; auf den Achsen c, c' liegt die Brücke a, und die Achse h hängt an der Zugstange h k (Fig. 1 und 2).

Die Zugstangen b e und h k, wovon die erstere die Brücke, und die letztere den Hebel h c i trägt, hängen an den schneidigen Achsen e und k (Fig. 1 und 2) an den Hebelsarmen o e und o k des Wagebalkens f o k. Der letztere hat nämlich seinen Umdrehungspunkt in o und trägt auf der Achse f die Wagschale q r. An demselben Wagebalken ist in s eine Zunge angebracht, deren Uibereinstimmung mit der gegenüberstehenden festen Spitze s' den horizontalen Stand des Wagebalkens anzeigt.

Um ausser dem Gebrauche der Wage die Schärfen der Achsen durch die Schwingungen der Brücke und der Wagschale nicht zu beschädigen, wird der Wagebalken durch den Hebel t t' t'' (Fig. 1 und 20), an welchem im Punkte t' eine Rolle angebracht ist, gehoben, und dadurch die zwei Achsen bei e und k so weit gelüftet, als es nöthig ist, damit durch das Herabgehen der Stangen e b und k h und des Hebels h c i die Brücke in den Punkten u und v (Fig. 4) auf kugelförmigen Knöpfen u und v' (Fig. 3) und auf dem Ansatze w (Fig. 2) aufsitze.

Fig. 6 und 7 zeigt die Ansicht und den Durchschnitt des obern Theiles der Zugstange k h; dasselbe zeigt Fig. 8 und 9 für die Zugstange e b. Beide Stangen sind unten mit der Brücke und dem Hebel h c i (Fig. 15) durch ein ähnliches Gehänge verbunden, wie es Fig. 6 und 7 angezeigt ist. Die Ansicht und den Grundriss des Wagebalkens enthält Fig. 10 und 11; weiters zeigt Fig. 12 und 13 die Ansicht und den Durchschnitt der Unterstützung der Pfanne, in welcher die Achse o des Wagebalkens ruht. Fig. 14 zeigt sowohl die Ansicht der Pfanne von vorn, als auch den Durchschnitt des Wagebalkens vor der Pfanne. Fig. 15 und 16 enthält die Längenansicht und den Grundriss des zweiarmigen Hebels h c i. Fig. 17 zeigt die untere Ansicht der Verbindungsstange g g', Fig. 18 und 19 endlich den Grundriss und Aufriss der Pfanne.

Die Wage wird so adjustirt, dass die unbelastete Brücke für sich selbst im Gleichgewichte ist; wäre diess jedoch nicht der Fall, so muss man vor dem Abwägen einer Waare in die Schale y (Fig. 1, 2 und 3) so viel Gewichte hinein legen, bis der Zeiger s für die unbelastete Brücke einspielt.

§. 208.

Fig. 21. Um das **Verhältniss des Gewichtes der Waare W zu dem in der Wagschale aufgelegten Gewichte** p zu bestimmen, ist in Fig. 21 die ganze Wage mit einfachen Linien dargestellt worden. Wir nehmen an, die Waare ruhe auf irgend einem Punkte a der Brücke, das eigenthümliche Gewicht der Brücke mit allen hiezu gehörigen Bestandtheilen sey = B, und der Schwerpunkt derselben befinde sich in dem Punkte m. Die Brücke b n ruht bei n auf dem Punkte c des Hebels h c i, welcher mit dem Wagebalken durch die Zugstange h k verbunden ist; das vordere Ende der Brücke ruht auf dem Punkte b und ist mit dem Wagebalken durch die Zugstange b e gleichfalls verbunden; endlich sind o und i die zwei festen Umdrehungspunkte für den Wagebalken f o k und den untern Hebel h c i.

Da die Brücke auf den zwei Punkten n und b ruht, so drückt von der Waare W nach der Lehre vom Hebel auf den Punkt n nur die Last $\frac{W.ba}{bn}$ und auf den Punkt b der Theil $\frac{W.an}{bn}$. $\left(\text{Beide Theile machen zusammen } \frac{W.ba}{bn} + \frac{W.an}{bn} = W\right)$. Eben so drückt von dem eigenthümlichen in m befindlichen Gewichte B der Brücke auf den Punkt n die Last $\frac{B.bm}{bn}$ und auf den Punkt b die Last $\frac{B.mn}{bn}$. (Beide zusammen machen wieder B). Demnach haben wir am Punkte b die Last $\frac{W.an}{bn} + \frac{B.mn}{bn}$, mit welcher die Zugstange be herabgezogen wird; (I).

Da der Punkt n die Last $\frac{W.ba}{bn} + \frac{B.bm}{bn}$ trägt, und auf den untern Hebel hi im Punkte c gleich stark drückt, so muss der Endpunkt h dieses Hebels von einer Kraft unterstützt werden, welche $= \left(\frac{W.ba}{bn} + \frac{B.bm}{bn}\right)\frac{ci}{hi}$ ist, und eben so stark wird die Zugstange kh herabgezogen (II).

Wir haben demnach an dem Wagebalken fok die zwei berechneten Gewichte, die in e und k herabziehen, und in f das Gewicht der Wagschale sammt Ketten (P) nebst dem auf dieselbe gelegten Gewichte p, welche einander um den Punkt o Gleichgewicht halten müssen; diess gibt sonach:

$(P+p)\,fo = \left(\frac{W.an}{bn} + \frac{B.mn}{bn}\right) oe + \left(\frac{W.ba}{bn} + \frac{B.bm}{bn}\right)\frac{ci}{hi} \cdot ok$. Aus dieser Gleichung ist nun zu ersehen, dass die Construction dieser Wage von den Faktoren oe und $\frac{ci}{hi} \cdot ok$ abhängt. Setzen wir dieselben einander gleich, oder $oe = \frac{ci}{hi} \cdot ok$ (III), so lassen sich nun die zwei Glieder der Gleichung addiren, und wir erhalten

$\left(P+p\right) fo = \left(\frac{W.an}{bn} + \frac{B.mn}{bn} + \frac{W.ba}{bn} + \frac{B.bm}{bn}\right) oe$, oder

$\left(P+p\right) fo = \left\{\frac{W(an+ba)}{bn} + \frac{B(mn+bm)}{bn}\right\} oe = \left(\frac{W.bn}{bn} + \frac{B.bn}{bn}\right) oe$, oder

$(P+p)\,fo = (W+B)\,oe$. (IV.)

In dieser Gleichung erscheint die Entfernung ba und ma nicht mehr; es folgt daher, dass es gleichgültig sey, in welchem Punkte der Brücke der abzuwägende Gegenstand aufgelegt werde. Diess findet jedoch in dem einzigen Falle statt, wenn $oe = \frac{ci}{hi} \cdot ok$, oder wenn die Hebelsarme $oe : ok = ci : hi$ sich verhalten. Diese Proportion gibt daher die erste Regel für die Construction dieser Wage an. Wie vielmal nämlich ok in oe enthalten ist, eben so oft muss hi in ci enthalten seyn, Wäre z. B. oe = 4 Zoll und ok = 20 Zoll, dann hi = 5 Fuss, so muss auch ci = $\frac{5}{5}$ = 1 Fuss seyn, wenn die Wage die Eigenschaft haben soll, dass die Waare in jeden beliebigen Punkt gestellt werden kann.

Bei allen Wagen dieser Art muss das Gewicht der Wagschale (P) mit dem Gewichte der Brücke (B) vollkommen ausgeglichen werden, wie bereits Seite 208 bemerkt

wurde. Setzen wir daher in der Gleichung IV das Gewicht p = 0, so ist auch W = 0, und daher substituirt, P . fo = B . oe. (V.)

Wird die Gleichung V von IV abgezogen, so bleibt p . fo = W . oe oder p : W = oe : fo (VI), d. h. wie vielmal der Hebelsarm oe kleiner ist als fo, eben so oft wird das Gewicht p in der Wagschale kleiner seyn, als die abzuwägende Waare W. Macht man daher z. B. den Hebelsarm oe zehnmal kleiner als den Hebelsarm fo, so zeigt 1 Pfund in der Wagschale genau 10 Pfund auf der Brücke an. Diese Brückenwage ist daher nichts anders, als eine verjüngte Wage mit ungleichen Hebelsarmen.

§. 209.

Die Federwagen gründen sich auf die Elasticität des Stahles und Eisens, vermöge welcher eine Stahlfeder sich durch einen Druck oder Zug zusammendrücken oder ausdehnen lässt, und nachdem die Ursache dieses Druckes zu wirken aufhört, sogleich in die vorige Lage zurück tritt. Es gibt verschiedene Gattungen Federwagen, wovon Fig. 1, 2 u. 3 jene darstellt, welche man in der Oekonomie beim Abwägen der Heu- und Strohbünde anwendet. Den Aufriss derselben enthält Fig. 1, die Seitenansicht Fig. 2 und die Vorrichtung des Zeigers ist Fig. 3 dargestellt. Diese Wage besteht aus einer Stahlfeder bfeda, dem Zeiger abc, und einer bei e befestigten Platte mnoc, worauf die Skale verzeichnet ist. Wird nun die Wage in f befestigt, oder daselbst mit der Hand gehalten und in g eine Waare angehängt, so werden die Punkte f und d der Stahlfeder auseinander gezogen, und dadurch der Punkt a, wo der Zeiger in einem Charniere befestigt ist, hinab und dagegen die Unterlage des Zeigers bei b, welcher daselbst durch eine Oeffnung r (Fig. 2) im obern Theile der Stahlfeder geht, hinauf gezogen; die Zahl wo der Zeiger an der Skale stehen bleibt, zeigt nunmehr das Gewicht der Waare an.

Fig. 1 bis 3. Tab. 12.

Um die Bewegung des Zeigers abc zu reguliren, pflegt man in h (Fig. 2) eine schwache Feder hir zu befestigen; dieselbe ist bei i spiralförmig gewunden und drückt bei r (Fig. 1 und 2) auf den Zeiger herab.

Die Eintheilung der Skale dieser Wage geschieht bloss durch Versuche; man hängt nämlich, wenn die Wage fertig ist, nach und nach die Gewichte von 5, 10 . . . ℔ an, und bemerkt denjenigen Punkt, wo der Zeiger bei einem jeden Gewichte stehen blieb; dieses Gewicht wird nun zu dem betreffenden Punkte zugeschrieben, und die Zwischenräume noch in einzelne Pfunde abgetheilt.

Solche Federwagen werden in der Oekonomie häufig gebraucht, jedoch gehen sie gewöhnlich nur bis zu 30 Pfund; sie gewähren den Vortheil, dass man mit denselben sehr schnell abwägen kann, dass die Wage wenig Raum einnimmt, und auch nicht viel kostet. Der Gebrauch derselben ist jedoch mit den Nachtheilen verbunden, dass man hiemit keine grosse Genauigkeit erreicht, weil die Abtheilungen in einzelne Pfunde oder halbe Pfunde zu klein sind, und weil auch die Feder im Sommer anders als im Winter zeigt, indem dieselbe durch die Kälte härter, durch die Wärme aber weicher wird; auch verliert die Feder mit der Zeit ihre Spannkraft. Man muss daher eine solche Wage zeitweise prüfen, indem man bekannte Gewichte anhängt, und nachsieht, ob sie durch die Wage noch gehörig angezeigt werden.

§. 210.

In der Oekonomie und bei praktischen Versuchen über das Fuhrwesen kommt häufig die Frage vor, wie gross die Kraft sey, welche die Pferde bei dem Gebrauche eines neuen Ackergeräthes, Wagens etc. anwenden müssen. In diesem Falle befestigt man an dem Reihnagel eine Federwage, und an diese erst werden die Zugthiere vorgespannt. Es ist offenbar, dass sodann das Gewicht, welches durch die Federwage angezeigt wird, auch die Kraft ausdrücken müsse, welche die Pferde bei ihrem Zuge anwenden. Man nennt diese Gattung Federwagen, Kraftmesser (*Dynamometer*), welche wieder auf verschiedene Art konstruirt sind.

Der Kraftmesser von *Regnier* in Paris ist Fig. 4 in der vordern Ansicht, Fig. 5 im Längendurchschnitte, Fig. 9 in der Seitenansicht, Fig. 10 im Grundrisse und Fig. 6, 7 und 8 in den einzelnen Theilen dargestellt. Er besteht aus einem gebogenen stählernen Ringe ABCDEF, und einer mit dem Arme ABCD bei K verbundenen messingenen Scheibe GHIM (Fig. 5), in deren Mittelpunkt der Zeiger bgh angebracht ist, welcher mit seiner Spitze an der Skale das Maass der Kraft andeutet, die zum Zusammendrücken oder Ausdehnen des Ringes angewendet wurde. Die Stütze ac ist um den Punkt a beweglich, und mit dem Winkelhebel cde verbunden, welcher sich um den Punkt d dreht, und an dessen Ende in e (Fig. 5, 9 und 10) ein Stift befestigt ist. Werden die Arme BC und FE der Feder gegen einander gedrückt, so wird auch der Punkt d (Fig. 5) dem a näher gebracht, die Stütze ac dreht also den Winkelhebel cde, welcher mittelst des Stiftes bei e den Zeiger bg fortschiebt und ihn zu der Zahl an der Skale gk stellt, welche dem angewandten Drucke entspricht. Bei f ist unterhalb dem Zeiger ein Tuchlappen angebracht, durch dessen Reibung auf der messingenen Scheibe GHIM der Zeiger an demjenigen Orte stehen bleibt, wohin er durch den Stift e verschoben wurde; der Zeiger geht sonach bei dem Aufhören des Druckes nicht mehr zurück, und zeigt bloss die grösste Kraft an, welche bei dem Gebrauche der Federwage angewendet wurde. Fig. 4 bis 10. Tab. 12.

Fig. 6 ist die Seitenansicht des Winkelhebels cde, welcher sich um die Achse oo′ dreht und bei c durch ein Charnier mit ca (Fig. 5) verbunden ist. Fig. 7 und 8 stellt die Längen- und Seitenansicht einer kleinen Platte vor, welche rückwärts am Kraftmesser angeschraubt ist, und in q das Lager für o trägt; das Lager für o′ befindet sich in der Schraube p, welche sammt dem übrigen Detail in der Seitenansicht Fig. 9 und dem Grundrisse Fig. 10 ersichtlich ist. Die vordere messingene Scheibe LL′K (Fig. 4) wird in L und L′ an die hintere (Fig. 5) GHIM angeschraubt.

Dieser Dynamometer wird auf zweifache Art gebraucht, indem man entweder BC gegen FE mit beiden Händen zusammendrückt und sonach die grösste Kraft des Händedruckes findet, oder indem derselbe bei A und D auseinander gezogen wird, wodurch sich abermals BC und FE nähern. Weil aber hiezu eine grössere Kraft erfordert wird, so ist eine zweite Skale hi ober der vorigen angebracht, und der Zeiger mit einer zweiten Spitze h versehen. Die untere Skale gk wird demnach nur im ersten Falle, wo man die Kraft des Händedruckes sucht, gebraucht. Fig. 4. Fig. 5.

Will man mit diesem Instrumente die Kraft bei einem Pferdezuge messen, so werden bei A und D zwei eiserne Ringe von der Form eingelegt, welche Fig. 11 in der vordern Ansicht und Fig. 12 im Grundrisse dargestellt ist. Dieses Einlegen geschieht durch die Eröffnung des Theiles c d, welcher in seiner Lage durch die Feder a b c festgehalten wird und dadurch, wenn er geschlossen ist, das Herausfallen dieses Ringes aus dem *Dynamometer* bei A und D verhindert. Nunmehr werden, wie es Fig. 15 dargestellt ist, an einem
Fig. 15. Tab. 12. Ringe, die Wage für die Pferde und an dem andern der Wagen angehängt; es zeigt daher der Zeiger an der äussern Skale h i die bei dem Zuge ausgeübte grösste Kraft der Pferde.

Will man die Last suchen, welche ein Mensch mit seinen beiden Armen zu heben im
Fig. 13. Stande ist, so wird die gezähnte eiserne Stange A B (Fig. 13) angewendet, welche unten mit einem Quereisen C D verbunden ist, worauf man die Füsse setzt. Hierauf wird das eine Ende
Fig. 14. A des Kraftmessers in einen Zahn, sodann der Haken A an der Handhabe B C (Fig. 14) an dem andern Ende D des Kraftmessers eingehängt, und nun mit beiden Händen ange-
Fig. 16. zogen wie Fig. 16 zeigt. Der Punkt, wo der Zeiger in der äussern Skale h i stehen bleibt, zeigt die angewandte grösste Kraft der Hände.

§. 211.

Gegen diese Wage ist zu bemerken, dass sie bei der angegebenen Einrichtung in jedem Falle nur die grösste Kraft anzeigt, welche bei dem Gebrauche derselben von den Menschen oder Zugthieren ausgeübt wurde. Wenn man jedoch die mittlere Kraft bestimmen will, so muss der Arm d e wegbleiben und der Hebel c d unmittelbar in b angebracht werden. Da der Winkelhebel c d g nunmehr nach Verhältniss der angewandten Kraft vor- und rückwärts geht, so muss man nach seinen Schwingungen den mittlern Stand des Zeigers beurtheilen und erhält auf diese Art die mittlere Kraft.

§. 212.

In diesem Falle hat die Wage den Nachtheil, dass es sehr schwer fällt, die mittlere Kraft zu beobachten, indem der Zeiger gewöhnlich äusserst schnell hin und
Fig. 17, 18 und 19. her geht. Zur Abhülfe hievon dient die Einrichtung des Kraftmessers, welcher Fig. 17 in der obern Ansicht, Fig. 18 im Durchschnitte nach seiner Fläche, und Fig. 19 im Querdurchschnitte nach der Linie M N O P gezeichnet ist. Derselbe besteht aus einer elyptischen, hinlänglich starken Stahlfeder A B C D, wovon die längere Achse A C gewöhnlich 8 bis 10 und die kürzere B D, 6 bis 8 Zoll misst. An den Punkten B und D sind die Haken für die Zugkraft befestigt. An der innern Seite des Ringes befinden sich die um b und d beweglichen Zugstangen b f und d e, welche mit der Achse g durch die Hebel f g und e g verbunden sind. Auf dieser Achse ist der Zeiger g h aufgesteckt. Wird nun der Ring bei B und D auseinander gezogen, so wird durch die Zugstangen b f und d e mittelst der Hebel f g und g e der Zeiger gedreht, und hiedurch die angewandte Kraft an der Skale angezeigt.

Um die zu grosse Beweglichkeit des Zeigers zu verhindern, ist die Achse g mit dem am Umfange gezähnten Segmente l m n verbunden, welches in das Getriebe n o eingreift, hiedurch das Rad p q und weiters das Getriebe q r und die Windflügel s t sehr schnell umdreht. Der Widerstand, welchen die letztern bei ihrer Bewegung in der

Luft finden, verursacht, dass die vor- und rückgehende Bewegung des Zeigers gh auf einen geringern Spielraum beschränkt wird, woraus nun der mittlere Stand des Zeigers mit grösserer Sicherheit beurtheilt werden kann.

Der Bogen h i k der Skale ist, wie man aus den Figuren ersieht, auf der Platte EFGH befestigt, in welcher zugleich die Achsen der gesammten Getriebe und Räder sich bewegen. Diese Platte ist an dem Ende G H an dem stählernen Ringe bei C festgemacht; weil aber der Ring bei dem Gebrauche der Federwage sich zusammenzieht, so ist das obere Ende E F der Platte E F G H nur mit einem über den Ring herab gehenden Stifte A i in der Art verbunden, dass für das Zusammenziehen des Ringes der Spielraum u v frei bleibt.

§. 213.

Es gibt noch eine Wage, welche nebst dem Gewichte zugleich auch den Preis der Waare anzeigt, wenn der Preis der Einheit, z. B. eines Pfundes dieser Waare bekannt ist. Sie besteht aus zwei gleich langen Armen, die beiderseits in gleiche Theile eingetheilt sind, und an deren einem Arme ein bewegliches Laufgewicht verschoben wird, welches das Gewicht der Einheit, sonach im angeführten Beispiele ein Pfund seyn muss. Fig. 20. Tab. 12.

Der Gebrauch dieser Wage ist folgender: Man wollte die Waare W wiegen, wovon ein Pfund z. B. drei Gulden kostet, so schiebe man sie bis auf die dritte Abtheilung c, und käme hiebei anderseits das Laufgewicht auf die fünfte Abtheilung b zu stehen, so muss auch die Waare 5 Gulden kosten. Es ist nämlich $W \cdot ac = P \cdot ab$, woraus $W = \frac{P \cdot ab}{ac}$. Nun kostet ein Pfund dieser Waare 3 Gulden oder allgemein K, es werden daher W Pfunde x . Gulden $= \frac{K \cdot P \cdot ab}{ac}$ kosten. Hierin hebt sich K und a c gegen einander auf, da K = 3 Gulden und a c drei Abtheilungen ist; ferner ist, wie wir schon erinnerten, P = 1 ℔, folglich bleibt $\underbrace{x = ab}$; d. h. so viele Abtheilungen als ab enthält, so viel kostet die Waare W.

Indessen ist es ungemein schwierig, eine solche Wage mit Vortheil einzurichten, da die Arme derselben sehr lang, folglich sehr schwer, und daher unempfindlich würden. Man müsste nämlich bei einer guten Einrichtung nicht nur für jeden Gulden, sondern für jeden Theil des Preises, z. B. für jeden Kreutzer, dann eben so für jedes Loth oder für noch kleinere Theile die Eintheilung machen, wodurch die Wage offenbar zu lang würde.

C. Göpel.

§. 214.

Um Wasser aus Brunnen oder Erze aus kleinern Tiefen zu ziehen, bedient man sich eines Haspels, wovon bereits §. 87 gesprochen wurde. Sind jedoch Erze aus beträchtlichern Tiefen in grosser Quantität zu Tage zu fördern, so gebraucht man hiezu eine Winde, Göpel oder Gapel genannt, die gewöhnlich durch Pferde bewegt wird und aus folgenden Theilen besteht:

Fig. 1. Tab. 14.

1tens. Aus einem grossen Cylinder ABCD, um welchen das Seil, woran die Last hängt, auf- und abgewunden wird. Da aber ein massiver Cylinder von so grosser Peripherie an und für sich zu schwer, und nicht leicht anzufertigen wäre, so bedient man sich eines Korbes (Treibkorbes), der aus drei Scheiben (Radkränzen) besteht, die mit abgerundeten Holzstücken (Kreutz- und Schlaghölzern) beschlagen werden, worauf sich das Seil windet.

2tens. Dieser Cylinder ist an einer stehenden Welle (Spindelbaum) befestigt, die durch einen oder mehrere Hebel (Kreutz- oder Schwengbäume) mittelst der hieran wirkenden Pferdekraft bewegt wird.

3tens. Der Treibkorb ist in zwei Theile abgetheilt. Sowohl um die obere als um die untere Hälfte läuft ein besonderes Seil, wovon wechselweise das eine zum Heraufziehen der vollen Tonne, und das andere gleichzeitig zum Herablassen der leeren Tonne (oder des Treibsackes) dient. Diess hat den Zweck sowohl den Zug zu erleichtern, als auch das Treiben zu befördern.

4tens. Um den horizontalen Zug der Pferde in den senkrechten Hub der Last zu verwandeln, läuft ein jedes Seil über eine Rolle E, E in den Schacht hinunter. Diese Rollen stehen immer um die halbe Höhe des Treibkorbes über einander.

Wenn nun die an die Docken der Kreutzbäume gespannten Pferde den Treibkorb bewegen, so wird das Seil mit der angefüllten Tonne auf den Treibkorb gewunden, während das andere Seil sich abwindet, mit der leeren Tonne herunter geht, und so der zu hebenden Last zu Hülfe kommt. Ist die volle Tonne heraufgezogen, so wird sie über der Hängebank ausgestürzt, und die Pferde werden in entgegengesetzter Richtung um den Reihnagel gewendet, um dadurch die andere, inzwischen unten (am Füllorte) angefüllte Tonne hinauf, und die oben ausgeleerte hinabzutreiben. Auf diese Art bleibt die Maschine durch die Zeit einer Schicht, welche gewöhnlich 8 Stunden beträgt, ununterbrochen im Gange.

Der Treibkorb steht gewöhnlich unter einem auf der Erde ruhenden, konischen, von Holz errichteten Dache, (welches eigentlich Gapel genannt wird) um hiedurch gegen die Einwirkungen der Witterung gesichert zu seyn.

§. 215.

Werden auf diese Art Lasten aus einer unbeträchtlichen Tiefe gezogen, so geht die Maschine mit ziemlich gleichförmigen Gange fort. Ist aber die Tiefe des Füllortes grösser z. B. 100 oder 150 Klafter, so tritt ein Umstand ein, welcher die Arbeit der Pferde ausserordentlich erschwert. Da nämlich bei jedem Zuge eine bedeutende Last (in Schemnitz 6 bis 9 Zentner Erz) in die Höhe gehoben wird, so sind hiezu sehr starke, folglich schwere Zugseile erforderlich. Das Gewicht derselben verursacht nunmehr eine neue Last, welche die Pferde ebenfalls zu überwältigen haben.

Die nöthige Stärke und Schwere der Seile kann für jeden Fall nur aus Erfahrungen bestimmt werden, wovon wir folgende, von dem Schemnitzer Bergbaue entlehnte anführen:

Nach *Poda* »Beschreibung der bei dem Bergbaue zu Schemnitz in Niederhungarn errichteten Maschinen, Prag 1771« Seite 2, wiegt das 206 Lachter *) lange Grubenseil beim Siegelsberger Schachte, im nassen Zustande 2884 und im trockenen 2060 Pfund, demnach eine Lachter des nassen Seiles 14 Pfund, und eine Lachter des trockenen 10 Pfund. Der Durchmesser dieses Seiles beträgt $2\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll und die in den Treibsack geladene Last 9 Zentner.

Nach *Delius* »Anleitung zur Bergbaukunst, Wien 1773« Seite 272, wiegt die Lachter eines Treibseiles, dessen Durchmesser $2\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll ist, 10 bis 11 Pfund.

Derselbe führt Seite 274 an, dass ein 150 Lachter langes Seil, wenn es trocken ist, 16 Zentner 50 ℔, folglich eine Lachter 11 ℔ wiegt. Die an diesem Seile befindliche Last besteht in einem Treibsacke von 66 ℔ mit einer Schurzkette von 72 ℔, worin 9 Zentner Erze befindlich sind.

Nehmen wir diesen Erfahrungen zu Folge das Gewicht einer Lachter Seil zu 10 ℔ an, so wird schon bei einer Tiefe von 90 Lachtern das Gewicht des Seiles eben so viel betragen, als das Gewicht der Erze in der Tonne (9 Zentner). Ist aber die Tiefe grösser z. B. 150 Lachter, so wiegt das Seil 15 Zentner, die Last aber nur 9 Zentner, folglich ist das Seil weit schwerer als die Last.

Da sich die Gewichte der Tonnen beiderseits fortwährend ausgleichen, so haben die Pferde zu Anfange des Treibens nebst der Ladung noch das Gewicht des ganzen Seiles zu ziehen. Je höher die Last steigt, desto kleiner wird das Gewicht des Zugseiles (woran die Last hängt), und desto mehr wickelt sich vom Gegenseile (welches mit der leeren Tonne herabgeht) ab; die Kraft wird daher in doppelter Hinsicht geringer. Auf diese Art wird der Widerstand immer kleiner, bis er auf derjenigen Höhe $= 0$ wird, wo das Gewicht des abgewundenen Gegenseils eben so viel als das Gewicht der Ladung und des Zugseiles beträgt. Hierauf wird der Widerstand negativ, indem das Gewicht der Ladung und des Zugseiles kleiner als das Gewicht des abgewundenen Seiles ist; die Maschine würde daher durch die Uiberwucht des herabgehenden Seiles ihren Gang mit be-

*) Eine Schemnitzer Berglachter beträgt 1 Klafter 4 Zoll $10\frac{1}{2}$ Linien Wiener Maass.

schleunigter Bewegung fortsetzen. Um diess zu verhüten, müssen die Pferde anhalten, statt zu ziehen, und da dieses Zurückhalten beschwerlich ist, und zuletzt ganz unmöglich werden kann, so wird von dem Augenblicke, wo das Gewicht des Gegenseiles grösser zu werden anfängt als das Gewicht des Zugseiles sammt der Ladung, ein neuer Widerstand dadurch gebildet, dass man den sogenannten Schlepphund oder Gapelhund an den Kreutzbaum anhängt. Dieser Schlepphund besteht aus zwei oder mehreren zusammengefügten runden Bäumen, welche mit Steinen so stark beschwert werden, bis sie durch ihre Reibung am Boden der grössern Kraft, die durch die Uiberwucht des Gegenseiles entsteht, das gehörige Gleichgewicht zu halten im Stande sind.

Hieraus ergibt sich nun, welche Schwierigkeiten durch das Gewicht des Seiles entstehen, indem die Kraft vom Anfange das ganze Gewicht desselben zu ziehen hat, hierauf der Widerstand immer kleiner wird, folglich ein Theil der vorhandenen Kraft unbenützt bleibt; dann aber die Pferde das für den Zweck des Heraufziehens unnütze Gewicht des Schlepphundes fortziehen müssen. Das Letztere fällt ihnen im ersten Augenblicke desshalb sehr schwer, da es so gross seyn muss, als nöthig ist, um der bedeutenden Kraft, womit die Pferde zu Ende des Zuges anhalten müssen, das Gleichgewicht zu halten.

§. 216.

Ein Beispiel wird das bisher Angeführte deutlicher erklären: Auf dem Siegelsberge bei Schemnitz ist die Teufe des senkrechten oder seigeren Schachtes 150 Lachter. Eine Lachter des hiebei angewandten Treibseiles wiegt 10 ℔, und hiemit wird bei jedem Zuge eine Last von 9 Laufpaaren oder 9 Zentnern zu Tage gefördert. Da sich nun die beiderseitigen Tonnen in jedem Falle ausgleichen, so hat die Kraft nebst dem Gewichte der Ladung (9 Zentner) zugleich auch das Gewicht des 150 Lachter langen Seiles (15 Zentner), den Widerstand der Reibung und die Unbiegsamkeit der Seile (welche beiläufig auf zwei Zentner angeschlagen werden), daher 26 Zentner zu ziehen. Diess findet jedoch nur bei dem Anfange des Zuges statt, da diese Last mit der Höhe abnimmt. Wenn nämlich der Treibsack oder die volle Tonne die Höhe der ersten zehn Lachter erreicht hat, so ist das Zugseil um 1 Zentner leichter, da sich 10 Lachter desselben um den Treibkorb aufgewunden haben; und da ferner die leere Tonne während derselben Zeit auf die Tiefe von 10 Lachtern herabging, so beträgt das Gewicht dieses Gegenseiles, welches sich vom Treibkorbe abgewunden hat, und der Kraft zu Hülfe kommt, auch 1 Zentner; die ganze Verminderung des Widerstandes macht sonach auf der Höhe von 10 Lachtern schon 2 Zentner, demnach hat die Kraft nicht mehr 26 Zentner wie vom Anfange, sondern bloss 24 Zentner zu gewältigen.

Ist die Last auf die Höhe von 20 Lachtern über den Füllort gestiegen, so ist das Zugseil um 2 Zentner leichter, und das Gegenseil um eben so viel schwerer, der Widerstand ist daher um 4 Zentner kleiner als vom Anfange, und beträgt bloss 22 Zentner. Die weitere Abnahme ist aus folgender Tabelle zu ersehen:

Höhe der vollen Tonne über den Füllort.	Erze in der Tonne.	Widerstand der Reibung.	Gewicht des Zugseiles.	Gewicht des Gegenseiles.	Der gesammte Widerstand sammt Reibung.
0 Lachter	9 Zentner	2 Zentner	15 Zentner	0 Zentner	26 Zentner
10 ...	9 ...	2 ...	14 ...	1 ...	24 ...
20 ...	9 ...	2 ...	13 ...	2 ...	22 ...
30 ...	9 ...	2 ...	12 ...	3 ...	20 ...
40 ...	9 ...	2 ...	11 ...	4 ...	18 ...
50 ...	9 ...	2 ...	10 ...	5 ...	16 ...
60 ...	9 ...	2 ...	9 ...	6 ...	14 ...
70 ...	9 ...	2 ...	8 ...	7 ...	12 ...
80 ...	9 ...	2 ...	7 ...	8 ...	10 ...
90 ...	9 ...	2 ...	6 ...	9 ...	8 ...
100 ...	9 ...	2 ...	5 ...	10 ...	6 ...
110 ...	9 ...	2 ...	4 ...	11 ...	4 ...
120 ...	9 ...	2 ...	3 ...	12 ...	2 ...
130 ...	9 ...	2 ...	2 ...	13 ...	0 ...
140 ...	9 ...	2 ...	1 ...	14 ...	—2 ...
150 ...	9 ...	2 ...	0 ...	15 ...	—4 ...

In dieser Tabelle verdient besonders bemerkt zu werden:

1tens. Bei dem Anfange des Treibens hätten die Pferde bloss die Last (9 Zentner) sammt der Reibung (2 Zentner), zusammen 11 Ztr. zu ziehen, wenn das Seil kein Gewicht hätte. Weil dasselbe jedoch 15 Zentner wiegt, und die Pferde vom Anfange 26 Zentner ziehen müssen, so ergibt sich, dass mehr als eine doppelte Kraft erfordert wird, um die Maschine anfangs in Bewegung zu setzen.

2tens. Wenn die Treibsäcke oder Tonnen sich begegnen, welches auf der halben Höhe bei 75 Lachtern geschieht, so ist das noch übrige Zugseil eben so schwer als das hineingegangene Gegenseil, folglich hat die angebrachte Kraft nur das Gewicht des Erzes in der Tonne (9 Zentner) und die Reibung (2 Ztr.), also zusammen 11 Ztr. zu ziehen.

3tens. Wenn der volle Treibsack auf der Höhe bei 130 Lachtern anlangt, so wiegt das noch übrige 20 Lachter lange Zugseil nur 2 Ztr., folglich beträgt die Last

sammt Zugseil und Reibung 13 Zentner. Weil aber das 130 Lachter lange Gegenseil auch 13 Ztr. wiegt, so haben die Pferde gar nichts mehr zu ziehen. Von diesem Augenblicke muss nun der Schlepphund angehängt werden.

4tens. Kommt endlich der volle Treibsack über der Hängebank an, oder hat er seinen höchsten Stand erreicht, so beträgt das Gewicht des Erzes sammt dem Widerstande der Reibung nur 11 Zentner, des 150 Lachter langen Gegenseiles aber 15 Zentner, folglich ist von der Seite des hineingegangenen leeren Treibsackes eine Uiberwucht von 4 Zentnern vorhanden, welche entweder durch Anhalten der Zugpferde, oder durch Anhängen des Göpelhundes, oder auf andere Art aufgehalten werden muss.

Der Durchmesser des aufrechtstehenden Treibkorbes ist bei der Siegelsberger Maschine 3 Lachter, und der Durchmesser der Laufbahn der Zugpferde, oder die Länge der Kreutzbäume, woran die Pferde gespannt werden, ist 6 Lachter; demnach haben die Pferde nur die Hälfte des gesammten Widerstandes, folglich zu Anfange des Treibens statt $^{9}/_{2}$ Zentner, welche dem eingeladenen Erze zukommen, wirklich eine Last von $^{26}/_{2} = 13$ Zentnern zu ziehen, wovon $^{15}/_{2}$ Zentner dem Seile und $^{2}/_{2}$ Zentner dem Widerstande der Reibung zukommen.

Da nun bekannt ist, dass $^{9}/_{2}$ oder 4,5 Zentner Last in einem gleichförmigen Zuge von 4 Pferden gezogen werden können, wogegen zum Ziehen der ausgewiesenen 13 Zentner auf dem Siegelsberge 8 Pferde gebraucht werden, welche hiebei noch mit vieler Anstrengung arbeiten müssen, so erhellet, wie wichtig für die Bergökonomie und für alle ähnlichen Fälle die Angabe einer Vorrichtung sey, wodurch dieses bedeutende Hinderniss gehoben, und den Zugpferden nebst dem wenig bedeutenden Reibungswiderstande nur allein die Last des heraufzuziehenden Erzes aufgebürdet, die Last der Seile und Treibsäcke hingegen beständig unter einander ausgeglichen wird.

§. 217.

Zu diesem Zwecke sind bereits seit längerer Zeit mehrere Vorschläge von den Kunstmeistern angegeben und versucht worden. Da der Unterschied für die Zugkraft nur daher rührt, weil zu Anfange des Treibens an der einen Seite die Last der Erze sammt der Tonne und dem ganzen Zugseile zu heben ist, dagegen von der andern Seite nur die leere Tonne das Gegengewicht ausmacht, so hat man vorgeschlagen, an dem Boden einer jeden Tonne noch ein Seil zu befestigen, welches gleich anfangs als Gegenseil das Zugseil mit der beladenen Tonne aufwiegt, und eben so am Ende die beladene Tonne, wenn sie über der Hängebank angelangt ist, mit dem Gewichte des am Boden derselben angehängten Seiles vermehrt und dadurch dem Gegenseile, welches mit der leeren Tonne herabgeht, das Gleichgewicht hält. Auf solche Art wird nun bewirkt, dass nebst der Last fortwährend auf jeder Seite sowohl die Tonne, als ein Seil von der ganzen Tiefe des Schachtes hängt, welches sich daher immer ausgleicht und verursacht, dass die Pferde bloss die Last in der Tonne nebst dem Reibungswiderstande zu gewältigen haben. Hiebei entsteht jedoch der Nachtheil, dass man noch zwei Seile anzuschaffen hat, und

dass überdiess die Reibung durch das Gewicht dieser beiden Seile bedeutend vermehrt, folglich der Widerstand vergrössert wird.

Eine vorzüglichere Einrichtung besteht darin, dem Korbe statt der Form eines Cylinders jene zweier abgestutzten Kegel zu geben, wobei das Zugseil sammt der daran hängenden Last zu Anfange des Treibens auf den kleinsten Halbmesser aufgewunden, und das Gegenseil mit der leeren Tonne vom grössten Halbmesser abgewunden wird. Durch den kleinern Halbmesser wird der Widerstand der Last für die Kraft der Pferde vermindert, und dagegen durch den grössern Halbmesser die Wirkung des hineingehenden Seiles sammt der leeren Tonne vergrössert. Am Ende des Treibens, wenn die beladene Tonne oben anlangt, befindet sich die Last zwar an dem grössten, jedoch das hineingehende Gegenseil an dem kleinsten Halbmesser, und es unterliegt keiner Schwierigkeit, den grössten und kleinsten Halbmesser so zu bestimmen, dass die Zugpferde in beiden Fällen nur die Ladung in der Tonne (sammt dem Widerstande der Reibung) zu ziehen haben, und sich demnach das Gewicht der Zugseile und der leeren Tonnen ausgleicht.

Nebst diesen beiden sind noch andere künstlichere Mechanismen angegeben und versucht, aber alle wieder abgebaut und die gewöhnlichen cylindrischen Treibkörbe abermals eingeführt worden *), weil diese Erfindungen ihrem Zwecke nur unvollkommen entsprochen haben, mehrere Seilbrüche und Reparaturen vorgefallen, und dabei viele Göpelpferde zu Grunde gegangen sind. Nur bei den Treibmaschinen mit Wasser sind die konischen Treibkörbe in der Anwendung geblieben, wodurch die beabsichtigte Ausgleichung zwar nicht ganz, aber doch so weit bewirkt wurde, dass die noch übrigen Ungleichheiten theils durch die Abstellung des Aufschlagwassers, theils auch durch die Bremse (nämlich bei der eintretenden Uiberwucht) leicht behoben werden konnten. Diese Beibehaltung ist hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, weil diese Spiralkörbe auf der Welle des Wasserrades eine horizontale Lage haben und desshalb keiner Seilleitung bedürfen.

Aus den Bemerkungen, welche *Poda*, *Delius*, *Breitenheim* u. a. über die Versuche mit aufrecht stehenden Spiralkörben hinterlassen haben, geht nämlich hervor, dass die vorgefallenen Seilbrüche und andere Unglücksfälle nur dem Mangel einer verlässigen Seilleitung zuzuschreiben waren, weil die Seile nicht in den vorgeschriebenen Gewinden blieben, sondern von ihrer Schwere herabgezogen, über einander gelaufen sind, worauf ein Herabfallen des Oberseiles und der beladenen Tonne im Schachte erfolgte.

§. 218.

In der im Jahre 1816 zu Prag erschienenen „Abhandlung über die Spirallinie der Treibmaschinen und einige dazu gehörige Verbesserungen von Franz Ritter von *Gerstner*, k. k. Professor und Director etc." ist dieser Gegenstand mit aller erforderlichen Ausführlichkeit behandelt, und zugleich sind die Mittel angegeben worden, wodurch den vorher gerügten Nachtheilen bei den bisher im Gebrauche befindlichen Göpeln abgeholfen wurde. In dieser Abhandlung ist nicht nur eine vollkommen sichere Seilleitung angegeben, sondern auch die nöthige Grösse der Halb-

*) Akademische Vorlesung über die zu Schemnitz errichteten Pferdegöpel. Dresden 1773, in der Walterschen Hofbuchhandlung.

messer der Spiralwindungen sowohl für den Anfang und das Ende, als für ihre dazwischen liegenden mittlern Gewinde durch Rechnung bestimmt, und ferner auch noch der Gebrauch eiserner Ketten statt der bisher üblichen hanfenen Seile in Ausführung gebracht worden. Nach diesen Grundsätzen wurde bereits im Jahre 1793 auf den Herrschaft Pürglitzer Eisenwerken in Böhmen auf dem Berge *Krussna Hora* ein Pferdegöpel für eine Ladung von 15 Zentnern Erz in die Tonne gebaut, und derselbe ununterbrochen und ohne einem nachtheiligen Unfalle zur Erzförderung bis zum Jahre 1824 verwendet, wo nämlich der nächst der Mündung des Stollens angelegte neue Hochofen in Gang gesetzt, folglich die Erze durch den Stollen herausgefahren, und der Göpel überflüssig wurde.

Fig. 1. Tab. 13. Die Darstellung dieses auf *Krussna Hora* erbauten Göpels mit allem nöthigen Detail enthält Tab. 13. Der Haupttheil desselben ist der Spiralkorb A, welcher Fig. 3 im Durchschnitte und Fig. 4 in der untern Ansicht abgebildet ist. Um die Welle herum läuft oben und unten ein Spiralgewinde, dessen Höhe durch die Anzahl der Windungen und Dicke der Kette oder des Seiles, und dessen Länge durch die Tiefe des Schachtes bestimmt wird. Der Korb besteht aus einem Gerippe von weichen $\frac{4}{6}$ zölligen (d. i. 4'' breiten und 6'' hohen) Holze a, a..., welches oben und unten durch Kreutzarme und einen aus Pfosten nach Art der Radkränze verfertigten Kranz verbunden wird. Zwischen diesem Gerippe befinden sich nämlich oben und in der Mitte des Korbes 4, unten aber 6 Kreutzarme b', b'' welche an die viereckig abgezimmerte Welle genau anschliessen, und dadurch die Verbindung der Welle mit dem Korbe hauptsächlich bewirken. Die untern Kreutzarme b'' (Fig. 3) sind desshalb stärker, weil sie zugleich den Radkränzen für die Bremse als Hebelsarme dienen, folglich der grössten Belastung der Maschine Widerstand leisten müssen. Auf diesen untern Kreutzarmen b'' ist nun die erste Spiralwindung aus $2\frac{1}{4}$ Zoll starken Pfosten mit der erforderlichen Steigung befestigt; und darauf sind schwache Breter genagelt, welche die Scheidewand zwischen dem ersten und zweiten Spiralgewinde bilden. Auf gleiche Art sind die folgenden Spiralwindungen, deren Durchmesser nach Vorschrift der Rechnung immer kleiner wird, auf einander genagelt. In der Mitte des Korbes ist ein cylinderförmiger Theil B zum Aufwinden der leeren Ketten, wenn aus verschiedenen Seigerteufen gefördert wird. Von diesem Cylinder aus gehen die Gewinde in derselben Grösse und auf dieselbe Art wie unten in die Höhe. Oben wird noch ein Gewinde c aufgesetzt, welches der Seilleitung als Schraubengewinde dient. Das Ganze ist durch die stehenden Hölzer a, a.... unten und oben gebunden und durch Keile zusammengekeilt, wodurch sowohl die Windungen der Kränze unter einander, als auch mit der Welle und dem Schwengbaume um so vollkommener befestigt werden.

An dem Wellbaume, welcher innerhalb des Korbes viereckig abgezimmert ist, sind an den 4 Seitenflächen unmittelbar unter dem Korbe 4 hölzerne Ansatzstücke d, d angenagelt. Unter diesen Ansätzen ist der Wellbaum achteckig abgezimmert, und von jeder dieser Seitenflächen geht eine Strebe C (Fig. 1) gegen den untern Radkranz des Korbes. Mittelst dieser 4 Ansatzstücke und 8 Streben wird der Korb in einer unverrückbaren Lage auf der Welle erhalten.

§. 219.

Durch die Mitte des Korbes und der Welle geht in schiefer Richtung der Schwengbaum D; er hat eine Länge von 6½ Klaftern, ist am obern Ende 14 Zoll und unten 11 Zoll stark, hat dort, wo er in den untern Radkranz des Korbes eingreift, beinahe die gleiche Stärke wie die Welle, und wird ebenfalls von den beiden Kreutzarmen eingeschlossen. In der Welle ist eine schiefe Oeffnung E (Fig. 3) angebracht, und der Schwengbaum auf ihre Stärke zapfenförmig eingeschnitten; von da geht er mit gleicher Stärke bis zu dem obern Radkranze, mit dem er abermals in einem Einschnitte fest verbunden ist. Der Schwengbaum wird durch die Strebe F unterstützt, und an seinem untern Ende ist eine horizontale Scheibe angebracht, durch welche der Reihnagel geht; diese Scheibe dient dazu, die Deichsel, woran die Pferde angespannt sind, in horizontaler Lage zu erhalten. An dem rückwärtigen Ende der Deichsel ist eine Pfoste befestigt, welche zum Sitze für den Treibknecht und zugleich der Deichsel zum Gegengewichte dient. Die Entfernung des Reihnagels von der Achse der Welle oder der Hebelsarm des Pferdeumlaufes beträgt 24 Fuss. An dem Ende des Schwengbaumes ist sowohl von der einen, als von der andern Seite eine Haltstange oder Setzholz e (Fig. 1 und 2) angebracht, das am untern Ende mit einer zweifachen eisernen Spitze versehen ist, den Pferden nachgeschleppt wird, und zum Anhalten des Göpels in jeder Stelle dient. Fig. 1 bis 3. Tab. 13.

§. 220.

Die Zapfenvorrichtung für den stehenden Wellbaum ist auf dieselbe Art eingerichtet, wie sie von dem Maschinendirektor *Mende* in Freiberg bei dem Pferdegöpel am Muldenberge angegeben wurde. Zur Unterstützung des Zapfens dient nämlich ein Stock G (Fig. 1), welcher auf einem untermauerten Zimmerwerke sitzt, und von 4 Seiten mit Streben H unterstützt ist. Dieser Stock ist 6 Zoll unter seinem obern Ende mit einer eben so grossen horizontalen Oeffnung durchgeschlagen, die für 2 einander entgegenstehende Stellkeile f, f bestimmt ist. In der Mitte desselben ist von oben herab ebenfalls eine 6 Zoll weite viereckigte Oeffnung ausgehauen, welche zur Aufnahme des eisernen Kästchens mit der Pfanne für das Zapfenlager dient, und bis auf die Stellkeile herabgeht. Dieses Kästchen ist Fig. 10 im 4fachen Maasse im Grundrisse und Fig. 8 im Durchschnitte dargestellt. Man setzt es in die Oeffnung im Klotze G (Fig. 1) und gibt in dasselbe eine Mischung aus trockenem Sand und Thon, und hierauf erst die viereckigte Pfanne hinein. Diese weiche Unterlage dient, damit die Pfanne mit ihrer Spur genau die für den Zapfen angemessene Stellung einnehmen könne und aller Spielraum beseitigt werde. Fig. 1, 8, 9 und 10.

Der gusseiserne Bläuel, dessen Durchschnitt Fig. 8 und Ansicht Fig. 9 im 4fachen Maasse enthält, ist stärker als gewöhnlich; in die Warze g desselben ist nämlich eine 4eckigte, nach oben verjüngt zulaufende Oeffnung eingegossen, in welche der aus Glockenmetall verfertigte Stift h eingesetzt wird. Damit die bedeutende Last die Warze nicht auseinander treibe, werden zwei rothglühende starke Ringe an dieselbe, angetrieben, welche nunmehr nach erfolgter Abkühlung sehr fest anschliessen und sie zusammenhalten. Das 4eckigte Kästchen (Fig. 8 und 10), in welchem der Zapfen steht,

Fig. 1 und 9. Tab. 13. ist ganz mit Oehl übergossen, wodurch also nicht nur die Reibung vermindert, sondern auch für eine längere Dauer des Zapfens und der Pfanne gesorgt wird.

Wenn aber der Zapfen oder die Pfanne nach mehreren Jahren bedeutend ausgelaufen ist, so werden auf den Klotz G unter dem Wellbaume keilförmige Unterlagen aufgesetzt, um die Welle und den Spiralkorb zu unterstützen. Hierauf werden die zwei Stellkeile f, f in entgegengesetzter Richtung herausgeschlagen, das Kästchen mit der Pfanne durch dieselbe Oeffnung herausgezogen, und der Stift h mit der Hand herausgenommen. Man setzt nun einen neuen Stift und eine neue Pfanne ein, treibt die Stellkeile f, f wieder an, und hebt die Maschine auf ihren ursprünglichen Stand zurück, worauf die zur Unterstützung des Wellbaumes verwendeten Unterlagen wieder abgenommen werden.

Der obere Wellzapfen ist so wie der untere mit einem Bläuel versehen, welcher in die Welle eingesetzt und durch einige eiserne Ringe in derselben festgehalten wird. Er ist an ein mit zwei Flügeln versehenes Zapfenlager, welches an einem Querbalken des Zimmerwerkes befestigt ist, angelegt, und wird von der andern Seite durch ein ähnliches Zapfenlager, mittelst eines hölzernen Querstückes, das an dem vorgenannten Querbalken angeschraubt wird, in seiner senkrechten Stellung erhalten.

§. 221.

Fig. 1, 2 und 5. Um das Treibseil oder die Kette immer genau in die gehörigen Windungen des Korbes zu führen, dient die Seilleitung, die Fig. 5 in der vordern Ansicht und im doppelten Maasse gezeichnet ist. Sie besteht aus einem hölzernen Rahmen ihhi, welcher an jeder Seite eine Walze trägt, auf der die Ketten oder Seile laufen, und den betreffenden Gewinden horizontal zugeführt werden. Diese Walzen sind massiv, 12zöllig, von Eichenholz, an beiden Enden und nach ihrer Länge mit eisernen Schienen beschlagen; ihre Länge beträgt etwas mehr als der Unterschied des grössten und kleinsten Halbmessers des Spiralkorbes, und die Höhe der einen Walze ober der andern ist der halben Höhe des Korbes gleich. Die Walzen werden so gestellt, dass zu Anfange des Treibens, wie es Fig. 1 dargestellt ist, die Oberfläche der untern Walze mit dem kleinsten Gewinde des untern Kegels und zu gleicher Zeit die Oberfläche der obern Walze mit dem grössten Gewinde des obern Kegels auf gleicher Höhe sich befindet. Die zwei mittlern Säulen des Rahmens (Fig. 5) sind mit Kämmen v, v versehen, welche in das oberste Gewinde des Korbes eingreifen. Dieses Gewinde springt vor den andern, mit welchen es eine gleiche Höhe hat, um einige Zolle vor, und bildet eine Art von Schraube ohne Ende, wodurch der Rahmen der Seilleitung, je nachdem man den Korb vor- oder rückwärts umtreibt, bei jeder Umdrehung um ein Gewinde gehoben oder gesenkt wird. Die hiezu nöthige senkrechte Bewegung des Rahmens wird durch zwei Paar einander entgegenstehende Leitarme hl und iK (Fig. 1 und 5) unterhalten. Das untere Paar Leitarme bewegt sich rückwärts um die Nägel l in den Säulen I, welche letztern an dem Zimmerwerke des Göpelgebäudes befestigt sind. Das obere Paar hat die Nägel, um welche es sich rückwärts dreht, auf zwei Balken des Zimmerwerkes oberhalb der Achse des Wellbaumes. An diesem obern Paare ist noch rückwärts der Steinkasten K befestigt, worin das Gegengewicht so schwer seyn muss, als das

Gewicht des Rahmens der Seilleitung (Fig. 5) und der Hälfte der Kettenstücke, die zwischen dem Spiralkorbe und den Rollen S, S über dem Schachte horizontal gespannt sind. Die zwei Säulen des Rahmens sind mittelst der zwei eisernen Stangen k, k mitsammen verbunden, welche letztern, da sie an ihren Enden abgerundet sind, zugleich die Stelle der Achsen vertreten, um welche sich die Leitarme i K und h l an dem Rahmen bei h und i (Fig. 1 und 5) drehen; endlich dient das Kreutz m (Fig. 5 und 2) zur festen Verbindung des untern Paares Leitarme und der Riegel n zur Verbindung des obern Paares Leitarme. Die Balken o, o (Fig. 1 und 2) dienen sowohl zur Festhaltung der Säulen I' und t, als auch um darauf zum Göpel gehen zu können. Fig. 1 bis 6. Tab. 13.

§. 222.

Es ist nöthig, die Bewegung des Göpels und der daran hängenden Lasten vollkommen in seiner Gewalt zu haben, um die Maschine an jedem Orte bei Vornahme der Reparaturen im Schachte oder bei Unglücksfällen sogleich anhalten zu können. Diess geschieht durch das Bremswerk, welches Fig. 2 in der obern Ansicht und Fig. 6 in der vordern Ansicht im doppelten Maasse dargestellt ist. Es besteht aus zwei Bremsbäumen L M, L M, welche vom Göpelhause horizontal bis zum untern Radkranze des Korbes gehen, und daselbst (bei L) mit zwei angeschraubten Reibhölzern (Bremsstücken) von hartem Holze versehen sind, durch deren Druck und Reibung an dem untersten etwas hervorspringenden Radkranze die Bewegung des Korbes aufgehalten wird. Diese Bremsbäume sind vorn mittelst eiserner Stangen p q (Fig. 1) an dem Balken p des Zimmerwerkes aufgehängt, und drehen sich bei M (Fig. 2) um zwei Nägel, die ebenfalls in dem Zimmerwerke des Göpelhauses befestigt sind. Diese zwei Bremsbäume werden mittelst der zwei eisernen Stangen r, r (Fig. 2 und 6), die an dem vordern und hintern Ecke der Bremssäule N in einem Oehre beweglich sind, durch Umdrehung der letztern angezogen. Die Bremssäule ist ein viereckig behauenes Stück Eichenholz, das oben und unten in Zapfen an den Balken u, u (Fig. 1) läuft, welche an das obere Zimmerwerk mittelst der Hängsäulen t, t aufgehängt sind. Diese Zapfen werden mittelst zweier eichenen Reibhölzer, welche durch eiserne Schrauben angezogen werden, an den Balken u, u festgehalten.

Die Bremssäule N (Fig. 6) ist an dem obern und untern Ende, wie auch in der Mitte mit einem rings um dieselbe gehenden Eisenbeschläge versehen. An dem mittlern Beschläge derselben sind zwei eiserne Stangen s, s (Fig. 2 und 6) befestigt, welche die Hebel zur Bewegung dieser Säule bilden. An dem Ende dieser Stangen ist die horizontale Zugstange W vorhanden, welche durch das Kunstkreutz O (Fig. 1), wenn der Göpel gebremset werden soll, angezogen wird und umgekehrt. Diese Bewegung erfolgt durch einen, am andern Arme des Kunstkreutzes senkrecht herabgehenden Balken P P, durch dessen Gewicht die Bremsung hauptsächlich bewirkt wird. Um diesen Balken aufzuheben, dient der Hebel Q Q, welcher, wenn der Göpel im Gange bleiben soll, durch die Vorstecknägel in der Säule R in die Höhe gehalten wird. Will man aber die Bewegung hemmen, so wird der Vorstecknagel herausgezogen, der Balken P P sinkt durch sein eigenes Gewicht herab, bewirkt durch das Kunstkreutz O das Anziehen der Zugstange W, mittelst der Stangen s, s die Umdrehung der Bremssäule N und endlich durch

Fig. 1 bis 12. Tab. 13. die Zugstangen r, r auch die Anziehung der Bremsbäume L M und L M. Zur Verstärkung dieser Bremse wird der Hebel Q Q noch mit der Hand herabgedrückt, und um seine Rückbewegung zu hindern, der Stecknagel in die untern Löcher der Säule R vorgesteckt.

§. 223.

Das Treibseil wird, von der Seilleitung angefangen, auf den bereits angeführten, in der Seilleitung (Fig. 5) befindlichen Rollen und den, aus Buchenholz verfertigten, gut beschlagenen Seilscheiben S, S zum Schachte geleitet, in welchem die Treibtonnen T, deren jede an einem Ende des Treibseiles befestigt ist, auf- und abgehen. Sobald eine Tonne oben ankommt, wird die Fallthüre aufgemacht und nach dem Austritte der Tonne wieder geschlossen. Die Tonne wird hierauf noch so weit aufgezogen, bis der an der Haltkette U (Fig. 1) befestigte Haken in einen oder den andern am Boden der Tonne befindlichen Ring x eingehängt werden kann. Die Pferde werden zu gleicher Zeit angehalten und nach vollzogenem Einhängen auf ein gegebenes Zeichen etwas zurückgeführt, worauf die Tonne, indem sie sich um den Ring x wendet, von selbst das darin befindliche Erz in den hölzernen Trog V und in den darunter stehenden Auslaufehund ausstürzt.

Der Auslaufehund ist Fig. 11 in der Seiten- und Fig. 12 in der Unter-Ansicht im doppelten Maasse dargestellt. Er besteht aus einem viereckigten Kasten von Eichenholz, welcher von aussen mit Eisen gut beschlagen und inwendig wegen der längern Dauer mit weichen Bretern ausgefüttert ist. Seine Grösse ist jener der Tonne, welche 15 Zentner Eisenerze fasst, gleich. Um das herabrollende Erz sicher in den Hund zu führen, ist derselbe auf beiden längern Seiten mit schief aufgenagelten Bretern versehen, welche auch dazu dienen, um die Achsen der Räder vor dem herabfallenden kleinern Erze zu schützen. Der Auslaufehund ist vorn mit einer Thür, die durch einen eisernen Riegel geschlossen wird, zum Ausstürzen des Materials, hinten aber mit zwei Handhaben zum Vorwärtsschieben versehen. Beinahe in der Mitte des Kastens ist (Fig. 11) ein grosses 2½ Schuh hohes Rad und hinter demselben ein kleineres angebracht, welches letztere dem Karrenführer oder sogenannten Hundsläufer zur Unterstützung dient. Unter dem Boden des Kastens befinden sich 4 horizontale Rollen, welche zu beiden Seiten an die Strassbäume anlaufen uud verhindern, dass der Hund von denselben nicht abgleiten könne.

Fig. 1 und 2. Die Fahrbahn oder der Hundelauf besteht aus zwei parallel liegenden $^6/_8$ zölligen Strassbäumen, welche durch Querhölzer zur Erhaltung ihrer parallelen Lage, mit einander verbunden und unter einem solchen Winkel gegen den Horizont geneigt sind, damit der Widerstand bei dem Herausfahren des beladenen Hundes demjenigen gleiche, welcher bei dem Zurückschieben des leeren Hundes zu gewältigen ist.

Die Treibkette, welche auf *Krussna Hora* verwendet wurde, ist Fig. 7 dargestellt, woraus zu ersehen, wie die einzelnen Glieder gebildet worden sind, um die nöthige Festigkeit und Sicherheit zu erlangen, und wodurch zugleich die nöthige Gelenkigkeit für alle Wendungen der Kette so wie bei einem Seile bewirkt worden ist. Uiber das Gewicht der Kette und ihre zunehmende Stärke wird in der Folge das Nöthige angeführt werden.

§. 224.

Wir kommen nunmehr zur Bestimmung der Halbmesser, welche die Spiralgewinde erhalten müssen, damit die Pferde nur allein das Gewicht des Erzes in der Tonne zu ziehen haben, die Gewichte der Tonnen und Seile (oder Ketten) aber sich für jede Höhe wechselseitig ausgleichen. Wir wollen zu diesem Behufe zuerst einen Korb mit zwei gegen einander gestellten Kegeln annehmen, welcher Fig. 2 in einfachen Linien dargestellt ist. Es sey Fig. 2. Tab. 14.

das Gewicht des Treibsackes oder der Tonne, ... $= T$
das Gewicht des Erzes, welches in dieselbe eingeladen wird, ... $= Q$
das Gewicht des Treibseiles oder der Kette für die ganze Höhe des Schachtes, $= S$
der grösste Halbmesser des Kegels, woran zu Anfange des Treibens die leere Tonne T hängt, ... $= a$,
der kleinste Halbmesser des Kegels woran zu Anfange des Treibens die volle Tonne $Q + T$ sammt dem Gewichte des Seiles S hängt, ... $= b$,
und der Halbmesser für die angebrachte Zugkraft N.K sey $= A$;

so haben wir zu Anfange des Treibens, wo die volle Tonne vom Füllorte herauf- und die leere von der Hängebank herabzugehen anfängt, $N.K.A = (Q + T + S)b - T.a$ (I), und zu Ende des Treibens, wo die volle Tonne ober der Hängebank, die leere aber unten im Füllorte anlangt, $N.K.A = (Q + T)a - (T + S)b$ (II).

Sollen nun die Kräfte der Pferde N.K **am Anfange und zu Ende des Treibens gleich gross seyn**, so kann man diese 2 Gleichungen addiren und subtrahiren und hieraus die Hebelsarme a und b bestimmen. Man erhält nämlich durch die Addition $2N.K.A = Q.a + Q.b$, woraus sich der mittlere Halbmesser des Treibkorbes $\frac{a+b}{2} = \frac{N.K}{Q} . A = m$ (III) ergibt. Wenn wir ferner die Gleichung II von I subtrahiren, so ist $0 = (Q + 2T + 2S)b - (Q + 2T)a$, und wird diess in eine Proportion aufgelöst, so ist $a:b = Q + 2T + 2S : Q + 2T$, oder auch $\frac{a-b}{2} : \frac{a+b}{2} = S : Q + 2T + S$, und wenn der Werth aus III substituirt wird, $\frac{a-b}{2} : \frac{N.K}{Q} . A = S : Q + 2T + S$. Hieraus ergibt sich nunmehr $\frac{a-b}{2} = \frac{A.N.K.S}{Q(Q+2T+S)}$ (IV). Da aber $\frac{a+b}{2} = \frac{N.K}{Q} . A$ ist, so erhalten wir den grössten Halbmesser des Korbes, $a = \frac{A.N.K}{Q}\left(1 + \frac{S}{Q+2T+S}\right)$ (V) und den kleinsten Halbmesser, $b = \frac{A.N.K}{Q}\left(1 - \frac{S}{Q+2T+S}\right)$ (VI).

§. 225.

Aus der Gleichung $\frac{a+b}{2} = \frac{A.N.K}{Q}$ folgt $A.N.K = Q\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Es ist daher eben so viel, als wenn die Pferde nur die Last Q an einem Cylinder mnop, dessen Halbmesser $\frac{a+b}{2} = m$ oder Durchmesser $mn = a + b = 2m$ ist, zu bewegen hätten. **Das Gewicht des Seiles hebt sich daher auf, und die Kraft bleibt zu Anfange, in der Mitte und zu Ende des Treibens dieselbe.** Das Gewicht der Tonne gleicht

sich hier ebenfalls wie bei einem cylindrischen Korbe aus, da beiderseits eine Tonne herabgeht, folglich was die eine erschwert, die andere ziehen hilft.

In dem oben §. 216 angeführten Beispiele vom *Siegelsberger* Treibschachte war Q = 900 ℔, S = 1500 ℔. Setzen wir hiezu noch das Gewicht des Treibsackes sammt der eisernen Schurzkette T = 150 ℔, so ist $\frac{S}{Q+2T+S} = \frac{1500}{900+300+1500} = \frac{5}{9}$. Nehmen wir nun an, der mittlere Durchmesser a + b des Spiralkorbes sey eben so gross, wie der Durchmesser des am *Siegelsberge* bestehenden cylindrischen Korbes, nämlich 3 Lachter = 18 Fuss und eben so der Halbmesser der Pferdekraft A = 18 Fuss, so ist der grösste Halbmesser des Korbes $a = 9\left(1+\frac{5}{9}\right) = 14$ Fuss, und der kleinste Halbmesser desselben $b = 9\left(1-\frac{5}{9}\right) = 4$ Fuss; ferner ist die Zugkraft der Pferde sowohl zu Anfange als zu Ende des Treibens $N.K = \frac{Q}{A}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{900}{18}\cdot\frac{18}{2} = 450$ ℔. Die Maschine kann daher mit vier Pferden ohne Anstand betrieben werden, wogegen bei dem cylindrischen Korbe an dem *Siegelsberge* acht Pferde angewendet wurden.

§. 226.

Der Unterschied des grössten und kleinsten Halbmessers $a - b = \frac{(a+b)\,S}{Q+2T+S} = \frac{a+b}{\frac{Q+2T}{S}+1}$ wird offenbar gross, wenn der Bruch $\frac{Q+2T}{S}$ klein ist, d. h. wenn das Gewicht des Seiles S gross und dagegen das Gewicht der Ladung Q und der Tonne T klein ist, folglich wenn aus tiefen Schachten nur kleine Lasten gefördert werden. Dasselbe geschieht, wenn statt der leichteren hanfenen Treibseile schwerere eiserne Ketten genommen werden.

Da die Gewichte sowohl der Seile als der Tonne der Last des Erzes proportional genommen werden müssen, so folgt aus $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{\frac{Q+2T}{S}+1}$, dass bei gleichen Schachttiefen $\frac{Q+2T}{S}$ eine beständige Grösse ist, folglich auch das Verhältniss $\frac{a-b}{a+b}$ dasselbe seyn müsse; es werden demnach bei gleichen Schachttiefen die Spiralkörbe einander ähnlich seyn.

§. 227.

Fig. 3. Tab. 14. Wir wollen nun untersuchen, wie gross die Halbmesser für die übrigen, zwischen dem obern und untern Ende eines jeden Kegels liegenden Punkte seyn müssen. Zu diesem Zwecke wollen wir annehmen, dass die volle Tonne Q + T, welche zu Anfange des Treibens sich mit dem Seile S am Radius Bb = b befunden hat, nach einem unbestimmten Drehungswinkel (= φ) sich am Hebelsarme Zz = z befinde. Das Gewicht des Seiles, welches hiedurch von Bb bis Zz aufgewunden worden, sey = W, so ist von Seite der vollen Tonne das statische Moment (Q + T + S — W) z vorhanden. Durch dieselbe Drehung des Korbes sey die leere Tonne T vom Radius A′a′ = a zu dem Radius

$Y'y' = y$ gelangt und das Gewicht des Seiles, welches von $A'a'$ bis $Y'y'$ vom Spiralkorbe abgewunden, und in den Schacht getrieben worden, sey $= U$, so beträgt das statische Moment des Gegenzuges, welches dem Momente der Kraft zu Hülfe kommt $= (T + U)\,y$. Demnach haben wir die Gleichung $N.K.A = (Q + T + S - W)\,z - (T + U)\,y$ (I).

Durch fortgesetzte Umdrehungen wird die Last der vollen Tonne $Q + T$ an den Hebelsarm $Yy = Y'y'$ gelangen, und vom Seile S wird in dieser Stellung nur noch das Seiltrum U übrig seyn, welches den Raum von Yy bis Aa auf dem Spiralkorbe noch eben so einnehmen wird, als dasselbe von der andern Seite von $Y'y'$ bis $A'a'$ aufgewunden worden. Demnach beträgt in dieser Stellung das statische Moment von Seite der vollen Tonne $(Q + T + U)\,y$, und weil zu gleicher Zeit das Gegenseil noch bis $Z'z'$ abgewunden worden, folglich am Hebelsarme z die Last $T + S - W$ hängt, so ist das statische Moment des Gegenzuges $= (T + S - W)\,z$. Demnach haben wir abermals die Gleichung $N.K.A = (Q + T + U)\,y - (T + S - W)\,z$ (II).

Die Addition der Gleichungen I und II gibt $\frac{N.K.A}{Q} = \frac{y + z}{2} = m$; demnach ist der mittlere Halbmesser $Mm = m = \frac{a + b}{2}$ nicht nur der mittlere für den Anfang und das Ende des Treibens, sondern auch für alle übrigen gleichen Entfernungen der Seile von der Mitte des Korbes, und der gesammte Widerstand ist eben so gross, als ob an dem mittlern Radius nur allein die Last Q hinge, so wie es dem Zwecke der Aufgabe nach §. 224 gemäss ist.

§. 228.

Die wirkliche Grösse der einzelnen Halbmesser kann nur durch höhere Analysis bestimmt werden *). Diese gibt uns für den Fall, wo das Seil eine durch-

*) Die krumme Linie des Profils des Spiralkorbes wird mittelst höherer Analysis auf folgende Art gefunden: Zieht man die Gleichungen I und II von einander ab, so ist $(Q + 2T + 2S - 2W)\,z = (Q + 2T + 2U)\,y$ folglich $y : z = Q + 2T + 2S - 2W : Q + 2T + 2U$ und $\frac{y - z}{2} : \frac{y + z}{2} = S - W - U : Q + 2T + S - W + U$. Setzen wir $\frac{y - z}{2} = p\,y = q\,z = v$, so erhalten wir wegen $\frac{y + z}{2} = m$, die Gleichung $Q + 2T + S - W + U = \frac{m}{v}(S - W - U)$. Weil die Gewichte der Ladung Q, der Tonne T und des ganzen Seiles S bei der Bestimmung der einzelnen Halbmesser des Korbes als beständige Grössen zu betrachten sind, so ist das Differentiale der letzten Gleichung $d.\,m\left(\frac{S - W - U}{v}\right) + d\,(W - U) = 0$ (III), woraus die Halbmesser der Spirallinie auf folgende Art bestimmt werden:

Für ein gewöhnliches Bergseil sey das Gewicht einer Lachter $= g$, so ist das Gewicht der Seillänge $s = g.s$. Nachdem aber diese Seillänge auf eine Spirallinie gewunden wird, so sey der unbestimmte Fig. 4.
Winkel, den der Radius der Spirallinie beschreibt $m\,Y\,y = \varphi$, so ist $d\,s = y.\,d\,\varphi.\,\sqrt{\left(1 + \left(\frac{d\,y}{y.\,d\,\varphi}\right)^2\right)}$, welches wir sehr nahe $= y.\,d\,\varphi$ setzen können; weil die Zunahme der Radien im Vergleiche mit der Länge des Seiles sehr klein ist. (In dem angeführten Beispiele war $a - b = 10$ Fuss und die Länge des Seiles $= 150$ Lachter $= 900$ Fuss, folglich $\sqrt{(810000 + 100)} = 900{,}06$, wo der Unterschied $0{,}06$ gegen 900 Fuss offenbar als unbedeutend weggelassen werden kann.) Dasselbe gilt noch mehr von

aus gleiche Stärke hat, den Ausdruck $\frac{\varphi}{\pi . n} = \frac{v}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{m^2 + \alpha^2}{m^2 + v^2}\right)}$, welcher die **vollständige Gleichung der Spirallinie** enthält.

der Steigung der Spiralgewinde nach ihrer Höhe. Setzen wir demnach $s = \int y.\, d\varphi$, so ist das Gewicht der unbestimmten Seillänge $g.\, s = g \int y.\, d\varphi$.

Da wir bereits gesehen haben, dass die Ordinaten p y und q z auf gleichen Entfernungen von m einander gleich sind, so wollen wir den Winkel, welcher von der Mitte des Korbes oder von m nach y beschrieben wird $= \varphi$ setzen, so ist das Gewicht des Seiles, welches auf dem Spiralgewinde von m bis y zu liegen kommt, $= g \int y.\, d\varphi = g \int (m + v)\, d\varphi = g.\, m.\, \varphi + g \int v.\, d\varphi$.

Eben so haben wir wegen der Gleichheit der Winkel von m bis y und von m bis z, auch das Gewicht des Seiles auf dem Spiralgewinde von m bis $z = g \int (m - v)\, d\varphi = g.\, m.\, \varphi - g \int v.\, d\varphi$; die Summe dieser beiden Ausdrücke gibt das Gewicht des Seiles, welches von z bis y auf dem Spiralgewinde zu liegen kommt $= 2\, g.\, m.\, \varphi = S - W - U$.

Setzen wir endlich noch das Gewicht des Seiles, welches auf der untern Hälfte des Spiralkorbes von b bis m liegt $= B$, und welches auf der obern Hälfte von m bis a liegt $= E$, so ist $W = B - g.\, m.\, \varphi + g \int v.\, d\varphi$ und $U = E - g.\, m.\, \varphi. - g \int v.\, d\varphi$; demnach $W - U = B - E + 2\, g \int v.\, d\varphi$. Diese Werthe in die Gleichung III gesetzt geben d. $\frac{2\, g.\, m.^2\, \varphi}{v} + 2\, g.\, v.\, d\varphi = 0$, oder $\frac{v.\, d\varphi - \varphi.\, dv}{v^2} + \frac{v.\, d\varphi}{m^2} = 0$; folglich $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dv}{v} - \frac{v.\, dv}{m^2 + v^2}$. Das Integrale dieser Gleichung ist offenbar $\log. \frac{\varphi}{v} \sqrt{(m^2 + v^2)} = C$.

Die Bestimmung der beständigen Grösse C wird sich ergeben, wenn wir vorläufig die nöthige Anzahl aller Windungen, welche der Spiralkorb für jede gegebene Tiefe des Schachtes braucht, zu bestimmen suchen. Da die Länge des aufgewundenen Seiles von z bis $y = 2\, m.\, \varphi$, folglich für jede gleiche Anzahl Windungen zu beiden Seiten von der Mitte eben so gross ist, als ob das Seil auf dem mittlern Durchmesser des Spiralkorbes aufgewunden würde, so erhellet, dass die nöthige Anzahl Windungen für jede von der Mitte aus berechnete Seillänge auf dieselbe Art gefunden werde, wie für einen cylindrischen Spiralkorb. Setzen wir nämlich die Länge des ganzen Seiles $= L$, und die mittlere Peripherie des Korbes $= 2\, \pi .\, m$, so ist die Anzahl aller Windungen, $n = \frac{L}{2\, \pi.\, m}$.

In dem obigen Beispiele bei dem Siegelsberger Schachte war L = 900 Fuss, und m = 9 Fuss, folglich ist die nöthige Anzahl der Spiralgewinde $n = \frac{900}{2.\ 3{,}1415.\ 9} = 16$ beinahe. Die Höhe eines Gewindes rührt von der Stärke der Ketten oder Seile her; in unserm Falle beträgt die Seilstärke 2 Zoll, wozu ½ Zoll als Spielraum gehört. Rechnet man hiezu 1 Zoll als Stärke des hervorspringenden Bretes, um das Herabfallen der Seile zu verhindern, so ergibt sich für die eigentliche Höhe einer Windung 3,5 Zoll, demnach die Höhe für 16 Windungen = 56 Zoll = 4⅔ Fuss, welches den obern Kegel ausmacht. Da der andere Theil eben so gross seyn muss, so ist die Höhe des ganzen Spiralkorbes = 9⅓ Fuss.

Der Winkel, mit welchem das ganze Seil aufgewunden wird, ist offenbar $= 2\, \pi\, n$, demnach die Hälfte dessen, oder der Winkel von m bis a oder von m bis b, nämlich $\varphi = \pi\, n$. Da nun zu gleicher Zeit auch der Unterschied $v = \frac{a - b}{2} = \alpha$ werden muss, so haben wir die beständige Grösse $C = \log \frac{\pi.\, n}{\alpha} \sqrt{(m^2 + \alpha^2)}$, folglich ist die vollständige Gleichung der Spirallinie für eine gleichförmige Seilstärke, $\frac{\varphi}{\pi .\, n} = \frac{v}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{m^2 + \alpha^2}{m^2 + v^2}\right)}$.

In diesem Ausdrucke ist φ der Winkel, welchen die Zugpferde um die Achse des Treibkorbes von der Mitte der Spiralgewinde Mm bis zu dem Radius Yy, dessen Grösse man berechnen will, beschreiben, 2π der Winkel von 360 Grad, und $\frac{n}{2}$ die halbe Anzahl aller Windungen, folglich $2\pi \cdot \frac{n}{2}$ der Winkel für alle Windungen, welche sich auf dem halben Kegel von Mm bis Aa oder von Mm bis Bb befinden; ferner ist Fig. 3. Tab. 14.

$v = \frac{y - z}{2} = \frac{Yy - Mm}{2} = py$, d. h. v ist die Grösse, welche zum mittlern Halbmesser $Mm = \frac{a + b}{2}$ für die obere Hälfte des Kegels zu addiren, und für die untere Hälfte desselben Kegels zu subtrahiren ist; endlich ist $\alpha = \frac{a - b}{2}$ und $m = \frac{a + b}{2}$.

In dem oben angeführten Beispiele vom *Siegelsberge* war m = 9 Fuss, $\alpha = 5$ Fuss und n = 16; es fallen daher 8 Halbmesser oberhalb und 8 unterhalb der mittlern Windung. Man muss nunmehr, um das Profil des Treibkorbes zu erhalten, für den Drehungswinkel φ verschiedene Werthe annehmen. Für das oberste Gewinde Aa ist $\varphi = 8 . 360 = 8 . 2\pi$, demnach $\frac{\varphi}{\pi . n} = \frac{8 . 2\pi}{\pi . 16} = 1$, also $1 = \frac{v}{\alpha} \sqrt{\left(\frac{m^2 + \alpha^2}{m^2 + v^2}\right)}$, woraus $v = \alpha = 5$ Fuss folgt; demnach ist der Halbmesser für das oberste Gewinde $Aa = m + \alpha = 9 + 5 = 14$ Fuss; für das nächst darunter liegende Gewinde ist $\varphi = 7 . 2\pi$, folglich substituirt, $\frac{7 . 2\pi}{16 . \pi} = \frac{7}{8} = \frac{v}{5} \sqrt{\left(\frac{9^2 + 5^2}{9^2 + v^2}\right)}$. Hieraus ergibt sich $v = 4{,}22$ Fuss, demnach der Halbmesser des Gewindes $= 9 + 4{,}22 = 13{,}22$ Fuss, u. s. w.

Für die zweite Hälfte des Kegels, nämlich für die Windungen Mm bis Bb hat v gleiche Werthe wie oberhalb Mm, nur dass sie itzt von Mm = 9 Fuss a b g e z o g e n werden. Demnach ist der Radius für die unterste oder 16[te] Windung Bb = 9 — 5 = 4 Fuss; für die 15[te] Windung = 9 — 4,22 = 4,78 Fuss u. s. w., wie in der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Windungen n.	Berechneter Werth für v.	Radien für den krummlinigten Kegel.	Radien für eine gleichförmige Steigung.	Unterschiede dieser Radien.
0.	5,00 Fuss	14,00 Fuss	14,00 Fuss	0,00 Fuss
1.	4,22 —	13,22 —	13,38 —	0,16 —
2.	3,52 —	12,52 —	12,75 —	0,23 —
3.	2,87 —	11,87 —	12,13 —	0,26 —
4.	2,25 —	11,25 —	11,50 —	0,25 —
5.	1,67 —	10,67 —	10,88 —	0,21 —
6.	1,10 —	10,10 —	10,25 —	0,15 —
7.	0,55 —	9,55 —	9,63 —	0,18 —
8.	0,00 —	9,00 —	9,00 —	0,00 —

Windungen n.	Berechneter Werth für v.	Radien für den krummlinigten Kegel.	Radien für eine gleichförmige Steigung.	Unterschiede dieser Radien.
9.	— 0,55 —	8,45 —	8,37 —	0,08 —
10.	— 1,10 —	7,90 —	7,75 —	0,15 —
11.	— 1,67 —	7,33 —	7,12 —	0,21 —
12.	— 2,25 —	6,75 —	6,50 —	0,25 —
13.	— 2,87 —	6,13 —	5,87 —	0,26 —
14.	— 3,52 —	5,48 —	5,25 —	0,23 —
15.	— 4,22 —	4,78 —	4,62 —	0,16 —
16.	— 5,00 —	4,00 —	4,00 —	0,00 —

In der vierten Columne dieser Tabelle sind noch die Halbmesser für eine gleichförmige Steigung beigesetzt worden, um die Unterschiede dieser Spirallinie von der gemeinen, auf der Oberfläche eines geradlinigten Kegels verzeichneten Spirallinie leichter beurtheilen zu können. Diese Unterschiede betragen zwar in dem angenommenen Beispiele wenig, sie fallen jedoch grösser aus, wenn der halbe Unterschied des grössten und kleinsten Halbmessers $\frac{a - b}{2} = \alpha = \frac{m \,.\, S}{Q + 2T + S}$ mehr beträgt; wenn daher, wie §. 226 gezeigt wurde, aus tiefen Schachten nur kleine Lasten gefördert werden.

§. 229.

Aus den berechneten Radien ersieht man ferner, dass der obere Theil der gefundenen Spirallinie von a bis m ausserhalb des Kegels, und der untere von m bis b innerhalb des Kegels liege. Das Profil dieser Spirallinie kommt demnach mit dem bekannten Zuge der Karnissleisten in der Architektur oder mit der Schönheitslinie unserer Vorfahren überein *).

*) Zur bessern Uebersicht dieses Gegenstandes wollen wir noch die Umstände untersuchen, bei welchen diese Spirallinie eine gleichförmige Steigung erhält, oder gänzlich in die Oberfläche eines geradlinigten Kegels fällt. Zu dieser Absicht ist vorläufig zu bemerken, dass die Stärke oder das Gewicht einer Seilklafter der anzuhängenden Last proportional genommen werden muss, und dass sonach das obere Ende, welches nebst der Last der beladenen Tonne zugleich noch das ganze Gewicht des Seiles tragen muss, stärker seyn sollte, als das untere Ende, welches nur allein die Last der beladenen Tonne zu tragen hat. Da auf solche Art die Stärke der Seile von oben nach unten abnehmen muss, so wollen wir das veränderliche Gewicht einer Seillachter, welche auf dem Radius Z z zu liegen kommt $= G$ und das Gewicht einer Seillachter für den Radius Y y $= \gamma$ nennen. Demnach ist das Gewicht des Seiles von m bis y $= \int \gamma \,.\, y \,.\, d\,\varphi$, und von m bis z, $= \int G \,.\, z \,.\, d\,\varphi$, folglich $U = E - \int \gamma \,.\, y \,.\, d\,\varphi$, und $W = B - \int G \,.\, z \,.\, d\,\varphi$. Werden nun diese Werthe in die allgemeine Gleichung III gesetzt, so erhalten wir $\frac{d\,m}{v}\left(\int \gamma \,.\, y \,.\, d\,\varphi + \int G \,.\, z \,.\, d\,\varphi\right) + \gamma \,.\, y \,.\, d\,\varphi \,.\, - G \,.\, z \,.\, d\,\varphi = 0$. Wollten wir hier die Gewichte γ, g, G den Radien y, m, z umgekehrt proportional oder

§. 230.

Da wir nunmehr die Construction und Berechnung der Dimensionen eines Spiralkorbes für einen jeden gegebenen Fall kennen, so unterliegt es weiter keiner Schwierigkeit den Effekt, d. h. das Quantum Erze, welche mit einem Göpel täglich gefördert werden können, zu berechnen. Wir haben nämlich hier ganz denselben Fall, wie er bei einem Rade an der Welle, wo der Halbmesser $= \frac{a + b}{2}$ ist, statt findet. Die Berechnung des Effektes wird daher für den spiralförmigen Korb gerade so gemacht, wie sie §. 87 für einen Haspel angestellt wurde. Da übrigens die Pferde während eines ganzen Tages nur 8 Stunden in ununterbrochenem Zuge gehen, so ist dafür zu sorgen, dass die Zeit des Einladens und Ausstürzens der Tonne möglichst abgekürzt werde.

Zu einem Beispiele wollen wir das Verfahren und die Rechnung anführen, nach welcher die Maasse für den oben erwähnten Pferdegöpel auf *Krussna Hora* ausgemittelt wurden. Um zu erfahren, welches Gewicht der Kette gegeben werden müsse, wurde vorläufig eine Probekette aus demselben Eisen verfertigt, welches in den dortigen Hammerhütten erzeugt, und als das beste anerkannt worden war. Eine Klafter dieser Probekette wog 3 ℔; sie wurde an beiden Enden mit stärkeren Haken versehen, und das obere Ende derselben an einem Balken der Hammerhütte fest angebunden, an das untere Ende aber eine starke Wagschale gehängt, welche zum Abwägen des Eisens durch

$\gamma . y = g . m = G . z$ setzen, so wäre $d \frac{m}{v} \cdot 2 g . m . \varphi = 0$, folglich $\frac{2 g . m^2 . \varphi}{v} = C = 2 g . m^2 . \frac{\pi . n}{\alpha}$ sonach $v = \frac{\alpha . \varphi}{\pi . n}$, welches die Gleichung für die gleichförmige Steigung der Spirallinie auf der Oberfläche eines geradlinigten Kegels ist.

Die Bedingniss, dass $G : \gamma = y : z$ seyn müsse, nähert sich offenbar dem praktischen Bedürfnisse, indem wir bereits gesehen haben, dass das Seil am obern Ende, welches von b nach z gewunden wird, stärker seyn sollte, als am untern Ende, von a nach y. Diese Bedingniss ist jedoch nicht so leicht bei Seilen wegen der gleichförmigen Gespinnste und Drehungen, als vielmehr bei eisernen Ketten ausführbar, wo das zunehmende Gewicht der Seillachtern in jedem beliebigen oder gegebenen Verhältnisse durch Abwägen des dazu anzuwendenden Eisens ohne Anstand vermehrt werden kann.

Aber bei einer Kette fordert das allgemeine Gesetz für die Stärke, dass dieselbe in jedem Punkte der daran hängenden Last proportional sey, demnach kann die obenangeführte Proportion für die gleichförmige Zunahme $(G : \gamma = y : z)$ nicht statt finden. Wir sehen also, dass durch die zunehmende Stärke der Kette nur eine Annäherung zum geradlinigten Spiralkorb bewirkt werde, dass jedoch wegen der Verschiedenheit dieser beiden Verhältnisse noch immer nöthig werde, die Radien zu bestimmen, wenn eine vollkommene Ausgleichung der Zugkraft in allen Punkten statt finden soll.

Da jedoch diese Rechnung, welche in der §. 218 genannten Abhandlung geführt ist, oder eine noch genauere, die hierüber angegeben werden könnte, zu verwickelt ist, demnach von den bei dem Bergbaue angestellten Maschinenmeistern nicht leicht gebraucht werden dürfte, so glaubt man, dass es genüge, hier nur die grössere Annäherung des Spiralkorbes zum geradlinigten Kegel bei der Anwendung der Ketten gezeigt zu haben, und dass sonach die noch übrig bleibenden Ungleichheiten wegen ihrer Unbedeutenheit der Anstrengung oder dem Nachlassen der Pferde überlassen werden können. Für diesen Fall wird also nur nothwendig seyn, den obern und untern Halbmesser des Korbes (a und b) nach der Rechnung §. 224 zu bestimmen.

mehrere Jahre gedient hatte. In Anbetracht, dass die unterste Klafter der zu verfertigenden Kette eine Last von 15 Zentner Erz und 3 Zentner Tonnengewicht, also zusammen eine Last von 18 Zentnern, tragen sollte, hat man die in die Wagschale nach und nach gelegten Gewichte bis zu 24 Zentner vermehrt. Obgleich die Probekette von diesem Gewichte nicht zerrissen wurde, so glaubte man doch bei diesem Versuche um so mehr stehen zu bleiben, als man die Festigkeit des Eisens nur auf den vierten Theil dieses Versuches in Rechnung nehmen wollte. Da jedoch die Bergleute hiemit noch nicht zufrieden waren, und überhaupt gegen die Einführung einer Kette statt der bisher üblichen Treibseile das höchste Misstrauen an Tag legten, so hat man zu ihrer grössern Sicherheit und Beruhigung die Festigkeit des Eisens nur mit dem achten Theile dieses Versuches in Rechnung genommen, sonach der untersten Klafter der Treibkette, welche 18 Ztr. zu tragen hat, ein Gewicht von 18 ℔ gegeben. Da nun der Schacht eine Tiefe von 40 Klaftern hat, wozu man noch 2 Klafter Kettenlänge ober der Hängebank hinzurechnete, so wurde hiernach das verhältnissmässige Gewicht der obersten oder 42ten Klafter, welche nebst den vorerwähnten 1800 ℔ noch das Gewicht der ganzen Treibkette S tragen muss, aus der Proportion $1800 : 18 = 1800 + S : 18 + \frac{S}{100}$ berechnet. Wird nun das mittlere Gewicht der obersten und untersten Klafter, nämlich $18 + \frac{S}{200}$ mit der Länge der Kette von 42 Klaftern multiplicirt, so ergibt sich das Gewicht der ganzen Kette $= \left(18 + \frac{S}{200}\right) 42 = S$, woraus $S = \frac{18.42}{1 - 0{,}21} = 957$ ℔ folgt.

Hieraus ergibt sich das Gewicht der obersten Klafter-Kette $= 18 + \frac{S}{100} = 18 + 9{,}57 = 27{,}57$ ℔; und das verhältnissmässige Gewicht der übrigen Klaftern $= 18 + \frac{l}{L} \cdot 9{,}57$, wo l die Länge der Kette in Klaftern vom schwächsten Ende aufwärts und L die Länge der ganzen Kette vorstellt.

In der §. 225 gefundenen Gleichung $N.K.A = Q\left(\frac{a+b}{2}\right)$ wurde nun der Hebelsarm der Kraft $A = 24$ Fuss, die Anzahl der Zugpferde $N = 2$, und die Kraft eines Zugpferdes $K = 125$ ℔ in der Hinsicht angenommen, weil die Göpelpferde täglich nur 8 Stunden im Zuge gehen, und hiebei nicht nur die Zeit von 4 Stunden, sondern auch noch diejenigen Stillstände, die nach jedem Aufzuge auf das Ein- und Ausladen der Tonne verwendet werden, und in unserem Falle jedesmal beiläufig 2 Minuten betragen, zur Erholung und Ruhe verwenden. Da ferner die Ladung in der Tonne $Q = 1500$ ℔ beträgt, so ist der mittlere Halbmesser des Spiralkorbes $m = \frac{a+b}{2} = \frac{24 \,.\, 2 \,.\, 125}{1500} = 4$ Fuss. Demnach ist der grösste und kleinste Halbmesser der Spiralwindungen nach §. 224 $= \left(\frac{a+b}{2}\right)\left\{1 \pm \frac{S}{Q + 2T + S}\right\} = 4\left\{1 \pm \frac{957}{1500 + 600 + 957}\right\} = 4 \pm 1{,}25$, folglich der grösste Halbmesser $a = 5{,}25$, und der kleinste $b = 2{,}75$.

Die Zeit eines Aufzuges beträgt so wie §. 87 bei dem cylindrischen Treibkorbe $\frac{H.A}{c.m} = \frac{42.\,6.\,24}{4.\,4} = 378^{Sec.} = 6^{Min.}\ 18^{Sec.}$, und wenn hiezu die Zeit des Stillstandes

nach jedem Aufzuge, welche beiläufig auf $2^{Min.}$ angeschlagen worden, gesetzt wird, so ist die für die Ausförderung einer Tonne nöthige Zeit = 8 Minuten. Hieraus folgt die Zahl der in einem Tage zu bewirkenden Aufzüge n = 57,83 oder beinahe 58 Aufzüge.

Nachdem der Bau der Maschine vollendet war, wurde das Treiben vorläufig mit eigenen Maierhofspferden versucht, und am ersten Tage 57, am andern Tage 58 Tonnen in 8 Stunden ausgetrieben. Die Leistung wurde demnach auch durch die übrigen 29 Jahre, seit welchen diese Maschine ohne einem Unfalle in beständigem Gange war, zur Vorschrift für die Accorde mit den Pferdehältern und Treibknechten unverändert angenommen. Der tägliche Effekt, welcher von zwei Zugpferden mit dieser Maschine bewirkt wurde, ist demnach 58 . 15 = 870 Zentner.

§. 231.

Für die Ausübung kommt diese Aufgabe meistens in umgekehrter Stellung vor; es wird nämlich das Quantum der Erze, welches für die Schmelzhütten täglich geliefert werden soll, oder das Quantum der tauben Berge, welche bei der Häuerarbeit abfallen, uud welche zum Verstürzen der abgebauten Gänge nicht verwendet werden können, demnach herausgeschafft werden müssen, dem Maschinenmeister angegeben, welcher demnach den Bau der Maschine, die für jede Tiefe nöthige Anzahl Pferde, das Personale zur Bedienung der Maschine u. s. w. zu bestimmen hat. Da diese Form der Aufgabe meistens auf Bruchtheile der Arbeiter und Zugpferde führet, so wird in allen solchen Fällen der Voranschlag für eine bestimmte Anzahl Pferde gemacht.

Beispiel. Es sollen aus einer Tiefe von 200 Klaftern oder 1200 Fuss täglich 400 Zentner Erze gefördert werden, so folgt aus der Gleichung für den Effeckt $\frac{3600.\ t.\ c.\ N.\ K}{H} = \frac{3600.\ 8.\ 4.\ N.\ 125}{1200} = 40000$ ℔., die nöthige Anzahl Pferde $N = 3\frac{1}{3}$, wofür man $N = 4$ nehmen muss. Wird dieser Werth in die Gleichung zwischen Kraft und Last $N . K . A = Q . m$ substituirt, und $A = 12$ Fuss, dann $m = 5$ Fuss und K aus den im vorigen §. angegebenen Gründen = 125 ℔. angenommen, so ergibt sich das Gewicht der Ladung in der Tonne $Q = 12$ Zentner. Setzen wir das Gewicht der Tonne mit dem Beschläge $T = 3$ Zentner, so ist $Q + T = 1500$ Pfund.

Uiber die Festigkeit des Eisens haben die neuern Erfahrungen gelehrt, dass bei den englischen Kettenbrücken die Spannkraft meistens über 300 mal grösser ist, als das Gewicht einer Klafter derselben Kette. Nehmen wir diese, so sehr im Grossen ausgeführte Erfahrung zum Maasstabe für die Festigkeit der Bergwerksketten an, so beträgt das Gewicht der untersten Klafter $= \frac{1500}{300} = 5$ Pfund, das Gewicht der obersten Klafter $= 5 + \frac{S}{300}$, also das Mittel hievon $5 + \frac{S}{600}$. Wird diess mit der Länge von 200 Klaftern multiplicirt, so erhalten wir $\left(5 + \frac{S}{600}\right) 200 = S$, woraus das Gewicht der ganzen Kette $S = 1500$ ℔. folgt.

Da nunmehr die oberste Klafter bloss ein Gewicht von $5 + \frac{1500}{300} = 10$ ℔. erhält, so ergibt sich, dass diese oberste Klafter nur erst eben so schwer sey, als das bei den ungari-

schen Bergwerken (§. 215) vorhandene Gewicht einer Klafter Treibseil. Ein solches Treibseil von 200 Klaftern Länge wiegt aber 2000 ℔, während die ganze Kette nur ein Gewicht von 1500 ℔ hat. Hieraus ersehen wir nun, dass die Treibketten wirklich leichter sind, als die Treibseile.

Die Halbmesser der obersten und untersten Windungen sind nach §. 224 in unserem Falle $= 5 \left\{1 \pm \frac{1500}{1200 + 600 + 1500}\right\} = 5\ (1 \pm 5/11)$, folglich $a = 5 + 2{,}27 = 7{,}27$ Fuss und $b = 5 - 2{,}27 = 2{,}73$ Fuss.

Die Zeit eines Aufzuges beträgt $\frac{H \,.\, A}{c \,.\, m} = \frac{1200 \,.\, 12}{4 \,.\, 5} = 12$ Minuten. Wird hiezu für das Ein- und Austürzen eine Zeit von $2^{\text{Min.}}$ addirt, so ergeben sich während der Zeit einer Schicht von 8 Stunden, 34,3 Aufzüge, wofür man 34 annehmen muss. Wird diess mit der Ladung von 12 Zentnern multiplicirt, so folgt der Effekt in einem Tage $= 34 \,.\, 12 = 408$ Zentner, wie es gefordert wurde.

§. 232.

Es verdient hier noch bemerkt zu werden, dass die Widerstände der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile nur die Zugkraft oder die nöthige Anzahl der Göpelpferde vermehren, aber an der Spirallinie selbst gar nichts ändern können. Denn da mittelst der Spiralgewinde die Gewichte der Seile, der geladenen und ungeladenen Tonne ausgeglichen, und überhaupt alle Widerstände auf den mittlern Radius m zurückgeführt werden, so müssen offenbar auch die Widerstände der Reibung, welche denselben Gewichten proportional sind, gleichfalls zu einem mitleren Widerstande gebracht werden. Es sey der Widerstand $= R$, so haben wir

für den Anfang der Bewegung, $K' . A = (Q + T + S)\, b - T . a + R . m$ (I)

und für das Ende, $K' . A = (Q + T)\, a - (T + S)\, b + R . m$ (II).

Die Summe dieser zwei Gleichungen gibt $K' . A = (Q + R)\, m$, oder $\frac{K'}{Q + R} = \frac{m}{A} = \frac{K}{Q}$, woraus erhellet, dass nur die Zugkräfte $K : K'$ in dem Verhältnisse wie $Q : Q + R$ vermehrt werden müssen, wenn das Verhältniss $m : A$ beibehalten wird. Werden aber die zwei Gleichungen I und II von einander abgezogen, so ist $(Q + 2T + 2S)\, b = (Q + 2T)\, a$ woraus $\frac{a - b}{2} = \alpha = \frac{m . S}{Q + 2T + S}$ folgt, wie oben §. 224 ohne der Reibung berechnet wurde.

§. 233.

Bei der Angabe der Dimensionen eines Pferdegöpels kommt auch der Hebelsarm der Pferde A zu berücksichtigen. Da die Pferde sich in einem Kreise von allzukleinem Halbmesser schwer wenden, und schwindlicht werden, bei einem zu grossen Hebelsarme aber die Maschine, besonders wenn der ganze Göpel sammt dem Pferdezuge unter einem Dache steht, zu schwerfällig und kostbar wird, so pflegt man dem Schwengbaume gewöhnlich eine Länge von 12 bis 24 Fuss zu geben.

Man hat hiebei die Bemerkung gemacht, dass die Pferde, wenn sie im Kreise gehen, bei der gewöhnlichen Bespannung mit dem Schwengbaume, woran sie gespannt werden,

einen Winkel bilden, der von 90 Grad um so mehr abweicht, je kleiner der Halbmesser Fig. 4.
der Pferdekraft ist. Es sey c d die Länge des Schwengbaumes, der Reihnagel befinde Tab. 14.
sich in d, und die Brust der Pferde in b, so dass b d die Entfernung der Brust der Pferde vom Reihnagel ist. Es wird also die Zugkraft der Pferde nach der Richtung d b in d g, welches winkelrecht auf dem Halbmesser c d steht, und in d e zerlegt, welches gegen den Mittelpunkt c drückt und verloren geht. Ziehen wir nun c o senkrecht auf b d und setzen wir den Winkel o c d $= \varphi$, so ist auch der Winkel b d g $= \varphi$ und d g : d b ($=$ K) $=$ Cos φ : 1 und d g $=$ K . Cos φ, welches nunmehr die Kraft ist, mit der die Pferde den Reihnagel im äussern Kreise fortbewegen.

Man sieht nun sehr leicht; dass die Kraft K Cos φ um so mehr von K abweicht, je grösser der Winkel φ ist; da ferner b d oder die Entfernung der Brust der Pferde vom Reihnagel als eine konstante Grösse angesehen werden kann, so wird auch der Winkel φ um so grösser, je kleiner der Radius c d ist; demnach wird auch die Kraft, welche die Pferde in der Richtung d g senkrecht auf den Halbmesser c d ausüben, desto kleiner werden, je kleiner dieser Halbmesser oder die Länge des Schwengbaumes ist.

Obgleich diese Verminderung für die Grösse der wirklich angewandten Zugkraft als nachtheilig angesehen wird, so ist doch von der andern Seite zu bemerken, dass dieser Nachtheil bei der Berechnung des Effecktes durch den Umstand entfällt, dass die Pferde, wenn sie nach der Richtung d b in o ziehen, nur einen Umkreis, der dem Halbmesser c o entspricht, zu beschreiben haben.

Nennen wir den Halbmesser c h der Welle, um welche das Seil gewunden wird $=$ m, die Länge des Schwengbaumes c d $=$ A, so ist die Gleichung zwischen Kraft und Last K . Cos φ . A $=$ Q . m (I).

Die Geschwindigkeit der Pferde ist v, allein diese Pferde bewegen sich nunmehr in einem Kreise, dessen Halbmesser c o $=$ A . Cos φ ist; wir finden demnach die Geschwindigkeit v′ der Last aus der Proportion v : v′ $=$ A . Cos φ : m, woraus $v' = \frac{m \cdot v}{A \cdot \text{Cos}\,\varphi}$.
Demnach ist die Zeit, in welcher die Last auf die Höhe H steigt, oder die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H}{v'} = \frac{H \cdot A \cdot \text{Cos}\,\varphi}{m \cdot v}$ (II).

Hieraus ergibt sich die Anzahl der Aufzüge in einem Tage $n = \frac{3600\, z \cdot v \cdot m}{H \cdot A \cdot \text{Cos}\,\varphi}$ (III).
Wird diese Zahl mit dem (aus I) berechneten Werthe für Q multiplicirt, so ergibt sich der tägliche Effeckt $n \cdot Q = \frac{3600\, z \cdot v \cdot m}{H \cdot A \cdot \text{Cos}\,\varphi} \cdot \frac{K \cdot \text{Cos}\,\varphi\, A}{m} = \frac{3600\, z \cdot v \cdot K}{H}$ (IV)

Dieser Ausdruck ist gerade derselbe, wie wir ihn §. 87 für ein Rad an der Welle gefunden haben, wobei die Pferdekraft senkrecht auf die Richtung des Halbmessers wirkend angenommen wurde; *es macht daher der schiefe Zug der Pferde bei der Berechnung des Effektes keinen nachtheiligen Einfluss.* Die Grösse der Schwengbäume ist demnach nur mit Rücksicht auf den im Gebäude vorhandenen Raum u. dgl. zu bestimmen.

§. 234.

Wir haben §. 222 bei der Erklärung des Bremswerkes eines Göpels angeführt, dass der Balken P P durch sein eigenes Gewicht das Anziehen der Bremsbäume L M, und hie-

Fig. durch die Bremsung des Spiralkorbes bewirke, und dass zur Verstärkung dieser Bremse
1 und der Hebel QQ noch von einem Arbeiter an seinem Ende herabgedrückt werde. Wir
2. Tab. wollen nun berechnen, welche Einrichtung das Bremswerk erhalten müs-
13. se. Es sey das Gewicht des Balkens PP = G, der Halbmesser der stehenden Bremssäule N = r und die Entfernung von der Achse der Bremssäule bis zu dem Oehre, wo die Stangen s, s verbunden sind = R, so ist die Kraft, mit welcher die Bremssäule bei den Oehren gedreht wird, $= \frac{G.R}{r}$. Diese Kraft wirkt in x, x; es wird also die Kraft womit die Bremsbäume bei L an der Peripherie des untern Korbkranzes angedrückt werden $= \frac{G.R}{r} \cdot \frac{xM}{LM}$ seyn. Hieraus entsteht eine Reibung, welche, wie im V. Kapitel gezeigt wird, den m^{ten} Theil des Druckes oder $m . \frac{G.R}{r} \cdot \frac{xM}{LM}$ beträgt. Dieser Widerstand multiplicirt mit dem Halbmesser des untern, für die Bremse angebrachten, etwas hervorstehenden Korbkranzes (B) muss das Gewicht der Ladung in der Tonne multiplicirt mit dem mittlern Halbmesser des Korbes (wie wir §. 225 gesehen haben) aufwiegen oder $m \cdot \frac{G.R}{r} \cdot \frac{xM}{LM} \cdot B = Q\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Hieraus ergibt sich das Gewicht, welches der Balken PP erhalten muss, $G = \frac{Q}{m}\left(\frac{a+b}{2.B}\right)\frac{r}{R} \cdot \frac{LM}{xM}$.

Beispiel. Bei dem Pferdegöpel auf dem Berge *Krussna Hora* ist nach §. 230 der mittlere Halbmesser $\frac{a+b}{2} = 4$ Fuss, die Ladung in der Tonne Q = 1500, die Verhältnisse der Halbmesser $\frac{r}{R} = \frac{1}{6}$, $\frac{LM}{xM} = \frac{6}{5}$, B = 5 Fuss, endlich kann der Reibungskoeficient $m = \frac{1}{3}$ angenommen werden; demnach ist $G = 1500 . 3 . \frac{4}{5} . \frac{1}{6} . \frac{6}{5} = 720$ ℔. Nimmt man die Länge des Balkens PP zu 30 Fuss, die Breite zu 9 Zoll und die Dicke zu 7 Zoll, dann das Gewicht von 1 Kub. Fuss weichen Holzes zu 36 ℔ an, so gibt diess $30 . \frac{9}{12} . \frac{7}{12} . 36 = 472\frac{1}{2}$ ℔ als das Gewicht des Balkens. Da dieses nicht hinreicht, so ist noch nöthig, den Hebel QQ und hiedurch den Balken PP mit einer Kraft herabzuziehen. Nehmen wir die Kraft des Arbeiters am Ende des Hebels mit 62 ℔ und das Verhältniss der Hebelsarme mit 1 : 4 an, so gibt diess 248 ℔, welche mit dem eigenthümlichen Gewichte des Balkens von $720\frac{1}{2}$ ℔ gerade $576\frac{1}{2}$, also das zur Bremsung erforderliche Gewicht geben. Da wir jedoch die Kraft des Arbeiters für einen Augenblick mit 100 bis 125 ℔ annehmen können, so gibt diess bei dem Verhältnisse der Hebelsarme 1 : 4 noch eine Kraft von 400 bis 500 ℔, welche nunmehr zu dem Gewichte des Balkens addirt, dasselbe bedeutend vermehrt. Durch diese weit stärkere Bremsung wird nun die Maschine für jeden Unglücksfall eines Kettenbruches oder für den Fall, wenn die Zugstränge der Pferde abreissen und die Maschine zurückgehen will, vollkommen gesichert.

III. Kapitel.
Festigkeit der Körper.

§. 235.

Bei dem Baue der Maschinen und Gebäude ist es von Wichtigkeit, allen Theilen eine solche Stärke und Festigkeit zu geben, damit sie bei ihrem Gebrauche nicht zerreissen, sich nicht übermässig biegen oder gar brechen; dagegen dürfen diese Theile auch nicht so stark und massiv gemacht werden, dass sie den Kostenaufwand unnöthig vermehren, oder durch ihre zu grosse Schwere die Widerstände der Bewegung vergrössern, oder wohl gar durch ihr eigenes Gewicht brechen.

Ein jeder Körper besteht aus unendlich vielen kleinen Theilchen, die auf eine unbekannte Art an einander hängen. Man pflegt diesen Zusammenhang mit dem Worte *Cohaesion* zu bezeichnen.

Alle Körper sind fähig, ihre Gestalt zu verändern, d. i. eine Aenderung an ihren Maassen (Dimensionen) zu erleiden, oder ausgedehnt und zusammengedrückt zu werden. Wenn Körper ihre Gestalt durch eine äussere Ursache (eine Kraft) ändern und nach Aufhören derselben wieder in ihre ursprüngliche Gestalt zurücktreten, so besitzen sie eine Federkraft und werden **elastisch** genannt. Nehmen die Körper ihre ursprünglichen Maasse unverändert wieder an, so heissen sie **vollkommen elastisch**; bleibt aber nach aufgehobenem Drucke eine Aenderung zurück, so nennt man sie **unvollkommen elastisch.**

§. 236.

Unter **Festigkeit** eines Körpers versteht man die Kraft, mit welcher derselbe der Ausdehnung oder Verschiebung und Trennung seiner Theile widersteht. Man unterscheidet nach Verhältniss der Richtung der Kraft, welche eine Verlängerung oder Verkürzung der Theile des Körpers zu bewirken strebt:

1tens. Die **absolute Festigkeit**, wenn die Kraft in der Richtung der Länge des Körpers und seiner faserigen oder nervigten Theile angebracht ist, und sonach eine **Verlängerung** oder das **Zerreissen** derselben zur Folge hat.

2tens. Die **relative Festigkeit**, wenn die Ausdehnung oder Trennung der Theile nach einer andern Richtung erfolgt, als nach welcher die äussere Kraft einwirkt. Man bezeichnet diess mit dem Worte **zerbrechen.**

3tens. Die **rückwirkende Festigkeit**, wenn die Kraft so wie die vorige nach der Länge der faserigen Theile des Körpers jedoch in der entgegengesetzten Richtung angebracht ist, und ein Zusammendrücken oder Ineinanderschieben dieser Theile, sonach eine **Verkürzung der Länge**, oder das **Zerdrücken** des Körpers zur Folge hat.

4tens. Die **Festigkeit**, womit die Körper dem **Drehen** widerstehen, wobei nämlich einige Theile genöthigt werden, um eine gemeinschaftliche Achse grössere Winkel als die übrigen zu beschreiben.

A. Absolute Festigkeit der Körper.

§. 237.

Wenn man einen prismatischen Körper an einem Ende befestigt, und an dem andern eine Kraft anbringt, welche in der verlängerten Richtung beider Endpunkte wirkt, so wird die absolute Festigkeit des Körpers in Anspruch genommen, z. B. wenn der Körper in eine vertikale Lage gebracht, am obern Ende auf irgend eine Art befestigt und am untern Ende mit Gewichten belastet wird.

Viele Versuche, welche man auf diese Weise über die absolute Festigkeit verschiedener Materien angestellt hat, gaben das Resultat, dass alle Körper durch angehängte Gewichte mehr oder minder ausgedehnt werden, und dass diese Ausdehnungen oder Verlängerungen eines jeden Körpers, so lange die Belastungen klein sind, sehr nahe den angehängten Gewichten proportional sind. Bleiben diese Belastungen innerhalb einer gewissen Gränze, so treten die Theile des Körpers nach Abnahme des angehängten Gewichtes wieder in ihre vorige Länge zurück und nehmen ihre ursprüngliche Gestalt wieder an; die Körper haben also innerhalb dieser Gränze eine vollkommene Elastizität. Wird die Belastung grösser, so behalten die Körper nach Abnahme der Gewichte zwar noch eine Elastizität, sie bleiben jedoch verlängert, und werden endlich die angehängten Gewichte noch weiter vermehrt, so tritt eine völlige Trennung der Theile des Körpers ein, und sie zerreissen.

Nach den Versuchen des Hrn. *Navier* und anderer Physiker behält das Eisen seine Elastizität bis beinahe zu zwei Drittel der grössten Last, wovon es zerrissen wird; das Kupfer behält seine Elastizität bis zur Hälfte dieses Gewichtes, das Blei bis etwas über die Hälfte desselben. Man hat ferner gefunden, dass die weitern Ausdehnungen dieser Metalle von dem Gesetze der Proportionalität mit der Last sehr abweichen, und diess zwar immer mehr, bis die Körper endlich zerreissen. Weil aber die Körper, welche wir bei Maschinen verwenden, ihre Belastung unverändert tragen sollen, so hat man bisher angenommen, dass man dem Eisen die Hälfte oder ein Drittheil, dem Kupfer, Messing und Blei aber ein Drittheil oder ein Viertheil der Last, von welcher sie zerreissen, mit voller Sicherheit zu tragen geben oder anvertrauen könne.

§. 238.

Da wir bei dem Maschinen- und Bauwesen und überhaupt in allen Fällen, wo die absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird, verlangen, dass die Körper bei eintretender Belastung derselben nicht zerreissen, und bei Abnahme der Belastung wieder in ihre ursprüngliche Länge zurücktreten, so haben wir bis dahin für ihre Brauchbarkeit folgendes Gesetz:

Fig. 6. Tab. 14. Es seyen A, B, C, D vier Körper von gleicher Materie und vollkommener Elastizität, z. B. vier Eisenstäbe oder vier gleichartig verfertigte Seilstücke, welche nur bis zu dem Punkte belastet werden, wo sie ihre vollkommene Elastizität noch behalten. Wir wollen annehmen, dass die drei ersten Körper dieselbe Länge $= l$, die drei letzten dieselbe Querschnittsfläche $= F$ haben; die hieran angehängten Ge-

wichte seyen q, Q', Q und Q; die Ausdehnung der zwei ersten Körper sey α, der zwei letzten aber α'' und α'. Fig. 6. Tab. 14.

1tens. Betrachten wir zuerst die zwei vollkommen elastischen Körper A und B von gleicher Materie und gleicher Länge, jedoch verschiedenen Querschnittsflächen, so kann man annehmen, dass ein jeder dieser Körper aus einer Anzahl gleichartiger Fasern besteht, welche durch ihren Zusammenhang die Festigkeit derselben bewirken. Es wird sich daher die Festigkeit dieser Körper wie die Anzahl der Fasern verhalten, aus welchen ein jeder besteht, d. h. die Festigkeit wird den Querschnittsflächen proportional seyn; demnach haben wir $q : Q' = f : F$ (I).

2tens. Betrachten wir nun die Körper B und C, deren Querschnittsfläche F gleich ist, so werden sie um so mehr ausgedehnt werden, je grösser die Gewichte sind, welche man an dieselben anhängt. Es werden sich daher die Ausdehnungen wie die Gewichte oder $Q' : Q = \alpha : \alpha''$ verhalten. (II).

Dieses zweite Gesetz ist durch alle mit Genauigkeit hierüber angestellten Versuche bestätigt worden, so lange nämlich die Ausdehnungen klein blieben, und eine gewisse Gränze nicht überschritten hatten, d. h. so lange die Körper vollkommen elastisch blieben.

3tens. Betrachten wir wieder die zwei vollkommen elastischen Körper C und D mit gleichen Querschnitten, jedoch ungleicher Länge l und L. Werden dieselben mit einer gleichen Last Q beschwert, so wird aus dem Grundsatze, dass alle Theile dieser Körper von gleichen Gewichten gleich gespannt sind, folgen, dass bei demjenigen Körper, dessen Länge doppelt ist, auch die Ausdehnung doppelt seyn werde u. s. w. Es wird sich daher $l : L = \alpha'' : \alpha'$ verhalten (III) d. h. die Ausdehnungen sind den Längen der Körper proportional.

Setzen wir diese drei Proportionen unter einander, so ist

$$q : Q' = f : F$$
$$Q' : Q = \alpha : \alpha''$$
$$l : L = \alpha'' : \alpha'$$

und multiplicirt, $q . l : Q . L = f . \alpha : F . \alpha'$

$$\text{oder } q : Q = \frac{f.\alpha}{l} : \frac{F.\alpha'}{L} \quad \text{(IV)},$$

d. h. die Gewichte, welche zwei vollkommen elastische Körper A und D von verschiedenen Dimensionen, jedoch gleicher Materie ausdehnen, verhalten sich wie die Produkte ihrer Querschnittsflächen in die Verhältnisse der Ausdehnung zu ihrer Länge.

§. 239.

Wir wollen nun zuerst eine Anwendung dieser Proportion auf das Tragungsvermögen der Seile machen. Da sich die Querschnittsflächen oder die Anzahl der Fäden bereits verfertigter Seile nicht wohl messen lassen, so ist es vortheilhaft statt der Querschnittsflächen f, F die Gewichte g, G gleich langer Seilstücke

z. B. einer Klafter anzunehmen. Da sich nun $f : F = g : G$ verhält, so ist auch $q : Q = \frac{g \cdot \alpha}{l} : \frac{G \cdot \alpha'}{L}$.

Wenn die Seile aus gleichem Materiale (Hanf) verfertigt und gleich stark gedreht sind, so sind die Verhältnisse $\frac{\alpha}{l}$ und $\frac{\alpha'}{L}$ einander gleich; es verhält sich daher $q : Q = g : G$, d. h. die Gewichte, welche bei zwei aus demselben Stoffe auf gleiche Art verfertigten Seilen eine gleiche Ausdehnung α bewirken, verhalten sich wie die Gewichte gleicher Längen dieser Seile.

§. 240.

Bei dem Gebrauche dieser Proportion muss das Verhältniss $q : g$ durch Versuche bestimmt werden. Diese Versuche und die daraus zu ziehenden Resultate unterliegen aber mehreren Schwierigkeiten:

Der Hanf, woraus die Seile verfertigt werden, ist nach Verhältniss des Bodens, der Witterung und ihres Wechsels bei dem Rösten in jedem Jahre sehr verschieden. Eine gedeihliche Witterung gibt dem Hanfe sowohl eine grössere Länge als auch mehr Festigkeit, und da der Bast durch die Röstung vom holzigen Stengel getrennt werden muss, so geschieht es nicht selten, dass er auf der Röste bei zu nasser Witterung verdirbt und in Fäulniss geräth, so dass nachher die Fasern sehr wenig Festigkeit haben, und beinahe von selbst zerfallen.

Die Fasern werden bei dem Spinnen durch das Drehen mit einander verbunden, und es ist jedermann bekannt, dass zu wenig Drehen nur eine geringe Festigkeit gibt, und bei dem zu viel Drehen die Fäden leicht abspringen. Da aus den einzelnen Fäden durch abermaliges Drehen erst Seile erzeugt werden, so wird hier abermals eine zu starke Drehung nachtheilig. Nach *Muschenbröck's* Versuchen verlieren die einzelnen hanfenen Fäden, wenn hieraus Seile verfertigt werden, bei der gewöhnlichen Behandlung des Seilers, $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{3}$ von ihrer Festigkeit. Man hat in dieser Hinsicht den runden zusammengedrehten Seilen flache Seilbänder vorgezogen, welche man dermalen beinahe in allen englischen Kohlenbergwerken im Gebrauche findet.

Aus diesen Gründen ist ersichtlich, wie schwierig und beinahe unmöglich es sey, genaue und allgemein brauchbare Versuche anzustellen, woraus man den Werth von $q : g$ in der obigen Proportion bestimmen könnte. Man thut daher am besten, sich wie wir bereits bemerkten, an verlässige, durch einen mehrjährigen Gebrauch bewährte Erfahrungen zu halten.

§. 241.

Nach *Poda's* Beschreibung der Bergbaumaschinen zu Schemnitz, Prag 1771 bei Walther pag. 2 bis 7 gebraucht man bei den dortigen Treibmaschinen zweierlei Seile, nämlich Treibseile und Klobenseile. Die erstern haben $2\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser und es wiegt eine Lachter derselben im trockenen Zustande im Mittel 10 Pfund. Mit diesen Seilen wird nach den von *Poda* angeführten Erfahrungen aus Tiefen von 25 bis 176 Lachtern gefördert.

Das Treibseil trägt:

Den leeren schmundigen Treibsack für 9 Laufpaaren sammt der Schurzkette . 66 ℔.
Die Ladung mit 9 Laufpaaren, dem Mittel nach à 100 ℔ 900 —
Hiezu kommt noch für die Spannung des Seiles am obern Ende dessen ganzes Gewicht mit 176mal 10 ℔ 1760 —

Demnach ist die Gesammtlast 2726 ℔,

wofür wir die runde Zahl von 2700 annehmen.

Auf grösseren Tiefen bis zu 190 Lachtern bedient man sich eines Klobenseiles, welches eben so wie das Treibseil aus 3 grossen Litzen, deren jede aus 4 kleinern zusammengesetzt ist, besteht. Jede Litze hat bei dem Treibseile 16 Fäden, bei dem Klobenseile aber 25 Fäden. Obwohl das letztere mehr Fäden zählt, so hat es doch bloss $1\frac{1}{4}$ Zoll im Durchmesser und es wiegt eine Lachter nur 6 ℔, da es aus feinerm Hanfe gesponnen, und mit mehr Fleiss gearbeitet ist. Bei dem Gebrauche desselben werden nur 6 Zentner in den Treibsack geladen; demnach beträgt die grösste Belastung des Klobenseiles:

Der Treibsack für 6 Laufpaaren mit 57 ℔.
Die Last von 6 Laufpaaren 600 —
und das Gewicht des Seiles bei der grössten Tiefe von 190 Lachtern zu 6 ℔ . 1140 —

also zusammen . 1796 ℔,

wofür wir 1800 ℔ annehmen können.

Beide Gattungen Seile, so wie überhaupt alle Bergwerksseile, haben eine durchaus gleiche Stärke, weil alle Fäden, woraus dieselben bestehen, durch die ganze Länge derselben laufen und eine durchaus gleiche Drehung erhalten müssen.

Wird nun bei dem Treibseile die grösste Belastung von 2700 ℔ mit dem Gewichte von einer Lachter Seil (10 ℔) dividirt, so kommt auf 1 ℔ Treibseil 270 ℔ Last. Bei dem bessern Klobenseile hingegen kommt auf 1 ℔ Seil $\frac{1800}{6} = 300$ ℔ Last. Die Berechnung, wie viel diese Seile bei jeder Tiefe tragen können, wird sich demnach auf folgende Weise ergeben:

Wenn wir das Gewicht des Treibsackes oder der Tonne $= T$, die Last in demselben $= Q$, die Tiefe des Schachtes oder Länge des Seiles in Lachtern $= L$ und das Gewicht einer Lachter von diesem Seile $= G$ setzen, so ist die ganze Last, welche die oberste Lachter des Seiles zu tragen hat, $= Q + T + L.G$. Wir haben also die Proportion: Die Belastung von 2700 ℔ fordert ein Treibseil, dessen Lachter 10 ℔ wiegt; es wird daher die Belastung von $Q + T + L.G$ ein Seil fordern, dessen Lachter das Gewicht G hat, oder $2700 : 10 = Q + T + L.G : G$, woraus $G = \frac{Q + T}{270 - L}$. Auf gleiche Art ist bei dem Klobenseile das Gewicht von einer Seillachter $g = \frac{Q + T}{300 - L}$.

Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die Gewichte einer Seillachter für jeden Fall bestimmen, und hieraus der Antrag auf die nöthige Stärke und das Gewicht des Seiles machen.

Beispiel. Es soll das Gewicht eines Seiles angegeben werden; mittelst welchen man bei einem Bergwerke aus einem L = 100 Lachter tiefen Schachte fördern kann, wenn Q + T = 1200 ℔ ist.

Nimmt man hiezu ein Seil von gleicher Beschaffenheit wie die Schemnitzer Treibseile, so muss das Gewicht einer Seillachter $G = \frac{Q + T}{270 - L} = \frac{1200}{270 - 100} = 7$ ℔, demnach das Gewicht des ganzen Seiles = 7.100 = 700 ℔ seyn. Dieses Seil wird von der ihm anvertrauten Last sammt seinem eigenen Gewichte keine grössere Spannung erleiden, als jenes zu Schemnitz, und daher dieselbe Sicherheit gewähren, vorausgesetzt, dass es aus gleich gutem Materiale und auf gleiche Art, wie die Schemnitzer Treibseile ausgefertigt wurde. Wäre aber das Seil von gleicher Beschaffenheit, wie ein Klobenseil, so ist $g = \frac{Q + T}{300 - L} = 6$ ℔, demnach das Gewicht des ganzen Seiles = 600 ℔.

§. 242.

Die Verfertigung so grosser und schwerer Seile fordert aber eigene Vorrichtungen und Maschinen, welche desshalb auch bei jedem grössern Bergwerksbetriebe bereits vorhanden sind. Da diese Maschinen gewöhnlich nur für die Verfertigung bestimmter Gattungen Seile eingerichtet sind, so werden auch ausser diesen Gattungen keine andern verwendet. Wir wollen nun annehmen, dass das Seil bereits verfertigt, demnach das Gewicht einer Seillachter gegeben ist, und untersuchen, wie gross die Ladung in die Tonne für eine jede Tiefe angenommen werden könne. Nehmen wir den Fall für die im vorigen §. beschriebenen ungarischen Bergseile an, so ergibt sich das Tragungsvermögen für das Treibseil aus der Gleichung Q + T = (270 — L) 10 und für das Klobenseil aus Q + T = (300 — L) 6. Nimmt man nun verschiedene Werthe für die Tiefe an, so erhalten wir folgende Tabelle:

Tiefe L.	Tragungsvermögen Q + T	
	des Treibseiles = (270 — L) 10.	des Klobenseiles = (300 — L) 6.
0	2700 Pfund	1800 Pfund
25	2450 —	1650 —
50	2200 —	1500 —
75	1950 —	1350 —
100	1700 —	1200 —
125	1450 —	1050 —
150	1200 —	900 —
175	950 —	750 —
200	700 —	600 —
225	450 —	450 —
250	200 —	300 —
270	0 —	180 —
300	— —	0 —

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen:

1tens. Dass es bis zur Tiefe von 200 Lachtern vortheilhafter sey, sich des Treibseiles, wovon die Lachter 10 ℔ wiegt, zu bedienen, weil die Last, welche dasselbe trägt, grösser ist als bei dem Klobenseile, wovon die Lachter nur 6 ℔ wiegt.

2tens. Bei der Tiefe von 225 Lachtern ist es gleichgültig, sich eines Treib- oder Klobenseiles zu bedienen.

3tens. Uiber diese Tiefe hinaus verdient das Klobenseil den Vorzug, weil man nun z. B. bei 250 Lachtern an das Treibseil 200 ℔, an das Klobenseil aber 300 ℔ anhängen kann.

4tens. Bei der Tiefe von 270 Lachtern kann man an das Treibseil keine Last mehr anhängen, folglich dasselbe zum Treiben nicht mehr verwenden. Wenn man daher genöthigt ist, mit einem Treibseile aus Schachten zu fördern, deren Tiefe mehr als 270 Lachtern beträgt, so muss diess in mehreren Absätzen über einander geschehen.

5tens. Dieser Umstand tritt bei dem Klobenseile erst bei der Tiefe von 300 Lachtern ein.

In dieser Tabelle ist, wie es sich von selbst versteht, auf die Anschaffungskosten der Seile keine Rücksicht genommen. Gewöhnlich werden Seile nach dem Gewichte bezahlt, jedoch kostet das Pfund eines Klobenseiles mehr, weil es aus mehreren Fäden besteht, und auch aus besserem Hanfe verfertigt werden muss als das Treibseil. Da aber das Klobenseil wieder leichter ist, so ergibt sich für dieselbe Seillänge kein bedeutender Unterschied in den Anschaffungskosten.

§. 243.

Aus der vorstehenden Tabelle folgt noch eine weitere Betrachtung, welche im letzten Falle, wo die Seile bei einem Bergwerke nach einem gegebenen Maasse verfertigt werden, von Wichtigkeit ist. In Ungarn wird gewöhnlich mit demselben Seile und derselben Ladung aus verschiedenen Tiefen, nämlich aus allen Strecken, die vom Tage hinein bis zur grössten Tiefe des Schachtes vorhanden sind, getrieben, jedoch bei den tiefern Strecken die Anzahl der Pferde vermehrt, weil die letztern nebst der beladenen Tonne auch das Gewicht des längern Seiles zu ziehen haben. Der letzte Umstand entfällt aber, wie wir bereits gesehen haben, bei dem Gebrauche eines Spiralkorbes, und es wird also schon dadurch die Mehrzahl der Pferde, welche wegen der grössern Tiefe benöthigt werden, erspart und nur so viel Pferde gebraucht, als die Ladung in der Tonne mit Rücksicht auf die Hebelsarme erfordert.

Diese Bemerkung gilt für jede Tiefe, wenn dieselbe Last in die Tonne geladen wird, weil die Pferde bei dem Spiralkorbe nur die Last in der Tonne ohne das Gewicht des Seiles zu ziehen haben. Nun tritt aber noch der Umstand ein, dass das Seil auf geringern Tiefen eine grössere Ladung tragen kann, dass also hier die grössern Kosten des schwereren Seiles verloren gehen. Es wäre also vortheilhaft, bei geringern Tiefen die Ladung nach Verhältniss des Seiles zu vermehren, und dafür zwar

eine grössere Anzahl Pferde anzuspannen, aber auch in demselben Verhältnisse mehr Erz heraus zu bringen, und auf solche Art das grössere Gewicht des Seiles vollkommen zu benützen.

Ein Beispiel wird diess noch mehr erläutern. Es sey die Tiefe der Strecke 150 Lachtern, das Gewicht der Tonne 100 ℔ und der Ladung 900 ℔, folglich das Gewicht des Treibseiles $=$ 1500 ℔, und das ganze Gewicht, welches zu Anfange des Treibens am obern Seilende hängt $= 1500 + 1000 = 2500$ ℔. Ist das Verhältniss der Hebelsarme $= 1:2$, so haben die Pferde eine Last von $(2500 - 100)\ \frac{1}{2} = 1200$ ℔ zu ziehen. Da hiezu in Schemnitz 8 Pferde erfordert werden, so kommt auf ein Pferd 150 ℔. Durch den Spiralkorb wird bewirkt, dass die Pferde nur die Last in der Tonne $= 900$ ℔, und da diess wegen der Hebelsarme noch mit 2 zu dividiren ist, eigentlich bloss 450 ℔ zu ziehen haben. Verwendet man hiezu 3 Pferde, so kommt auf ein Pferd auch 150 ℔; der Gewinn bei der Anwendung des Spiralkorbes besteht daher in der Ersparung von 5 Pferden.

Nehmen wir nun eine zweite Strecke auf der Tiefe von 50 Lachtern an, so beträgt für diese Tiefe das Gewicht des Seiles 500 ℔, das Gewicht der Ladung und der Tonne bei dem bisherigen Verfahren wieder 1000 ℔, also zusammen 1500 ℔ und die Pferde haben zu ziehen $(1500 - 100)\ \frac{1}{2} = 700$ ℔. Werden hiezu 5 Pferde verwendet, so kommen auf ein Pferd 140 ℔. — Dagegen haben bei dem Gebrauche des Spiralkorbes die Pferde nur die Last in der Tonne 900 ℔ oder mit 2 dividirt nur 450 ℔ zu ziehen, es kommen also, wenn 3 Pferde gebraucht werden, auf ein Pferd 150 ℔; der Gewinn vom Spiralkorbe beträgt daher in diesem Falle zwei Pferde.

Nun ist aber zu bemerken, dass das Seil, wovon jede Lachter 10 ℔ wiegt, für die Last $Q + T = 1000$ ℔ zu stark ist, und dass dasselbe Seil gemäss der Tabelle (§. 242) 2200 ℔ tragen könne. Werden in diesem Falle 8 Pferde angewendet, so wird bei jedem Aufzuge mehr als die doppelte Last zu Tage gefördert. Man sieht also, dass mit demselben Seile so viel Last und in derselben Zeit gefördert werden könne, als ohne diese Vermehrung in der doppelten Zeit herausgebracht wird, dass man also mit einem Seile dasselbe bewirkt, wozu man sonst zwei gebrauchen muss.

Hieraus ergibt sich nun, dass man, anstatt bei einem cylindrischen Korbe für grössere Tiefen die Anzahl der Pferde zu vermehren, vielmehr bei dem Spiralkorbe die Anzahl der Pferde bei geringern Tiefen vermehren, und dafür grössere Ladungen heraustreiben könne.

§. 244.

Die §. 241 bis §. 243 angeführten Rechnungen gründen sich auf die Erfahrungen, welche man über den Gebrauch der Seile bei dem Schemnitzer Bergbaue gemacht hat. Weil aber wegen der Verschiedenheit der Materialien und der Arbeit diese Resultate für keine allgemeine Vorschrift angenommen werden können, so wird es nothwendig, dass bei jedem Bergwerke ähnliche Erfahrungen gemacht, und denselben gemäss die Rechnung auf gleiche Art angestellt werde, woraus sich nun auch ähnliche Resultate ergeben werden. Auf diese Art können also nicht nur die Gewichte der Seile für eine jede gegebene Last, sondern auch umgekehrt die angemessene Beladung der Tonnen für gegebene Seile in einem jedem Falle bestimmt werden.

§. 245.

Wir haben bereits früher auf die Vorzüge, welche eiserne Ketten vor Seilen besitzen, aufmerksam gemacht. Diese Vorzüge sind nämlich:

1tens. Kann eine eiserne Kette so verfertigt werden, dass eine jede Klafter die gehörige, der daran hängenden Last entsprechende Stärke und das gehörige Gewicht erhält, demnach nicht stärker und schwerer, als es nothwendig ist, zu seyn braucht. Dagegen werden alle langen Bergseile von gleicher Stärke gemacht, sie sind daher immer an ihrem untern Ende im Verhältnisse zu ihrer angehängten Last zu schwer. Das ganze Gewicht eines Treibseiles fällt daher schwerer, als das Gewicht einer gleich langen Treibkette aus.

2tens. Die Dauer eines Treibseiles beträgt gewöhnlich nur 2 bis 3 Jahre, wogegen die in *Krussna Hora* bei dem Pferdegöpel gebrauchte, §. 230 beschriebene Treibkette während 29 Jahren ohne Unterbrechung im Gebrauche war, und noch weit länger gedauert hätte, wenn nicht die Förderung der Erze durch den Schacht aufgegeben worden wäre. Man darf in dieser Hinsicht die Dauer gut verfertigter eiserner Ketten auf 100 und mehr Jahre annehmen, da man wenigstens bei der Kette in *Krussna Hora* gar keine Abnützung gefunden hat.

3tens. Wird bei einer Treibkette ein Glied durch irgend einen Umstand schadhaft, so wird diess sehr leicht ausgewechselt, wogegen bei einem Seilbruche keine ähnliche Verbesserung statt finden kann, sondern ein ganz neues Seil herbeigeschafft werden muss.

Obgleich die Kette auf *Krussna Hora*, wie §. 230 angeführt wurde, vor ihrem Gebrauche mit einer viel grössern Last versucht worden ist, so hat sich doch nach einigen Jahren ihrer Verwendung an einem Gliede, welches wie Fig. 7 Tab. 13 zeigt, vierfach gewunden ist, oder aus vier Fäden besteht, bei a, wo die Schweissung vorhanden war, ein Sprung ergeben. Diese Stelle wurde vom Steiger durch Anbinden eines Zeichens bemerkbar gemacht und die Erzförderung während einiger Tage noch fortgesetzt, bis sich nämlich die Oeffnung bei a so erweitert hatte, dass die Fortsetzung des Treibens bedenklich schien. Es wurde nun das Treiben eingestellt und die mangelhafte Stelle durch Ersetzung eines neuen Gliedes verbessert, in welchem Zustande die Kette sodann ohne allen weitern Anstand durch die übrigen Jahre gebraucht wurde. Fig. 7. Tab. 13.

In England ist bereits für die Marine die Verordnung ergangen, sich der Ankerketten statt der Ankerseile zu bedienen, und es dürfte demnach die Zeit nicht mehr ferne seyn, in welcher dort Ketten statt der Seile, nicht bloss als Ankertaue, sondern auch bei Bergwerken in Gebrauch kommen dürften, zumal da der rohe Hanf meistens aus fremden Ländern und vorzüglich aus Russland nach England eingeführt wird.

§. 246.

Es fragt sich nun, **wie die Stärke oder das Gewicht für jede einzelne Klafter einer Treibkette zu bestimmen sey?**

Zu diesem Zwecke muss erst durch einen Versuch ausgemittelt werden, welche Last (q) eine Klafter-Kette, die 1 ℔ wiegt, mit Sicherheit zu tragen im Stande ist.

Nennen wir nun wieder die Last am untern Ende der Kette $= Q + T$, so haben wir die Proportion: die Last q fordert eine Kette, wovon eine Klafter 1 ℔ wiegt, es wird daher die Last $Q + T$ eine Kette fordern, wovon eine Klafter $\frac{Q+T}{q}$ wiegt, oder $q : 1 = Q + T : \frac{Q+T}{q}$, demnach ist das Gewicht der untersten oder ersten Klafter-Kette $= \frac{Q+T}{q}$ (I).

Es wird daher auch das Gewicht der angehängten Last und der ersten Klafter Kette $= Q + T + \frac{Q+T}{q} = \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)$ seyn (II).

Da dieses Gewicht an der zweiten Kettenklafter hängt, so bestimmt sich das Gewicht der zweiten Klafter-Kette aus der Proportion:

$q : 1 = \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) : \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)$ (III).

Es wird daher auch das Gewicht der Last und der zwei ersten Klaftern Kette $= \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) + \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) = \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2$ seyn (IV).

Da dieses Gewicht an der dritten Kettenklafter hängt, so bestimmt sich das Gewicht der dritten Klafter-Kette aus der Proportion:

$q : 1 = \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2 : \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2$ (V).

Es wird daher auch das Gewicht der Last und der drei ersten Klaftern Kette $= \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2 = \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^3$ seyn (VI).

Auf gleiche Art ergibt sich das Gewicht der vierten Klafter-Kette $= \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^3$ (VII); und gleichfalls beträgt das Gewicht der Last und der vier ersten Klaftern Kette $= \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^4$ (VIII).

Nennen wir nun die Anzahl Klaftern, welche in der ganzen Länge der Kette enthalten sind $= n$, so ist

das Gewicht der n^{ten} Klafter-Kette $= \left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^{n-1}$ (IX),

und das Gewicht der am Ende der Kette angehängten Last sammt der ganzen Kette $= \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^n$ (X); demnach ist das Gewicht der ganzen Kette allein $= \left(Q+T\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)^n - \left(Q+T\right) = \left(Q+T\right)\left\{\left(1+\frac{1}{q}\right)^n - 1\right\}$ (XI).

Diese Ausdrücke geben für jeden Fall sowohl die Gewichte der einzelnen Kettenklaftern, als auch das Gewicht der ganzen Kette. Wir ersehen aus dem Ausdrucke IX, dass die Gewichte der gleich langen auf einander folgenden Stücke

der Kette von unten nach oben in einer geometrischen Progression zunehmen müssen, wenn das Tragungsvermögen in jedem Querschnitte der Kette gleich seyn soll. *)

§. 247.

Da es beschwerlich ist, die Gewichte einer jeden einzelnen Klafter Kette zu berechnen, und da dieselben ohnehin in der Nähe nicht viel von einander abweichen, so kann man zur Erleichterung der Rechnung annehmen, dass z. B. immer fünf Klafter der Kette eine gleiche Stärke erhalten. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich auf gleiche Art, wie im vorigen §.

*) Strenger lässt sich die Rechnung auf folgende Art führen: Es sey AMN nma das Profil der Kette; die unbestimmte Länge derselben $BO = x$, $Oo = dx$; die Querschnittsflächen $Aa = f$ und $Mm = y$; die Last, welche an B angehängt ist, oder das Gewicht der Ladung sammt der Tonne $= Q + T$ und das unbestimmte Gewicht der Kette $BO = S$. Fig. 7. Tab. 14.

Nach §. 239 müssen die Querschnittsflächen f, y den Gewichten $Q + T$ und $Q + T + S$ proportional seyn; demnach ist: $f : y = Q + T : Q + T + S$, folglich $\frac{y}{f} = \frac{Q + T + S}{Q + T}$. Wird hier zu beiden Seiten mit dx multiplicirt, so ist $\frac{y.dx}{f} = \left(\frac{Q + T + S}{Q + T}\right) dx$, und wenn wir das Gewicht der kubischen Einheit (z. B. eines Kubikzolles Eisen $= \frac{1}{4}$ ℔) $= g$ setzen und im ersten Gliede den Zähler und Nenner mit g multipliciren, so ist $\frac{g.y.dx}{g.f} = \left(\frac{Q + T + S}{Q + T}\right) dx$; da aber $g.y.dx = dS$ ist, so haben wir auch $\frac{dS}{g.f} = \left(\frac{Q + T + S}{Q + T}\right) dx$, demnach $\frac{(Q + T)\,dS}{Q + T + S} = g.f.dx$. Hievon ist das Integrale $(Q + T)$ nat. log. $\left(\frac{Q + T + S}{Q + T}\right) = g.f.x$. Setzen wir die Basis der natürlichen Logarithmen $= e$, folglich nat. log. $e = 1$, so gibt die Gleichung nat. log. $\left(\frac{Q + T + S}{Q + T}\right) = \frac{g.f.x}{Q + T}$. nat. log. e den weitern Werth $\frac{Q + T + S}{Q + T} = e^{\frac{g.f.x}{Q + T}}$;

demnach ist das Gewicht der Kette von der Länge x oder $S = (Q + T)\left\{e^{\frac{g.f.x}{Q+T}} - 1\right\}$.

In dieser Gleichung ist $g.f$ offenbar = dem Gewichte der untersten Einheit der Kettenlänge, folglich wenn die Länge x nach Klaftern gerechnet wird, so ist $g.f$ das Gewicht der untersten Klafter der Kette. Zur Berechnung des Gewichtes der Kette S ist demnach nothwendig, das Verhältniss des Gewichtes der ersten Kettenklafter zum Gewichte der daran zu hängenden Last $Q + T$ durch genaue Versuche auszumitteln.

Wenn wir zu einem Beispiele das Kraftvermögen der eisernen Kette nur dem Kraftvermögen des aus Hanf verfertigten Klobenseiles §. 241 gleich setzen, so ist $1 : 300 = g.f : Q + T$; sonach wäre das Gewicht der x Klafter langen Kette $S = (Q + T)\left\{e^{\frac{x}{300}} - 1\right\}$. Setzen wir nun die Last der beladenen Tonne $Q + T = 1200$ ℔, und die Länge der Kette oder die seigere Tiefe des Bergschachtes = 100 Klafter, so ist das Gewicht der Kette

$$S = 1200\left(e^{\frac{100}{300}} - 1\right) = 1200 \,.\, 0{,}395628 = 474{,}75 \text{ Pfund.}$$

das Gewicht der ersten 5 Klafter Kette . . $= 5\left(\frac{Q+T}{q}\right)$ (I).

— — — zweiten — — . . $= 5\left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{5}{q}\right)$ (II).

— — — dritten — — . . $= 5\left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{5}{q}\right)^2$ (III).

.

— — — letzten — — . . $= 5\left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1+\frac{5}{q}\right)^{\frac{n}{5}-1}$ (IV).

und das Gewicht der ganzen Kette von n Kl. Länge $= \left(Q+T\right)\left\{\left(1+\frac{5}{q}\right)^{\frac{n}{5}}-1\right\}$. (V).

§. 248.

Beispiel. Betrachten wir wieder den Fall §. 241, wo $Q+T=1200$ und die Tiefe $= 100$ Klafter war, und nehmen wir weiter an, dass eine Klafter Kette, die 1 ℔ wiegt, nur so viel wie ein Klobenseil oder 300 ℔ $= q$ tragen könne, so ist nach §. 246, XI das Gewicht der 100 Klafter langen Kette

$$= \left(Q+T\right)\left\{\left(1+\frac{1}{q}\right)^n-1\right\} = 1200\left\{\left(1+\frac{1}{300}\right)^{100}-1\right\} = 1200 \,.\, 0{,}3948 = 473{,}8 \text{ ℔}.$$

Wir haben aber für ein Klobenseil §. 241 das Gewicht desselben $= 600$ ℔ gefunden, folglich ist die Treibkette, wenn man das Tragungsvermögen des Hanfes und Eisens gleich annimmt, um 126,2 ℔, oder um ein Fünftheil leichter als das Treibseil.

Auf gleiche Art ergeben sich die Gewichte der einzelnen Kettenklaftern, wenn man in den §. 246 hiefür gefundenen Formeln unsere Werthe substituirt. Es ist nämlich nach I das Gewicht der ersten Klafterkette $= \frac{Q+T}{q} = \frac{1200}{300} = 4$ ℔. Berechnen wir nun die weitern Gewichte von 10 zu 10 Klafter, so ist, wenn $n = 10$ in der Formel IX substituirt wird, das Gewicht der 10ten Klafter $= \frac{1200}{300}\left(1+\frac{1}{300}\right)^{10-1} = 4{,}12$ ℔. Nimmt man ferner für n die Werthe 20, 30, ... an, so ergeben sich die entsprechenden Gewichte einer Kettenklafter, und zwar

Werth für n	n = 1	n = 10	n = 20	n = 30	n = 40	n = 50	n = 60	n = 70	n = 80	n = 90	n = 100
Gewicht einer Klafter Kette	4,00 ℔	4,12 ℔	4,26 ℔	4,41 ℔	4,55 ℔	4,71 ℔	4,87 ℔	5,03 ℔	5,20 ℔	5,38 ℔	5,56 ℔

Man sieht hieraus, dass die oberste Klafter um $^3/_8$tel mehr als die unterste wiegt.

Da es zu beschwerlich und überflüssig ist, die Gewichte der Kette von Klafter zu Klafter zu berechnen, so kann man dieselben nach den Formeln §. 247 bloss von 5 zu 5 Klafter bestimmen. Demnach ergibt sich:

Werth für n	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35	n = 40	n = 45	n = 50
Gewicht von 5 Klafter Kette	20,00 ℔	20,33 ℔	20,67 ℔	21,02 ℔	21,37 ℔	21,72 ℔	22,09 ℔	22,45 ℔	22,83 ℔	23,21 ℔

Werth für n	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100
Gewicht von 5 Klafter Kette	23,59 ℔	23,99 ℔	24,39 ℔	24,79 ℔	25,21 ℔	25,63 ℔	26,05 ℔	26,49 ℔	26,93 ℔	27,38 ℔

Werden diese 20 Gewichte summirt, so ergibt sich das Gewicht der ganzen Kette = 470,14 ℔. Wird dagegen dieses Gewicht aus dem Ausdrucke V, §. 247 berechnet, so findet man 470,136 ℔. Diese zwei Werthe mit dem frühern von 473,8 ℔ (nach §. 246, XI) und jenem in der Note unter dem Texte genau berechneten von 474,75 ℔ verglichen, zeigen, dass man in der Ausübung nach einer oder der andern Formel rechnen kann.

§. 249.

Das Eisen wird bei dem Maschinen- und Bauwesen immer mehr und mehr verwendet und hat in den letztern Zeiten eine neue Anwendung bei dem Baue der Kettenbrücken gefunden. Aus dieser Ursache wurden auch in den letztern Zeiten sehr viele Versuche über die Tragungsfähigkeit desselben gemacht, und in den hierüber erschienenen Schriften angeführt.

Eine Zusammenstellung vieler Versuche über die Festigkeit verschiedener Körper findet man in dem vortrefflichen Handbuche der Statik fester Körper vom k. preuss. Oberlandesbaudirektor, Herrn J. A. *Eytelwein*, Berlin, 1808, 2ter Band. Eine Zusammenstellung der neuern Versuche über die Festigkeit der Körper befindet sich im 5ten und 12ten Band der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien. Die wichtigsten in Frankreich und England zu gleichem Zwecke angestellten Versuche finden sich in dem: *Résumé des Leçons données à l' école royale des ponts et chaussées, Première partie, par M. Navier,* Paris, 1826 zusammengestellt. Wir heben aus diesen Schriften bloss die vorzüglichsten Versuche im Nachstehenden aus.

Musschenbroek führt in den *Physicae experimentales et Geometricae dissertationes, Viennae, Pragae et Tergesti,* 1756; *Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum* pag. 85 an, dass derselbe zum Versuche der absoluten Festigkeit verschiedener Metalle, Drähte verfertigen liess, die durch bestimmte Oeffnungen gezogen wurden, um vollkommen gleiche Durchmesser zu erhalten. Hievon hatte der stärkste Draht einen Durchmesser $d = \frac{1}{10}$ Rheinländer Zoll, demnach einen Querschnitt von $3{,}14159 \cdot \frac{d^2}{4} = 0{,}007854$ Rheinländer Quadratzoll. Der nächst folgende Draht war um $\frac{1}{4}$tel schwächer, demnach sein Querschnitt = 0,005891 Rhl. Quad. Zoll. Der dritte Draht hatte den halben Querschnitt vom ersten = 0,003927 Rhl. Quad. Zoll; der vierte endlich

hatte bloss den 4[ten] Theil der Stärke des ersten Drahtes = 0,001964 Rhl. Quad. Zoll. Der erste Draht wurde durch ein Gewicht von 450 Amsterdamer Pfund, welche nach und nach angehängt wurden, zerrissen; auf gleiche Art der zweite Draht durch 310, der dritte durch 230 und der vierte durch 130 ℔. Da nun ein Rheinl. Fuss = 0,993 Wiener Fuss und ein Amsterdamer Pfund = 0,8806 Wiener Pfund, so gibt die Reduktion, dass der Querschnitt von einem Wiener Quadratzoll im ersten Falle durch 51168 Wiener Pfund, im zweiten Falle durch 46995, im dritten durch 52306, und im vierten durch 59113 Wiener Pfund zerrissen wurde. Das Mittel hievon gibt 52396 Pfund oder beiläufig 524 Zentner, von welchen ein Eisendraht mit einem N. Oe. Quad. Zoll Querschnitt zerrissen wurde.

Weitere Versuche führt *Musschenbroek* in seiner *Introductio ad philosophiam naturalem, T. I. Lugd.* 1762. C. 21. pag. 414 etc. an. Die Querschnitte der untersuchten Körper waren Quadrate. Nachstehende Tabelle enthält die Mittelwerthe der Versuche.

Nro. der Versuche.	Materie des Körpers, welcher versucht wurde.	Seite des Querschnittes.	Gewicht, wovon der Körper zerriss.	Berechnetes Gewicht, um einen N. Oestr. Quadratzoll zu zerreissen.
		Rhld. Zoll.	Amstd. Pf.	N. Oe. Pfund.
1	Gusseisen, deutsches	0,17	1930	59640
2	Geschmiedetes Eisen, deuts., gem.	0,10	676	60371
3	detto Osmunder	0,10	700	62514
4	detto schwedisches	0,10	726	64836
5	detto deutsches, gutes	0,10	740	66086
6	Stahl, gemeiner, biegsamer	0,10	1080	96450
7	detto mittelmässiger, biegsamer	0,10	1240	110739
8	detto bester, biegsamer	0,10	1190	106274
9	detto gehärtet	0,10	1120	100023
10	detto bester, wie zu gem. Messern	0,10	1350	120563
11	detto bester, wie zu Scheermess.	0,10	1500	133959

§. 250.

In den *Traité de l' Art de bâtir, tome IV, pag.* 500 werden folgende Versuche angeführt, welche die Herren *Soufflot* und *Rondelet* mit schmiedeeisernen Stäben anstellten, die in der Richtung ihrer Länge belastet wurden. Die Länge dieser eisernen Stäbe betrug beinahe 2 Fuss. Bei der Redukzion wurde 1 franz. Fuss = 1,0276 N. Oe. Fuss und 1 franz. ℔ (*Livre*) = 0,8741 N. Oe. ℔ angenommen.

Nro. des Versuches.	Materie des Körpers, welcher versucht wurde.	Dessen Dimensionen		Gewicht, v. welchem der Körper zerriss.	Berechnetes Gewicht, um einen N. Oe. Quad. Zoll zu zerreissen.
		Breite.	Höhe.		
		französische Linien.		franz. Pf.	N. Oe. Pfund.
1	Eisen, ganz faserig.	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$	3542	70368
2	detto	$2\frac{2}{3}$	2	3374	75409
3	Eisen, dessen Bruch ein wenig Korn hatte.	6	$2\frac{1}{2}$	6157	48928
4	Eisen, wovon der Bruch $\frac{2}{3}$ faserig war.	5	$2\frac{1}{2}$	4874	46478
5	Eisen, halbfaserig.	$5\frac{1}{2}$	3	5524	39907
6	Eisen, ganz faserig.	6	3	15600	103306
7	Eisen, $\frac{1}{3}$ körnig.	6	3	7800	51653
8	Eisen, dessen Bruch über die Hälfte körnig war.	6	3	5857	38786
9	Eisen, dessen Bruch ein wenig körnig war.	3	2	3635	72215
10	Eisen ganz faserig, dessen Durchmesser 3 Linien betrug.	.	.	6600	111298
11	Eisen, grobkörnig, ohne Fasern.	4	4	2991	22283
12	Eisen, von mittlerm Korn, ohne Fasern.	4	4	3980	29651
13	Eisen, von feinem Korn, ohne Fasern.	4	4	5840	43508
14	Eisen, von mittlerm Korn, halbfaserig.	4	4	7200	53640
15	Eisen, ganz faserig.	4	4	10320	76884
16	Eisen, grobkörnig, halbfaserig.	4	4	5840	43508
Mittlerer Werth der Cohäsion für 1 N. Oe. Quad. Zoll Schmiedeeisen					57989

Aus diesen Versuchen erhellet, dass unter den angeführten Eisengattungen die Festigkeit des faserigen Eisens grösser, als jene des körnigen war, jedoch sind die Festigkeiten des Eisens überhaupt so verschieden, dass sich keineswegs eine allgemeine Regel hieraus ableiten lässt.

§. 251.

Bei den nachfolgenden Versuchen ist bei der Redukzion 1 engl. Fuss = $0{,}9642$ N. Oe. Fuss, und 1 engl. Tonne = 20 engl. Zentner à 112 engl. ℔, dann 1 engl. ℔ = $0{,}8099$ N. Oe. ℔ angenommen.

Versuche über die absolute Festigkeit des Schmiedeeisens, Stahles und Gusseisens von den Herren Thomas *Telford* und Capt. *Brown* in England.

Nro. des Versuches.	Beschreibung der versuchten Körper.	Dimensionen dieser Körper im englischen Maasse.	Gewicht, wovon sie zerrissen wurden.		Nach der Rechnung trägt 1 Englischer Quadrat-Zoll		1 N. Oe. Quad. Zoll.
			Ton.	Pfund.	Ton.	Pfund.	N. Oe. ℔.
1	Cylinderförmige Stange aus *südwales*'schem Eisen.	Länge 2 F. $2\frac{3}{4}$ Zoll. Durchmesser $1\frac{3}{8}$ Z.	43	1232	29	736	57232
2	Cylindrische Stange aus *sudwales*'schem Eisen.	Länge 2 Fuss $3\frac{3}{8}$ Z. Durchmesser $1\frac{1}{2}$ Z.	52	1718	29	1926	58268
3	Quadratförmige Stange aus *staffordshire*'schem Eisen.	Länge 1 F. $5\frac{5}{8}$ Z. Seite des Quadrates $\frac{3}{4}$ Z.	15	648	27	405	53040
4	Quadratförmige Stange aus *staffordshire*'schem Eisen.	Länge 1 F. $7\frac{1}{4}$ Z. Seite des Quadrates $1\frac{1}{12}$ Z.	32	676	27	1172	53709
5	Quadratförmige Stange aus *südwales*'schem Eisen.	Länge. Seite des Quadrates 1 Z.	29		29		56590
6	Quadratförmige Stange aus schwedischem Eisen.	Länge. Seite des Quadrates 1 Z.	29		29		56590
7	Quad. Stange Eisen, aus alten Stücken zusammengeschweisst.	Länge. Seite des Quadrates 1 Z.	29		29		56590
8	Quadratförmige Stange v. gemeinem *staffordshire*'schem Eisen.	Länge. Seite des Quadrates 1 Z.	31		31		60493
9	Cylinderförmige Stange von gemeinem Eisen.	Länge 2 Fuss. Durchmesser 2 Zoll.	100		31	1861	62114
10	Quadratförmige Stange aus schwedischem Eisen.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{5}{16}$ Z.	40	2128	23	1728	46387
11	Ein anderes Stück von derselben Stange.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{5}{16}$ Z.	39	1680	23	168	45028
12	Quadratförmige Stange aus schwedischem Eisen.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{3}{16}$ Z.	33	1120	23	1694	46358
13	Ein Bolzen aus altem russischen Eisen.	Länge 3 F. 6 Z. Durchmesser $1\frac{5}{16}$ Z.	36	224	26	1528	52067
14	Quadratförmige Stange aus *südwales*'schem Eisen.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{1}{4}$ Z.	38	112	24	788	47520
15	Quadratförmige Stange aus gemeinem *südwales*'schem Eisen.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{1}{8}$ Z.	31		24	1106	47797
16	Ein Bolzen aus *südwales*'schem Eisen	Länge 12 F. 6 Z. Durchmesser 2 Z.	82	1680	26	762	51400
17	Ein Bolzen aus *südwales*'schem Eisen.	Länge 5 F. Durchmesser $1\frac{2}{9}$ Z.	43	1120	37	171	72351
18	Quadratförmige Stange aus Blasen-Stahl (*blistered steel*).	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{1}{4}$ Z.	23		14	1613	28725
19	Quadratförmige Stange aus Gusstahl.	Länge 3 F. 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{5}{16}$ Z.	48	1120	28	345	54940
20	Quadratförmige Stange aus *südwales*'schem Roheisen.	Länge 3 F 6 Z. Seite des Quadrates $1\frac{1}{4}$ Z.	11	784	7	591	14175
Mittel von den 9 ersten Versuchen des Herrn *Telford*							57181
— — folgenden 8 — des Capt. *Brown*							51114
Mittel von allen 17 Versuchen mit Schmiedeeisen							54148

Uiber die vorstehenden Versuche ist zu bemerken, dass man die Gewichte, wovon der Bruch in den ersten neun Versuchen erfolgte, für etwas zu hoch, und im Gegentheile bei den Versuchen von Nro. 10 bis 20, welche *Capitaine Brown* anstellte, die gefundenen Gewichte für zu gering angeschlagen hält, welches beides von der besondern Konstruktion des Apparates, der hiebei gebraucht wurde, gefolgert wird.

§. 252.

Herr *Brunel* in England hat ebenfalls Versuche über die Festigkeit schmiedeiserner Stäbe von beiläufig ³⁄₈ Zoll Stärke gemacht. Das Resultat von 20 Versuchen gibt, dass ein englischer Quadratzoll von dem besten Yorkshire-Eisen durch 32 Tonnen 8 Zentner, und von der zweiten Qualität desselben Eisens durch 30 Tonnen 8 Zentner zerrissen wird; im ersten Falle erhalten wir für einen N. Oe. Quad. Zoll 63225 Pfund, im zweiten Falle aber 59322 Pfund.

§. 253.

Herr *G. Rennie* in England hat mit Stäben von Stahl, wovon jede Quadratseite ¼ englischen Zoll hatte, Versuche angestellt und hiebei gefunden, dass ein solcher Stab Gusstahl (*tilted steel*) von 8391, Blasenstahl (*blistered steel*) von 8322 und Scherstahl (*shear steel*) von 7977 *livres avoir du poids* zerriss. Im ersten Falle erhalten wir für einen N. Oe. Quad. Zoll 116958 ℔, im zweiten 115996 ℔, und im dritten 111188 ℔; wir sehen daher, dass der Stahl ein beiläufig doppelt so grosses Gewicht als Schmiedeeisen zum Zerreissen erfordert.

§. 254.

Capitaine *Brown* hat ebenfalls Versuche über die Festigkeit des Gusseisens angestellt und bei vier Stangen, deren jede 1¼ engl. Zoll in der Quadratseite hatte, im Mittel ein Gewicht von 13 Tonnen 3 Zentnern, bei einer fünften Stange aber, deren Querschnitt nur einen Quad. Zoll betrug, 11 Tonnen und 10 Zentner, als das zum Zerreissen erforderliche Gewicht gefunden. Das Mittel hievon gibt für den N. Oe. Quad. Zoll 19432 N. Oe. ℔.

Herr Georg *Rennie* hat ebenfalls Versuche über die absolute Festigkeit des Gusseisens angestellt und gefunden, dass Stäbe, deren Quadratseite ¼ Zoll betrug, wenn sie horizontal gegossen waren, von 1166, wenn sie aber vertikal gegossen waren, von 1218 *livres avoir du poids* zerrissen wurden; diess gibt im ersten Falle 16252 N. Oe. ℔; im zweiten Falle aber 16977 N. Oe. ℔, für den N. Oe. Quad. Zoll.

§. 255.

Die Versuche, welche Herr *Navier* über die Festigkeit des Eisens mit gewalzten Blechstreifen, die theils nach der Länge, theils auch nach der Quere der Tafeln abgeschnitten wurden, anstellte, gaben folgende Resultate:

Nro. des Versuches.	Gattung des untersuchten Körpers.	Breite.	Dicke.	Gewicht, wovon der Körper zerrissen wurde.	Berechnetes Gewicht, wovon ein N. Oe. Quad. Zoll zerrissen wurde.
		Millimeter.	Millimeter.	Kilogramm.	N. Oe. Pfund.
1	Eisenblech, in der Richtung des Walzens belastet . . .	9,0	1,5	488	44792
2	detto	6,3	1,5	374	49040
3	detto	7,3	2,6	823	53730
4	detto	8,3	2,4	905	56295
5	detto	7,8	1,5	461	48823
6	detto	7,3	2,3	686	50627
	Mittelwerth	...	...	...	50551
7	Eisenblech, winkelrecht auf die Richtung des Walzens belastet	6,1	1,0	241	48955
8	detto	7,2	2,2	531	41538
9	detto	7,0	1,5	351	41422
10	detto	7,3	1,1	316	48762
	Mittelwerth	...	...	...	45169

§. 256.

Uiber die **Festigkeit eiserner Drähte**, wovon mehrere Drahtbrücken von bedeutender Grösse in Frankreich erbaut wurden, hat man ebenfalls vielfältige Versuche angestellt. In der *Description du Pont suspendu en fil de fer, construit à Genève; par G. H. Dufour, Paris* 1824, werden mehrere Versuche angeführt, die mit Drähten, welche in der Richtung ihrer Länge belastet wurden, angestellt worden sind; die folgenden Zahlen enthalten die mittlern Resultate, welche aus mehreren Versuchen für jede Gattung Draht erhalten wurden.

Nro. des Versuches.	Gattung der geprüften Drähte.	Durchmesser derselben.	Gewicht, wovon der Draht zerrissen wurde.	Berechnetes Gewicht, wovon ein N. Oe. Quad. Zoll zerrissen wurde.
		Millimeter.	Kilogramm.	N. Oe. Pfund.
1	Eisendraht aus der Fabrik zu *la Ferrière*, mit Nro. 4 bezeichnet.	0,85	48	104815
2	detto mit Nro. 13 „	1,9	196	85658
3	detto mit Nro. 17 „	2,75	382	79693
4	detto mit Nro. 19 „	3,7	776	89429
5	Eisendraht aus der Fabrik zu *St. Gingolf*, mit Nro. 4 bezeichnet.	0,85	38,5	84071
6	detto mit Nro. 13 „	1,9	178	77792
7	detto mit Nro. 17 „	2,75	349	72808
8	detto mit Nro. 19 „	3,7	644	74217
	Mittelwerth			83560

Diese Versuche zeigen, dass die Festigkeit des Drahtes beiläufig um die Hälfte grösser, als jene des gewöhnlichen Schmiedeeisens ist, wovon die Ursache in dem Umstande liegt, dass bei dem Drahtziehen alle jene Stücke zerreissen, die fehlerhaft sind. Weiters hat man gefunden, dass die absolute Festigkeit des ausgeglühten Drahtes nur etwas mehr als die Hälfte der Festigkeit des unausgeglühten Drahtes betrug.

§. 257.

Im Jahre 1824 wurde mein Vater als Landeswasserbaudirektor aufgefordert, ein Gutachten über die Anwendbarkeit des in Böhmen erzeugten Eisens zum Baue einer in Prag über den Moldaufluss zu errichtenden Kettenbrücke abzugeben. Diess veranlasste denselben, vorläufig über die Festigkeit, Ausdehnung und Elasticität des Eisens mehrere Versuche anzustellen, um über die Verhältnisse dieser drei Potenzen eine nähere Aufklärung und hiedurch einen Leitfaden zur Prüfung der, von den vorzüglichsten böhmischen Eisenwerken eingeschickten Probeketten zu erhalten. Der Zweck dieser Versuche ging hauptsächlich dahin, für jede gegebene Belastung der Brücke nicht nur die nöthige Stärke und das erforderliche Gewicht der Ketten mit vollkommener Sicherheit zu bestimmen, sondern auch der weitern Ausdehnung dieser Ketten auf eine solche Art vorzubeugen, damit hiedurch sowohl die Möglichkeit eines Bruches, als auch das Schlappwerden der Ketten und das bedenkliche Einsinken der Mitte der Brücken verhütet werde. Dieser doppelte Zweck konnte nur durch genaue Versuche über die mit jeder Belastung verbundene Ausdehnung des Eisens und über die Grade des Zurückgehens zur vorigen Länge nach aufgehobener Belastung, oder über den Elasticitätszustand des ausgedehnten Eisens erreicht werden.

Die Vermuthung, dass die von mehreren Physikern, vorzüglich in der Nähe des Bruches beobachteten Irregularitäten in den Mischungsverhältnissen der verschiedenen fremdartigen Theile des Eisens ihren Grund haben dürften, gab den Anlass, diese Versuche zuerst mit einem möglichst gleichartigen Eisen vorzunehmen, um aus den Resultaten derselben bestimmte Gesetze abzuleiten, und diese sodann jenen Versuchen entgegen zu halten, welche mit dem gewöhnlichen Eisen anzustellen wären.

Man glaubte die Eigenschaft einer vollkommenen Gleichförmigkeit des Eisens in einem vorzüglichen Grade bei jenen Drahtsorten zu finden, welche zu musikalischen Instrumenten, Clavier, Fortepiano u. dgl. angewendet werden, indem für die gleiche Beschaffenheit und Festigkeit dieser Drähte die bekannte Erfahrung spricht, dass die ungleichartigen Stellen bei dem Drahtziehen zerreissen, demnach nur das gleichförmigste Eisen im Drahte übrig bleibt. Uiberdiess kann auch aus der Reinheit des Tones auf die gleichförmige Beschaffenheit des Metalles aus physikalischen Gründen geschlossen werden; endlich ist auch bekannt, dass bei dem Stimmen solcher Instrumente diejenigen Saiten, welche einen Misston verrathen, oder den Ton nicht halten wollen, und ihrer Spannung unverhältnissmässig nachgeben, bei ihrer Erhöhung abspringen. In dieser Hinsicht hat man diejenigen Versuche, wobei die Drahtsaiten ein plötzliches Nachgeben, oder eine andere Irregularität an Tag legten, weggelassen, und bloss jene aufgenommen, wobei die Beschaffenheit des Drahtes sich bis zum Zerreissen als vollkommen gleichförmig dargestellt hatte.

Nachdem auf diese Art die gebräuchlichsten Clavierdrähte geprüft waren, wurden auf gleiche Weise gemeine Drähte und gewöhnliche stählerne Uhrfedern, wie auch Kettenstücke, die aus Blechstreifen ausgeschnitten waren, und zu den Kettenbrückenmodellen am technischen Institute zu dienen hatten, versucht. Zuletzt wurde zur Prüfung derjenigen Kettenmuster geschritten, welche vorläufig von den vorzüglichsten böhmischen Eisenwerken nach dem Maasstabe des vierten Theiles der natürlichen Grösse bestellt und zu dem Zwecke eingesendet wurden, um durch vorzunehmende Proben die Qualität jeder Eisengattung zu erforschen und über die Anwendbarkeit derselben bei Kettenbrücken einen Schluss fassen zu können.

Es wäre zu weitläufig und für den gegenwärtigen Zweck auch überflüssig, das ganze Detail dieser Versuche hier umständlich anzuführen; wir liefern demnach nur die ersten Versuche, weil die daraus abgeleiteten allgemeinen Gesetze zur Prüfung aller andern Eisengattungen auf gleiche Art benützt werden können.

§. 258.

Fig. 7. Tab. 14. Der Apparat, dessen man sich bei diesen Versuchen bediente, bestand aus zwei auf dem Bodengerüste EF aufgestellten Säulen GC, auf welche der Hebel mB gelegt wurde. Die zwei Säulen dienten, so wie bei der Schnellwage der eisernen Achse c des Hebels zur Unterstützung. An dem Hebel wurde der Stab mA von 132½ Zoll = 11 Fuss ½ Zoll Länge angebracht, und das Gewicht dieses Stabes mit dem Hebel mB durch zugelegte Gewichte gehörig ausgeglichen. Das Ende des Stabes lief in eine Spitze zu, welche an der nebenstehenden in Zolle und Linien eingetheilten Skale AD die Ausdehnung des, auf der Entfernung mC = 2½ Zoll eingespannten Drahtes mn in einem $\frac{CA}{mC} = \frac{132{,}5 + 2{,}5}{2{,}5} = 54$mal grösseren Maasstabe anzeigte. Die Abtheilungen des Hebels CB von C bis 1, von 1 bis 2, von 2 bis 3 waren eben so gross, wie die Entfernung des eingespannten Drahtes, nämlich mC = 2½ Zoll.

Der Draht mn wurde bei m und n auf dieselbe Art, wie bei einem Claviere auf einem hinreichend starken Cylinder (oder Wirbel) befestigt, jedoch mit dem Unterschiede, dass an dem Cylinder ein Sperrad angebracht war, mittelst welchen sowohl der Draht in die gerade Richtung gespannt, als auch dem Hebel selbst eine solche Stellung ertheilt wurde, damit die horizontale Lage des Zeigers beiläufig in die Mitte der an der Skale beschriebenen Räume fallen, und auf solche Art keine weitere Korrection hinsichtlich des Winkels, den der Zeiger mit der senkrechten Skale macht, nöthig werden möchte. Die Entfernung der zwei Cylinder (Wirbel) von Achse zu Achse, oder die Länge des gespannten Drahtes mn betrug vor dem Versuche 4 Fuss 10 Zoll = 696 Linien.

Zu Anfang der Versuche befand sich der Draht mn ohne Spannung, welches man durch eine gelinde Berührung des Hebels beobachtete. Die Versuche geschahen durch Verschiebung eines bestimmten Laufgewichtes auf dem Hebelsarme CB, von 2½ zu 2½ Zoll. Am Ende dieses Hebels CB befand sich die Stellschraube H zu dem Zwecke, um den Hebel in seiner Lage bei dem Verschieben des Laufgewichtes zu unterstützen und dem Drahte keine stärkere Spannung beizubringen, als derselbe durch die Schwere des Lauf-

gewichtes erhalten sollte. Nach der Verschiebung des Laufgewichtes von einer Abtheilung zur andern wurde nämlich die Stellschraube so weit nachgelassen, bis das Laufgewicht frei wurde und der Draht die ganze Spannung erhielt. Nunmehr wurde die Ausdehnung des Drahtes am Zeiger beobachtet, und vor der abermaligen Verschiebung die Schraube unter dem Hebel so weit erhöht, bis sie ihn berührte, ohne eine Aenderung am Zeiger zu bewirken. Dann wurde das Laufgewicht abermals verschoben und so fortgefahren, bis der Draht die Spannkraft des Laufgewichtes nicht mehr aushalten konnte, und bei dem Niedrigerstellen der Schraube zerriss. Hiebei ist noch zu bemerken, dass nach jeder Verrückung des Laufgewichtes eine Zeit von 10 bis 12 Minuten abgewartet, und hierauf erst die Ausdehnung des geprüften Drahtes an der Skale in dem erwähnten 54mal grössern Maasse gemessen wurde.

Um die Durchmesser der versuchten Drähte genau zu bestimmen, wurden dieselben auf einen grösseren Cylinder gewunden, dabei fest an einander geschoben und die Windungen abgezählt, wie viele sich in einem bestimmten Raume befanden. Aus diesen Ausmessungen wurde nun der Durchmesser eines jeden einzelnen Drahtes bei allen folgenden Versuchen berechnet.

§. 259.

Wir wollen nunmehr von den angestellten vielen Versuchen einen umständlich mittheilen, und hiezu jenen wählen, welcher mit einem Clavierdrahte von $\frac{18}{60} = 0{,}3$ Linien im Durchmesser gemacht wurde.

Bei dem ersten Versuche wurde ein Laufgewicht von 4 ℔ auf die erste Entfernung $C1 = Cm = 2\frac{1}{2}''$ mit Vorsicht aufgelegt, die Spannung des Drahtes m n war daher auch 4 ℔; seine Ausdehnung betrug nach Verlauf einer Zeit von 10 bis 12 Minuten an der Skale AD gemessen 14 Linien, folglich die wahre Ausdehnung des Drahtes bei m bloss $\frac{14}{54} = 0{,}2593$ Linien. Hierauf wurde das Laufgewicht abgenommen, und der Draht ging auf seine vorige Länge zurück.

Bei dem zweiten Versuche wurden die 4 ℔ abermals in 1 aufgelegt, und der Draht zeigte wieder in A die Ausdehnung von 14 Linien. Itzt wurde das Laufgewicht auf die zweite Entfernung oder 5 Zoll von der Achse verschoben, und die Ausdehnung betrug auf der Skale bei A gemessen 28 Linien, folglich war die wirkliche Ausdehnung des Drahtes $m\,n = \frac{28}{54} = 0{,}5185$ Linien.

Nun schob man das Laufgewicht von 2 nach 1 zurück, wobei der Zeiger auf der Höhe von 14 Linien stehen blieb, und als das Laufgewicht aufgehoben wurde, kam der Zeiger bei einer gelinden Berührung auf 1.

Bei dem dritten Versuche wurde das Laufgewicht abermals mit aller Vorsicht auf die erste Abtheilung bei 1 gestellt; es zeigten sich an der Skale 14 Linien; als das Laufgewicht auf 2 kam, zeigte die Skale 28, als dasselbe aber auf die dritte Abtheilung kam, zeigte die Skale 43 Linien. Demnach war die grösste Ausdehnung die durch

3.4 = 12 ℔ bewirkt wurde $= \frac{43}{54} = 0{,}7968$ Linien. Nun wurde das Laufgewicht wieder auf die zweite Abtheilung zurückgeschoben, und die Ausdehnung bei A war 29, auf der ersten Abtheilung war sie 15 und bei dem Abnehmen des Laufgewichtes war sie 2, der Draht ist daher auf seine ursprüngliche Länge nicht mehr zurückgegangen, sondern behielt die Ausdehnung von $\frac{2}{54} = 0{,}0370$ Linien bei.

Bei dem vierten Versuche waren bei dem Hinausschieben des Laufgewichtes auf die Entfernung 1, 2, 3 die Ausdehnungen wie im dritten Versuche = 15, 29 und 43; als aber das Laufgewicht auf die vierfache Entfernung verschoben wurde, war die Ausdehnung = 58, und sie ging bei dem Zurückschieben zu 3 auf 44, zu 2 auf 30, zu 1 auf 17 zurück, und als das Laufgewicht aufgehoben wurde, blieb die Ausdehnung = 3.

Die folgende Tabelle enthält die weitern Versuche mit diesem Drahte, wobei zu bemerken, dass dieselben eben so angestellt sind, wie es bei den ersten vier Versuchen angeführt wurde. Es haben sich daher, so oft von einer Reihe in die nächst folgende übergegangen wurde, alle Ziffern bis zur vorletzten wiederholt; wenn aber das Laufgewicht auf die letzte Abtheilung aufgelegt wurde, hat sich der Zustand der Ausdehnungsfähigkeit des Eisens geändert, und es wurden bei dem Zurückschieben auf die vorhergehenden Abtheilungen diejenigen Längen beobachtet, die hier in den horizontalen Reihen rückwärts hinter jeder am Ende stehenden Zahl angeführt sind. Es müssen daher auch alle Versuche in der Tabelle auf die Art rückwärts gelesen werden, wie es oben bei der Beschreibung der ersten vier Versuche angeführt wurde.

Versuchsreihe.	Bleibende Ausdehnung des Drahtes.	Angehängte Gewichte = p in N. Oe. Pfunden												
		4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
		54fache Ausdehnung des geprüften Drahtes in N. Oe. Linien.												
0	0													
1	0	14												
2	1	14	28											
3	2	15	29	43										
4	3	17	30	44	58									
5	6	20	33	47	60	74								
6	9	23	37	50	63	77	90,5							
7	13	26	40	54	67	81	94	108						
8	18	32	45	59	72	86	100	113	127					
9	24	38	51	65	78	92	105	119	133	146				
10	32	45	59	72	86	100	113	126	140	154	167			
11	41	54	68	82	95	108	122	136	150	163	177	190		
12	52	66	79	93	107	120	133	147	161	175	188	202	215	
13	67	81	94	108	121	135	148	162	176	189	203	216	230	244

In dieser Tabelle enthält die zweite Rubrik die bleibende Ausdehnung des Drahtes, welche von dem grössten bei jeder horizontalen Versuchsreihe angehäng-

ten Gewichte bewirkt wurde; diese betrug demnach bei dem Verschieben des Laufgewichtes auf die 13te Entfernung $\frac{67}{54} = 1{,}2407$ Linien.

§. 260.

Aus diesen 13 Versuchsreihen wollen wir nunmehr das Gesetz für die grösste Ausdehnung suchen, welche durch das bei jedem Versuche angegebene grösste Gewicht bewirkt wurde. Stellen wir nämlich die angehängten Gewichte mit den hiedurch bewirkten grössten Ausdehnungen zusammen, so erhalten wir folgende Tabelle.

Versuchs Nro.	Gewicht p	54fache Ausdehnung e
	0	0
1	4	14
2	8	28
3	12	43
4	16	58
5	20	74
6	24	90,5
7	28	108
8	32	127
9	36	146
10	40	167
11	44	190
12	48	215
13	52	244

Vergleichen wir hierin die Gewichte p mit den hiedurch bewirkten Ausdehnungen e, so sehen wir, dass anfangs die Gewichte von 4 ℔ und 8 ℔ die Ausdehnungen von 14 und 28 bewirkten; es waren daher die Gewichte p den Ausdehnungen e proportional; bei den folgenden Versuchen weicht jedoch die Proportionalität immer mehr und mehr ab. Wir können daher zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem jedesmal angehängten Gewichte p und der beobachteten Ausdehnung e die Gleichung $p = A \,.\, e + B \,.\, e^2 + C \,.\, e^3 \ldots\ldots$ annehmen. Substituirt man in dieser allgemeinen Gleichung die Werthe aus dem 2ten, 4ten, 6ten, 8ten, 10ten und 12ten Versuche, so erhalten wir folgende sechs Gleichungen:

$$8 = A \cdot \frac{28}{54} + B \cdot \left(\frac{28}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{28}{54}\right)^3 \ldots$$

$$16 = A \cdot \frac{58}{54} + B \cdot \left(\frac{58}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{58}{54}\right)^3 \ldots$$

$$24 = A \cdot \frac{90{,}5}{54} + B \cdot \left(\frac{90{,}5}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{90{,}5}{54}\right)^3 \ldots$$

$$32 = A \cdot \frac{127}{54} + B \cdot \left(\frac{127}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{127}{54}\right)^3 \ldots$$

$$40 = A \cdot \frac{167}{54} + B \cdot \left(\frac{167}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{167}{54}\right)^3 \ldots$$

$$48 = A \cdot \frac{215}{54} + B \cdot \left(\frac{215}{54}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{215}{54}\right)^3 \ldots$$

Wird in diesen Gleichungen mit den Coeffizienten von A dividirt, so erhalten wir:

$$54 \,.\, 0{,}285714 = A + B \cdot \frac{28}{54} + C \cdot \left(\frac{28}{54}\right)^2 \ldots$$

$$54 \,.\, 0{,}275862 = A + B \cdot \frac{58}{54} + C \cdot \left(\frac{58}{54}\right)^2 \ldots$$

$$54 \,.\, 0{,}265193 = A + B \cdot \frac{90{,}5}{54} + C \cdot \left(\frac{90{,}5}{54}\right)^2 \ldots$$

$$54 \cdot 0{,}251969 = A + B \cdot \frac{127}{54} + C \cdot \left(\frac{127}{54}\right)^2 \ldots$$

$$54 \cdot 0{,}239521 = A + B \cdot \frac{167}{54} + C \cdot \left(\frac{167}{54}\right)^2 \ldots$$

$$54 \cdot 0{,}223256 = A + B \cdot \frac{215}{54} + C \cdot \left(\frac{215}{56}\right)^2 \ldots$$

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten, die zweite von der dritten u. s. w. ab, und dividirt eine jede Gleichung mit dem Coeffizienten bei B, so ergeben sich:

$$-54^2 \cdot 0{,}000328 = B + C \cdot \frac{86}{54} \ldots$$

$$-54^2 \cdot 0{,}000323 = B + C \cdot \frac{148{,}5}{54} \ldots$$

$$-54^2 \cdot 0{,}000362 = B + C \cdot \frac{217{,}5}{54} \ldots$$

$$-54^2 \cdot 0{,}000311 = B + C \cdot \frac{294}{54} \ldots$$

$$-54^2 \cdot 0{,}000339 = B + C \cdot \frac{382}{54} \ldots$$

Zieht man diese fünf Gleichungen von einander ab, so sind die Differenzen im ersten Gliede bald positiv bald negativ, und zwar von der Art, dass sie sich beinahe aufheben. Da aber auch diese Differenzen an und für sich sehr klein und den Faktoren von C nicht proportional sind, so sieht man, dass sie von C und die Festigkeit p von $C \cdot e^3$ nicht abhängen könne, demnach $C = 0$ gesetzt werden müsse. Auf gleiche Weise fallen alle Glieder mit der 4ten und einer jeden höhern Potenz weg. Werden itzt diese fünf Gleichungen addirt, und durch 5 dividirt, so folgt $\underbrace{B = -54^2 \cdot 0{,}000334}$. Wir sehen also, dass B das negative Zeichen erhält, welches auch daraus hervorgeht, weil die Werthe von e in einem grössern Verhältnisse als jene von p steigen, folglich eine Gleichung zwischen p und e nur in dem Falle statt finden kann, wenn von der Grösse $A \cdot e$ eine andere, nämlich $B \cdot e^2$ abgezogen wird.

Wird dieser Werth in die obigen sechs Gleichungen, wo A von seinem Coeffizienten bereits befreit erscheint, substituirt, so erhalten wir:

$$54 \cdot 0{,}285714 = A - 54 \cdot 0{,}009352$$
$$54 \cdot 0{,}275862 = A - 54 \cdot 0{,}019372$$
$$54 \cdot 0{,}265193 = A - 54 \cdot 0{,}030227$$
$$54 \cdot 0{,}251969 = A - 54 \cdot 0{,}042418$$
$$54 \cdot 0{,}239521 = A - 54 \cdot 0{,}055778$$
$$54{,}\ 0{,}223256 = A - 54 \cdot 0{,}071810.$$

Werden nun diese Gleichungen summirt und weiter reducirt, so folgt $\underbrace{A = 54 \cdot 0{,}295079}$.

Substituiren wir diese Werthe für A und B in die erste Gleichung, so ergibt sich: $\underbrace{p = 54 \cdot 0{,}295079 \cdot e - 54^2 \cdot 0{,}000334 \cdot e^2}$, welches die Gleichung zwischen dem angehängten Gewichte p und der hiedurch bewirkten Ausdehnung e ist.

§. 261.

Wir wollen nunmehr sehen, welches der grösste Werth für p sey, d. h. bei welchem Gewichte das Zerreissen des Drahtes erfolgt, und wie viel die grösste Ausdehnung desselben betrage.

Um diess auf eine allgemeine Art zu finden, wollen wir wieder auf die allgemeine Gleichung $p = A \cdot e - B \cdot e^2 = B \cdot e \left(\frac{A}{B} - e\right)$ (I) zurückgehen. *)

Beschreiben wir auf dem Durchmesser $\frac{A}{B} = AD$ einen Kreis, und schneiden hievon das Stück $AB = e$ ab, so ist $EB^2 = e\left(\frac{A}{B} - e\right)$; und EB wird am grössten, wenn $\frac{A}{B} - e = e$, folglich $e = \frac{A}{2B}$ ist. Setzen wir diesen Werth $= E$, so ist $E = \frac{A}{2B}$ (II). Fig. 2. Tab. 1.

Hieraus folgt $B = \frac{A}{2E}$, und diess in I substituirt, gibt die allgemeine Gleichung $p = A \cdot e - \frac{A}{2E} \cdot e^2$ (III).

Setzt man in diesem Ausdrucke E statt e, so ergibt sich das Maximum von p, welches wir wieder P nennen wollen, $P = A \cdot E - \frac{A}{2} \cdot E = \frac{A \cdot E}{2}$ oder $A = \frac{2P}{E}$ (IV).

Wird diess endlich in die allgemeine Gleichung III substituirt, so ist

$$p = 2P \cdot \frac{e}{E} - P \cdot \frac{e^2}{E^2} \text{ oder } \underbrace{\frac{p}{P} = \frac{e}{E}\left(2 - \frac{e}{E}\right)}\ \text{(V)}.$$

Dieser Ausdruck enthält die allgemeine Gleichung, welche zwischen dem grössten Gewichte (P), welches ein Draht tragen kann, der grössten hiedurch bewirkten Ausdehnung E, der zufälligen Belastung p und der hiedurch bewirkten Ausdehnung e statt findet. Hieraus folgt:

1tens. Setzt man $e = E$, so wird auch $p = P$, wie es der Bedingniss der Aufgabe gemäss ist.

2tens. Das Eisen bleibt vollkommen elastisch, d. h. die Ausdehnung e ist dem p proportional, so lange $\frac{e}{E}$ sehr klein ist. In diesem Falle haben wir nämlich $\frac{p}{P} = \frac{2e}{E}$, woraus die Proportion $p : P = e : \frac{E}{2}$ folgt, wo also p dem e proportional ist. Dieser Satz, dass die von kleinen Gewichten bewirkten Ausdehnungen den Lasten proportional sind, erscheint bereits in allen physikalischen Schriften.

3tens. Wenn aber die Ausdehnung grösser ist, oder das Eisen mehr gespannt wird, so zeigt der obige Ausdruck die jedesmalige Ausdehnung an, welche der Spannkraft das Gleichgewicht hält. Wenn man nämlich in der Gleichung V die Zeichen ändert, und

*) Man findet in dem Ausdrucke $p = A \cdot e - B \cdot e^2$ das Maximum, wenn man denselben in Hinsicht auf p und e differenzirt und den Differenzialkoefficienten $= 0$ setzt. Demnach ist $\frac{dp}{de} = A - 2B \cdot e = 0$, woraus für das grösste p der Werth $e = \frac{A}{2B}$ folgt.

1 auf jeder Seite addirt, so ist $1 - \frac{p}{P} = 1 - \frac{2e}{E} + \frac{e^2}{E^2}$ und wird hier beiderseits die Wurzel gezogen, so ist $\sqrt{\left(1 - \frac{p}{P}\right)} = 1 - \frac{e}{E}$, woraus $\frac{e}{E} = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{P}\right)}$ folgt. (VI).

Wird in diesem Ausdrucke $p = P$ gesetzt, so ist $e = E$; also gibt der Werth $p = P$ die Ausdehnung, welche bei dem Maximum von p statt findet. Auch sehen wir aus dieser Gleichung, dass kein grösseres Gewicht als P vom Drahte getragen werden kann; denn wollte man p grösser als P annehmen, so würde $\sqrt{\left(1 - \frac{p}{P}\right)}$ unmöglich oder imaginär, also auch die Ausdehnung und das Tragungsvermögen unmöglich.

§. 262.

Zur Bestätigung der Richtigkeit unserer Rechnungen wollen wir die Seite 262 angeführte Versuchsreihe nach der aufgestellten Formel berechnen.

Wir haben nach dem Ausdrucke II des vorigen §. die grösste Ausdehnung $E = \frac{A}{2B} = \frac{54 \,.\, 0{,}295079}{2 \,.\, 54^2 \,.\, 0{,}000334} = \frac{441{,}7}{54} = 8{,}18$ Linien, welches im Vergleiche mit der Länge des Drahtes von 696 Linien den 85[ten] Theil beträgt. Nach IV ist das grösste Gewicht, welches der Draht zu tragen vermag, $P = \frac{A \,.\, E}{2} = \frac{0{,}295079 \,.\, 441{,}7}{2} = 65{,}17$ ℔. Werden diese zwei Werthe in dem Ausdrucke VI substituirt, so folgt $e = \frac{441{,}7}{54}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{65{,}17}\right)}\right\}$. Will man aber die Ausdehnungen, so wie bei der Versuchsreihe Seite 262, 54mal grösser erhalten, um sie unmittelbar mit einander vergleichen zu können, so haben wir $54 \,.\, e = 441{,}7\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{65{,}17}\right)}\right\}$. Diese Werthe ergeben sich nach den §. 260 in Anschlag genommenen 6 Versuchen; werden jedoch alle 13 Versuche berücksichtigt, so ergibt sich die Gleichung $54 \,.\, e = 440\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{65}\right)}\right\}$, worin $P = 65$ ℔. Nimmt man nunmehr für p die Werthe von 4, 8, 12, 16 . . . an, und stellt dieselben mit den bei den Versuchen gefundenen Werthen zusammen, so ergibt sich folgende Tabelle:

Werth für p	Beobachtete Ausdehnung 54 . e	Berechnete Ausdehnung 54 . e	Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
NOe.Pf.	N.Oe.Linien.	N.Oe.Linien.	
4	14	13,8	+ 0,2
8	28	28,0	+ 0,0
12	43	42,7	+ 0,3
16	58	58,0	+ 0,0
20	74	73,9	+ 0,1
24	90,5	90,6	— 0,1
28	108	108	+ 0,0
32	127	126,5	+ 0,5
36	146	146,1	— 0,1
40	167	167,2	— 0,2
44	190	189,9	+ 0,1
48	215	215	+ 0,0
52	244	243,2	+ 0,8

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass die Unterschiede, obgleich sie 54mal grösser erscheinen, dennoch sehr unbedeutend sind, woraus also die Richtigkeit unserer abgeleiteten Formel erhellet. Hiebei muss jedoch abermals bemerkt werden, dass die Versuche mit jeder Drahtgattung (jedem Nro. des Drahtes) 4 bis 5mal wiederholt wurden; dass hiebei alle Versuche mit jenen Drähten, die Irregularitäten an Tag gelegt haben, ausgelassen und demnach nur jene beibehalten wur-

den, wo die Unterschiede höchstens $\frac{1}{10}$ Linie unter einander betragen haben, und man also auf ein vollkommen gleichförmiges Eisen schliessen konnte. Da nun auch aus diesen 3 oder 4 Versuchen immer das Mittel genommen wurde, so können die angeführten Zahlen als vollkommen richtig angesehen werden.

Wenn man aus dem obigen Versuche das grösste Gewicht noch berechnen will, welches der Querschnitt von einem N. Oe. Quad. Zoll zu tragen im Stande ist, so ergibt sich diess $= \frac{P \cdot 144}{3{,}14159 \cdot \frac{d^2}{4}} = \frac{65 \cdot 144}{3{,}14159 \cdot (\frac{3}{10})^2 \cdot \frac{1}{4}} = 919{,}56 \cdot 144 = 132417$ ℔ $= 1324$ Zentner.

§. 263.

Nebst dem Seite 262 angeführten Versuche Nro. 1 wurden auf gleiche Weise noch mehr andere Drahtgattungen wie auch Stahlfedern untersucht; wir wollen daher einige von diesen Versuchen noch anführen.

Versuch Nro. 2.

Mit einem Clavierdrahte, dessen Durchmesser $= \frac{9}{44} = 0{,}205$ Linien betrug. Die Länge des gespannten Drahtes war 4 Fuss 10 Zoll = 696 Linien, wie bei dem ersten Versuche. Die Ausdehnungen wurden von dem Zeiger gleichfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war $2\frac{1}{4}$ ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
$1 \cdot 2\frac{1}{4}$	16	16	+ 0,0
$2 \cdot 2\frac{1}{4}$	32,5	32,6	— 0,1
$3 \cdot 2\frac{1}{4}$	50	50	+ 0,0
$4 \cdot 2\frac{1}{4}$	68	68,1	— 0,1
$5 \cdot 2\frac{1}{4}$	87	87,2	— 0,2
$6 \cdot 2\frac{1}{4}$	107,5	107,4	+ 0,1
$7 \cdot 2\frac{1}{4}$	129	128,9	+ 0,1
$8 \cdot 2\frac{1}{4}$	152	152	+ 0,0
$9 \cdot 2\frac{1}{4}$	177	177,1	— 0,1
$10 \cdot 2\frac{1}{4}$	205	204,8	+ 0,2
$11 \cdot 2\frac{1}{4}$	236	236,3	— 0,3
$12 \cdot 2\frac{1}{4}$	274	273,7	+ 0,3

Die Gleichung für die Ausdehnung dieses Drahtes ist $54 \cdot e = 440 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{14 \cdot 2\frac{1}{4}}\right)}\right\}$.

Die mittlere Ausdehnung, welche bei der grössten Belastung dieses Drahtes statt findet, ist für jede andere Länge L desselben Drahtes $= \frac{440 \cdot L}{54 \cdot 696} = \frac{L}{85{,}4}$.

Die grösste Belastung, bei deren Uiberschreitung dieser Draht zerreisst, ist $P = 14 \cdot 2\frac{1}{4} = 31{,}5$ ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt von einen N. Oe. Quad. Zoll ausfällt, ist

$$= \frac{31{,}5 \cdot 144}{3{,}14159 \cdot \left(\frac{9}{44}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} = 958{,}61 \cdot 144 = 138040$$

N. Oe. Pfund, oder 1380 Zentner.

Versuch Nro. 3.

Mit einem Clavierdrahte, dessen Durchmesser $\frac{9}{37} = 0{,}243$ Linien gefunden wurde. Die Länge des gespannten Drahtes war, wie bei den frühern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war $3\frac{3}{8}$ ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N.Oe. Pfd.	N.Oe. Linien	N.Oe. Linien	
0	0	0	
$1 . 3\frac{3}{8}$	16	16	+ 0,0
$2 . 3\frac{3}{8}$	33	32,7	+ 0,3
$3 . 3\frac{3}{8}$	50	50,3	— 0,3
$4 . 3\frac{3}{8}$	68	69,0	— 1,0
$5 . 3\frac{3}{8}$	89	88,9	+ 0,1
$6 . 3\frac{3}{8}$	110	110,3	— 0,3
$7 . 3\frac{3}{8}$	134	133,7	+ 0,3
$8 . 3\frac{3}{8}$	160	159,7	+ 0,3
$9 . 3\frac{3}{8}$	189,5	189,4	+ 0,1
$10 . 3\frac{3}{8}$	225	225,4	— 0,4
$11 . 3\frac{3}{8}$	275	274,4	+ 0,6

Die Gleichung für die Ausdehnung bei diesem Drahte ist $54 . e = 367 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{39{,}65}\right)}\right\}$.

Die Ausdehnung bei der grössten Belastung dieses Drahtes beträgt für die Länge L

$$= \frac{367 . L}{54 . 696} = \frac{L}{102{,}4}.$$

Die grösste Belastung, bei deren Uiberschreitung dieser Draht zerreisst, ist

$$P = \frac{47}{4} \cdot 3\tfrac{3}{8} = 39{,}65 \text{ ℔}.$$

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Qd. Zolles ausfällt, ist

$$= \frac{39{,}65 . 144}{3{,}14159 \cdot \left(\frac{9}{37}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} = 853 . 144 = 122832$$

N. Oe. Pfund, oder beinahe 1228 Zentner.

Versuch Nro. 4.

Mit einem Clavierdrahte, dessen Durchmesser $= \frac{18}{43} = 0{,}419$ Linien war. Die Länge des gespannten Drahtes war wie bei allen übrigen Versuchen = 696 Linien, und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 8 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N.Oe. Pfd.	N.Oe. Linien	N.Oe. Linien	
0	0	0	
1.8	17	17,2	— 0,2
2.8	35	35,3	— 0,3
3.8	54	54,2	— 0,2
4.8	74	74,2	— 0,2
5.8	95	95,5	— 0,5
6.8	118	118,3	— 0,3
7.8	143	143,0	+ 0,0
8.8	171	170,1	+ 0,9
9.8	202	202,0	+ 0,0
10.8	236	236,6	— 0,6
11.8	282	281,7	+ 0,3
12.8	352	354,9	— 2,9

Die Gleichung für die Ausdehnung bei diesem Drahte ist $54 . e = 414 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{98}\right)}\right\}$.

Die Ausdehnung dieses Drahtes bei der grössten Belastung für die Länge L ist

$$= \frac{414 . L}{54 . 696} = \frac{L}{90{,}8}.$$

Die grösste Belastung, bei welcher dieser Draht zerreisst, ist $P = 12{,}25 . 8 = 98$ ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Quad. Zolles entfällt, ist

$$= \frac{98 . 144}{3{,}14159 \cdot \left(\frac{18}{43}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} = 712 . 144 = 102528$$

N. Oe. Pfund, oder 1025 Zentner.

Versuch Nro. 5.

Mit einem **Clavierdrahte**, dessen Durchmesser $= \frac{18}{32{,}5} = 0{,}554$ Linien betrug. Die Länge des gespannten Drahtes war wie bei den andern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 13 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.13	15	14,9	+ 0,1
2.13	31	30,5	+ 0,5
3.13	47	46,7	+ 0,3
4.13	64	63,8	+ 0,2
5.13	82	81,9	+ 0,1
6.13	101	101,2	— 0,2
7.13	122	121,8	+ 0,2
8.13	144	144,3	— 0,3
9.13	169	169,2	— 0,2
10.13	198	197,4	+ 0,9
11.13	231	231,0	+ 0,0
12.13	275	274,6	+ 0,4

Die Gleichung für die Ausdehnung bei diesem Drahte ist $54 . e = 380 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{13.13}\right)}\right\}$.

Die Ausdehnung dieses Drahtes bei der grössten Belastung der Länge L ist $= \frac{380 . L}{54 . 696} = \frac{L}{98{,}9}$.

Die grösste Belastung, bei welcher dieser Draht zerreisst, ist $P = 13 . 13 = 169$ ℔.

Die grösste Last, welche demnach von dem Querschnitte eines N. Oe. Quad. Zolles getragen werden kann, ist

$$= \frac{169 . 144}{3{,}14159 \cdot \left(\frac{18}{32{,}5}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} = 701 . 144 = 100944$$

N. Oe. Pfund, oder 1009 Zentner.

Versuch Nro. 6.

Mit einem **gemeinen Drahte**, dessen Durchmesser $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ Linien betrug. Die Länge des gespannten Drahtes war, wie bei den andern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 15 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.15	14,6	14,4	+ 0,2
2.15	29	29,3	— 0,3
3.15	45	44,8	+ 0,2
4.15	62	60,9	+ 1,1
5.15	78	77,8	+ 0,2
6.15	96	95,6	+ 0,4
7.15	115	114,4	+ 0,6
8.15	134	134,4	— 0,4
9.15	155	155,8	— 0,8
10.15	178	179,2	— 1,2
11.15	205	205,0	+ 0,0

Die Gleichung für die Ausdehnung dieses Drahtes ist $54 . e = 424 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{15.15}\right)}\right\}$.

Die Ausdehnung dieses Drahtes für den Fall der grössten Belastung der Länge L ist $= \frac{424 . L}{54 . 696} = \frac{L}{88{,}6}$.

Die grösste Belastung, bei welcher dieser Draht zerreisst, ist $P = 15 . 15 = 225$ ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Quad. Zolles entfällt, ist

$$= \frac{225 . 144}{3{,}14159 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}} = 645 . 144 = 92880$$

N. Oe. Pfund, oder 929 Zentner.

Versuch Nro. 7.

Mit einem gemeinen Drahte, dessen Durchmesser $\frac{107}{127} = 0{,}843$ Linien betrug. Die Länge des gespannten Drahtes war, wie bei den andern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 22 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.22	10	9,9	+ 0,1
2.22	20	20,3	— 0,3
3.22	31	31,2	— 0,2
4.22	42	42,8	— 0,8
5.22	55	55,0	+ 0,0
6.22	68	68,2	— 0,2
7.22	83	82,6	+ 0,4
8.22	99	98,5	+ 0,5
9.22	117	116,5	+ 0,5
10.22	138	137,9	+ 0,1
11.22	165	165,7	— 0,7

Die allgemeine Gleichung für die Ausdehnung dieses Drahtes ist

$$54 \,.\, e = 233 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{12 \,.\, 22}\right)}\right\}.$$

Die Ausdehnung desselben bei der grössten Belastung beträgt für die Länge L, $\frac{233 \,.\, L}{54 \,.\, 696} = \frac{L}{161{,}3}$.

Die grösste Belastung, über welche dieser Draht zerreisst, ist P = 12 . 22 = 264 ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Quad. Zolles ausfällt,

$$\text{ist} = \frac{264 \,.\, 144}{3{,}14159 \,.\, \left(\frac{107}{127}\right)^2 \,.\, \frac{1}{4}} = 473 \,.\, 144 = 68112$$

Nied. Oest. Pfund, oder 681 Zentner.

Versuch Nro. 8.

Mit einer stählernen Uhrfeder, deren Dicke $^5/_{31}$ Linien und Breite $^{43}/_{36}$ Linien, demnach die Querschnittsfläche $^{215}/_{1116}$ Quad. Linien betrug. Die Länge der gespannten Feder war wie bei den andern Versuchen = 696 Linien, und die Ausdehnungen derselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 12 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.12	16	16,1	— 0,1
2.12	32,5	32,5	+ 0,0
3.12	49	49,2	— 0,2
4.12	66	66,3	— 0,3
5.12	84	83,9	+ 0,1
6.12	102	101,8	+ 0,2
7.12	120,5	120,1	+ 0,4
8.12	139,5	139,0	+ 0,5
9.12	159	158,5	+ 0,5
10.12	178,5	178,5	+ 0,0
11.12	198,5	199,1	— 0,6
12.12	220	220,4	— 0,4

Die Gleichung für die Ausdehnung bei dieser Stahlfeder ist

$$54 \,.\, e = 828 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{26 \,.\, 12}\right)}\right\}.$$

Die Ausdehnung bei der grössten Belastung dieser Stahlfeder ist für die Länge L

$$= \frac{828 \,.\, L}{54 \,.\, 696} = \frac{L}{45{,}4}.$$

Die grösste Belastung, über welche diese Stahlfeder zerreisst, ist P = 26 . 12 = 312 ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Quad. Zolles ausfällt,

$$\text{ist} = \frac{312 \,.\, 144}{\frac{215}{1116}} = 1619{,}5 \,.\, 144 = 233208$$

Nied. Oest. Pfund, oder 2332 Zentner.

Versuch Nro. 9.

Mit einer **stählernen Uhrfeder**, deren Dicke 0,2 Linien, die Breite 1,5 Linien, demnach die Querschnittsfläche 0,3 Quadrat-Linien betrug. Die Länge der gespannten Uhrfeder war, wie bei den andern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen derselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 12 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.12	13,5	13,4	+ 0,1
2.12	27	27,1	— 0,1
3.12	41	41,0	+ 0,0
4.12	55	55,2	— 0,2
5.12	70,5	69,7	+ 0,8
6.12	85	84,5	+ 0,5
7.12	100	99,5	+ 0,5
8.12	115,5	114,5	+ 1,0
9.12	131,5	130,7	+ 0,8
10.12	147,5	146,8	+ 0,7
11.12	163	163,4	— 0,4
12.12	180	180,3	— 0,3
13.12	198	197,8	+ 0,2
14.12	216	215,8	+ 0,2
15.12	234	234,3	— 0,3

Die Gleichung für die Ausdehnung bei dieser Uhrfeder ist

$$= 54 \cdot e = 800 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{30 \, . \, 12}\right)}\right\}.$$

Die mittlere Ausdehnung dieser Uhrfeder für eine andere Länge L ist $\frac{800 \, . \, L}{54 \, . \, 696} = \frac{L}{47{,}0}$.

Die grösste Belastung, über welche diese Uhrfeder zerreisst, ist $P = 30 \, . \, 12 = 360$ ℔.

Die grösste Last, welche demnach auf den Querschnitt eines N. Oe. Quad. Zolles ausfällt, ist $= \frac{360 \, . \, 144}{0{,}3} = 1200 \, . \, 144 = 172800$ N. Oest. Pfund, oder 1728 Zentner.

Versuch Nro. 10.

Mit einem **ausgeglühten Drahte**, dessen Durchmesser $\frac{18}{59} = 0{,}305$ Linien betrug. Die Länge des gespannten Drahtes war, wie bei den andern Versuchen = 696 Linien und die Ausdehnungen desselben wurden von dem Zeiger ebenfalls 54mal grösser angegeben. Das Laufgewicht war 6 ℔.

Angehängte Gewichte p	54fache Ausdehnung nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.
	Beobachtung	Berechnung	
N. Oe. Pfd.	N. Oe. Linien	N. Oe. Linien	
0	0	0	
1.6	13	12,8	+ 0,2
2.6	27	26,4	+ 0,6
3.6	41	40,8	+ 0,2
4.6	56	56,4	— 0,4
5.6	73	73,2	— 0,2
6.6	92	91,9	+ 0,1
7.6	113	113,1	— 0,1
8.6	137	138,2	— 1,2
9.6	170	171,0	— 1,0

Die Gleichung für die Ausdehnung dieses Drahtes ist: $54 \, . \, e = 250 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{60}\right)}\right\}$.

Die mittlere Ausdehnung dieses Drahtes für die unbestimmte Länge L ist $= \frac{250 \, . \, L}{54 \, . \, 696} = \frac{L}{150{,}3}$.

Die grösste Belastung, bei deren Uiberschreitung dieser Draht zerreisst, ist $P = 6 \, . \, 10 = 60$ ℔. Hiebei wird bemerkt, dass dieser Draht bei der Verschiebung des Laufgewichtes auf die 10te Entfernung mit einem theils faserigen, theils stahlartigen Bruche zerrissen ist, wogegen die ersten 6 Clavierdrähte einen stahlartigen Bruch zeigten.

Die grösste Last, welche auf den Querschnitt eines N. Oest. Quad. Zolles für den ausgeglühten Draht ausfällt, ist $= \frac{60 . 144}{3{,}14159 . \left(\frac{18}{59}\right)^2 . \frac{1}{4}} = 820{,}77 . 144 = 118191$ Nied. Oest. Pfund, oder 1182 Zentner.

§. 264.

Die angeführten 10 Versuche werden hinreichen, um hiernach allgemeine Gesetze über die Festigkeit, Ausdehnung und Elasticität der Körper überhaupt und insbesondere für das Eisen aufzustellen.

Es ist bekannt, dass alle Körper einer Ausdehnung fähig sind und dass ihre Maasse durch angebrachte Kräfte (Gewichte) verlängert werden. Diese Ausdehnungen sind desto grösser, je grösser die Spannkräfte sind, durch welche sie bewirkt werden. Weil aber auch die Ausdehnung durch Vermehrung der Spannkräfte zu gross und die Cohäsionskraft überschritten werden kann, sonach der Körper am Ende zerrissen oder zerbrochen wird, so folgt von selbst, dass die Festigkeit oder Cohäsionskraft p nicht bloss der Ausdehnung e allein proportional seyn könne, sondern dass der algebraische Ausdruck für die Festigkeit p (oder die Funktion, wodurch die Verhältnisse der Spannkräfte und der Ausdehnung einander gleich werden) nebst dem Faktor e noch einen Faktor von der Form $A - B . e$ enthalten müsse, damit nämlich die Spannkraft p nicht nur anfangs, wo $e = 0$ ist, sondern auch am Ende, wo die Spannkraft der Cohäsionskraft gleich ist und die Ausdehnung ihre Gränze $\left(e = \frac{A}{B}\right)$ erreicht, verschwinden möge. Diese Bemerkung gibt uns für die Festigkeit aller Körper die allgemeine Gleichung $p = e\,(A - B . e)$, wo A und B durch besondere Erfahrungen für jeden Körper bestimmt werden müssen. Für das Eisen haben wir §. 261 die allgemeine Gleichung gefunden $\frac{p}{P} = \frac{e}{E}\left(2 - \frac{e}{E}\right)$ oder $p = e\left(\frac{2\,P}{E} - \frac{P . e}{E^2}\right)$, wo also $A = \frac{2\,P}{E}$ und $B = \frac{P}{E^2}$ ist. In dieser Gleichung ist P die grösste Last, welche der Körper tragen kann, E die von der grössten Last P bewirkte Ausdehnung, p die jedesmalige Belastung und e die hiedurch hervorgebrachte Ausdehnung.

§. 265.

Die Gleichung $\frac{p}{P} = \frac{e}{E}\left(2 - \frac{e}{E}\right)$ bestimmt das Gesetz, nach welchem das Gewicht p für jede gegebene Ausdehnung e, oder auch umgekehrt die Ausdehnung e, welche vom Gewichte p bewirkt wird, berechnet werden kann. Es frägt sich nun noch, wie weit das vom Gewichte p ausgedehnte Eisen nach seiner Befreiung von dieser Belastung wieder zurückgehen werde.

Aus unzähligen Erfahrungen ist jedermann bekannt, dass das Eisen, so wie andere ausdehnbare Körper nach dem Abnehmen der Belastung nicht ganz zu seiner vorigen Länge zurückkehre, sondern dass von jeder merklichen Ausdehnung immer ein Theil zurückbleibt und dem Eisen in dieser Hinsicht bisher nur eine unvollkommene Elasticität zugestanden wurde. Zur nöthigen Aufklärung der hiebei obwaltenden

Umstände hat man alle Versuche, wie bereits §. 259 bemerkt wurde, auch rückwärts wiederholt und hiebei auch diejenigen Ausdehnungen oder Verlängerungen bemerkt, bis zu welchen die untersuchten Drähte bei der stuffenweisen Verminderung der angehängten Gewichte zurückgegangen sind. In der Tabelle S. 262 sehen wir, dass anfangs die Ausdehnungen den Gewichten sehr nahe proportional sind; es wurde nämlich bei 4 ℔ die Ausdehnung 14 und bei 8 ℔ die doppelte Ausdehnung oder 28 beobachtet. Dasselbe folgt aus der Gleichung $\frac{p}{P} = \frac{e}{E}\left(2 - \frac{e}{E}\right)$. So lange nämlich $\frac{e}{E}$ eine kleine Bruchzahl ist, so wird die Zahl 2 durch Subtraktion dieser kleinen Grösse nur unmerklich geändert und es bleibt $\frac{p}{P} = \frac{2e}{E}$, demnach $p : 2P = e : E$.

Wird jedoch p grösser genommen, so findet man auch die von demselben bewirkte Ausdehnung e grösser und der Faktor $2 - \frac{e}{E}$ erleidet eine merkliche Aenderung. Betrachten wir nämlich eine horizontale Versuchsreihe, z. B. die 10[te], so finden wir die Ausdehnungen, welche sich bei den nach und nach verminderten Gewichten 40, 36, 32, 28 . . . 4 ℔ gezeigt haben = 167, 154, 140, 126, 113, 100, 86, 72, 59, 45 und nach dem Abnehmen des Laufgewichtes blieb der Draht noch um 32 verlängert. Dieselben Ausdehnungen fanden auch statt, wenn der Draht wieder mit den Gewichten 4, 8, 12, 16 40 ℔ beschwert wurde. Weil aber in diesem Falle die Ausdehnung 32 noch *vor* der wiederholten Auflegung der Gewichte 4, 8, 12, 16 40 ℔ vorhanden war, demnach nicht mehr als eine Wirkung der neu aufgelegten Gewichte betrachtet werden kann, so müssen wir in dieser Versuchsreihe die Ausdehnung 32 von allen bemerkten Ausdehnungen abziehen, und wir erhalten sonach

für die Gewichte	4,	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,	36,	40,
die bewirkten Ausdehnungen	13,	27,	40,	54,	68,	81,	94,	108,	122,	135,

welche wegen der gleichen Unterschiede den darüber stehenden Gewichten offenbar proportional sind. Hieraus ist zu ersehen, dass die bei den Versuchen vorgefundenen Ausdehnungen eigentlich *Summen zweier Ausdehnungen* sind, wovon die erste als eine von den bereits früher angehängten Gewichten beigebrachte und nach abgenommenem Gewichte dem Drahte gebliebene Ausdehnung, die zweite aber als eine den neu aufgelegten Gewichten proportionale Ausdehnung zu betrachten ist. Um diese zwei Ausdehnungen von einander abzusondern, wollen wir das grösste Gewicht, womit der für einen neuen Versuch bestimmte Eisendraht bereits früher belastet war, oder das letzte in jeder horizontalen Reihe angeführte Gewicht p′ nennen, so war die von demselben bewirkte gesammte Ausdehnung $e' = E\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)}\right\}$, und die darin vorfindige, der Last p′ proportionale Ausdehnung $= \frac{E \cdot p'}{2P}$. Ziehen wir die letztere von e′ ab, so bleibt die dem Drahte nach der Beseitigung des Gewichtes p′ beigebrachte oder *bleibende Ausdehnung* $= E\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)} - \frac{p'}{2P}\right\} = \frac{E}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)}\right\}^2$. Wird nun dieser Eisendraht mit einem neuen Gewichte p belastet, so ist die demselben zukommende Aus-

dehnung $e = \frac{E \cdot p}{2P}$, folglich dem Gewichte p proportional, jedoch nur in so weit, als das frühere Gewicht p′ von dem neu aufgelegten p nicht überschritten wird.

Bei einer weitern Fortsetzung dieser Versuche tritt nämlich der Umstand ein, dass durch die grössere Belastung p′ die dem Drahte beigebrachte bleibende Ausdehnung $\frac{E}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)}\right\}^2$ vergrössert wird, folglich eine Veränderung eintritt, welche das Gebiet der Gleichung $e = \frac{E \cdot p}{2P}$ überschreitet. Diese Uibereinstimmung wird aber erzielet, wenn bei jedem Versuche die dem Eisen bereits früher beigebrachte bleibende Ausdehnung mit in die Rechnung aufgenommen wird.

Um hiezu ein Beispiel zu geben, haben wir die Seite 262 angeführten Versuche auf folgende Art berechnet. Für den untersuchten Draht war P = 65 ℔ und E = 440. Mittelst dieser Werthe wurde zuerst für jede horizontale Versuchsreihe die bleibende Ausdehnung nach der Gleichung $e' = \frac{E}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)}\right\}^2 = \frac{440}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{65}\right)}\right\}^2$ berechnet, wo nämlich für p′ das in jeder horizontalen Reihe angeführte grösste Gewicht angenommen wurde. Die gefundenen Werthe sind in der zweiten Columne in der Rubrik »Bleibende Ausdehnung des Drahtes« enthalten, z. B. in der 10ten Reihe ist die bleibende Ausdehnung $e' = \frac{440}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4 \cdot 10}{65}\right)}\right\}^2 = 31{,}7$.

Hiezu wurde noch die für jedes angehängte Gewicht p berechnete Ausdehnung nach der Gleichung $e = \frac{E \cdot p}{2P} = \frac{440 \cdot p}{2 \cdot 65}$ bestimmt, und der in der ersten Rubrike angeführten bleibenden Ausdehnung hinzugesetzt.

Setzt man z. B. p = 4, so ist die Verlängerung $e = \frac{44 \cdot 4}{13} = 13{,}5$

— — — p = 8, — — — — $e = \frac{44 \cdot 8}{13} = 27{,}1$ u. s. w.

Wird zu diesen Verlängerungen die bleibende Ausdehnung 31,7 addirt, so ergeben sich die in der 10ten horizontalen Reihe der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlen 45,2, 58,8 u. s. w.

Versuchsreihe.	Bleibende Ausdehnung des Drahtes.	Angehängte Gewichte = p												
		4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
		54fache Ausdehnung des geprüften Drahtes.												
0	0													
1	0,2	13,7												
2	0,9	14,4	28,0											
3	2,1	15,6	29,2	42,7										
4	3,8	17,3	30,9	44,4	58,0									
5	6,2	19,7	33,3	46,8	60,4	73,9								
6	9,3	22,8	36,4	49,9	63,5	77,0	90,5							
7	13,3	26,8	40,4	53,9	67,5	81,0	94,5	108,1						
8	18,2	31,7	45,3	58,8	72,4	85,9	99,4	113,0	126,5					
9	24,3	37,8	51,4	64,9	78,5	92,0	105,5	119,1	132,6	146,1				
10	31,7	45,2	58,8	72,3	85,9	99,4	112,9	126,5	140,	153,5	167,1			
11	41,0	54,5	68,1	81,6	95,2	108,7	122,2	135,8	149,3	162,8	176,4	189,9		
12	52,5	66,0	79,6	93,1	106,7	120,2	133,7	147,3	160,8	174,3	187,9	201,4	215,0	
13	67,2	80,7	94,3	107,8	121,4	134,9	148,4	162,0	175,5	189,0	202,6	216,1	229,7	243,2

Die Vergleichung aller Zahlen in dieser Tabelle mit den Versuchsreihen Seite 262, zeigt die vollkommene Uibereinstimmung dieser Rechnung mit der Erfahrung, welche in keinem Falle um mehr als 0,9 oder um $\frac{1}{60}$ Linie von einander abweichen.

§. 266.

Wird in der vorher gefundenen Gleichung für die bleibende Ausdehnung $e' = \frac{E}{2}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p'}{P}\right)}\right\}^2$ das Gewicht $p' = P$ gesetzt, so ist die von der grössten Belastung P bewirkte bleibende Ausdehnung $e' = \frac{E}{2}$. Wird nun diese von der ganzen Ausdehnung E abgezogen, so bleibt für den Spielraum von $p = 0$ bis $p = P$ nur die Ausdehnung $E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2}$ übrig, welches also diejenige Grösse ist, die in der Proportion $p : P = e : u$, (wo nämlich die Ausdehnungen den angehängten Gewichten proportional sind) an die Stelle von u gesetzt werden muss. Wir haben also allgemein $p : P = e : \frac{E}{2}$, wie §. 261 bereits angeführt wurde.

Diese Bemerkung dient dazu, um bei den Versuchen mit eisernen Stäben oder Ketten nicht immer bis zu der grössten Last, die der Körper tragen kann, und der dazu gehörigen Ausdehnung $\frac{E}{2}$ zurückgehen zu müssen, weil dem Verhältnisse $P : \frac{E}{2}$

ein jedes andere Verhältniss p : e gleich ist, folglich nur erfordert wird, bei irgend einem Gewichte p den freien Spielraum oder diejenige Ausdehnung zu beobachten, um welche der mit dem Gewichte p belastete Eisenstab nach der abgenommenen Belastung wieder zurückgeht, um auf solche Art diejenige Ausdehnung e zu erhalten, welche der Last proportional ist, und womit dann alle übrigen (p und e) verglichen werden können.

§. 267.

Aus dem bisher Gesagten erklären sich nun auch die Erfahrungen derjenigen Physiker, welche nach ihren Versuchen über das Eisen anführen, dass Drähte und Eisenstäbe nur bis zu einer gewissen Gränze vollkommen elastisch bleiben, und über dieselbe hinaus Irregularitäten zeigen. Macht man nämlich einen Versuch mit einem Stabe, der bereits eine Ausdehnung erhielt, so findet, wie bereits §. 265 gezeigt wurde, das Gesetz der vollkommenen Elasticität nur bis zu der Last statt, womit der Stab früher beschwert wurde; belastet man ihn aber weiter, so findet sich diess Gesetz verändert. Betrachten wir z. B. den Draht, womit die Versuche Seite 262 gemacht wurden, und untersuchen wir irgend eine Versuchsreihe, z. B. die 7te. Ziehen wir die Zahlen 13, 26, 40, 54, 67, 81, 94 und 108 von einander ab, so ergeben sich die Ausdehnungen 13, 14, 14, 13, 14, 13 und 14, welche durch gleiche Gewichtszulagen bewirkt wurden. Der Draht behielt daher während der Belastung von 4 bis 28 ℔ die vollkommene Elasticität. Als man hierauf noch 4 ℔ zulegte, betrug die Ausdehnung 127 — 108 = 19, folglich mehr als vorher. Geht man aber in der folgenden Reihe von der höchsten Ausdehnung 127 zurück, so ergeben sich wieder dieselben Differenzen (13 und 14); jedoch findet man die bleibende Ausdehnung von 13 auf 18 vermehrt, und diess ist der Grund der Irregularität, welche von 108 auf 127 angetroffen wurde (es ist nämlich 18 — 13 = 5 und 5 + 14 = 19). Auf gleiche Weise findet man in der 10ten Versuchsreihe die Differenzen der Ausdehnungen = 14 und 13; wenn man jedoch am Ende dieser Reihe von der Belastung 40 ℔ auf 44 ℔ übergeht, so ergibt sich in der Ausdehnung die Differenz 190 — 167 = 23, also eine grössere Ausdehnung. Zieht man aber von 23 den Unterschied der bleibenden Ausdehnungen 41 — 32 = 9 ab, so ist wieder 23 — 9 = 14 u. s. w.

§. 268.

Aus dieser Darstellung ergibt sich eine wichtige Bemerkung für den Bau der Kettenbrücken. Wenn dieselben nämlich bei ihrem nachfolgenden Gebrauche mit einer grössern Last beschwert werden, als womit die Kettenglieder bei ihrer Probe belastet wurden, so tritt eine weitere Ausdehnung der Kettenstäbe und eine neue bleibende Verlängerung ein, oder die Ketten werden schlapp und die Brückenbahn sinkt unter ihre ursprüngliche Ebene ein. Wenn daher Kettenbrücken bei ihrem Gebrauche ihren ersten Stand aufrecht erhalten, und die Ketten nicht schlapp werden sollen, so müssen die Kettenglieder vorläufig bis zu der grössten Last probiert werden, welche sie später zu tragen erhalten. Hierin liegt der Grund, warum mehrere Kettenbrücken nach ihrer Aufstellung während ihres Gebrauches eine Senkung in der Mitte erlitten haben.

§. 269.

Die Ausdehnung der Kettenstäbe und anderer Eisenschienen ist eben so wie bei den Clavierdrähten von zweifacher Art, nämlich eine bleibende, als Folge ihrer vorhergegangenen Belastung und eine veränderliche, welcher diese Stäbe bei ihrem nachfolgenden Gebrauche noch unterliegen.

Die erste oder diejenige, welche den Kettenstäben bei ihrer vorläufigen Probe beigebracht worden, und nach der Befreiung von dieser Belastung zurückgeblieben ist, können wir bei ihrem nachfolgenden Gebrauche um so mehr ausser Acht lassen, als durch die bis zur grössten Belastung vorgenommenen Probeversuche nicht nur alle Besorgnisse hinsichtlich ihres festen Bestandes behoben worden sind, sondern auch durch diese geringeren Gewichte an der bleibenden Ausdehnung nichts mehr geändert werden kann.

Da sonach diese Eisenstäbe von zufälligen Belastungen zwar noch ausgedehnt werden, jedoch nach der Befreiung von dieser Belastung auch wieder zu ihrer vorigen Länge zurückkehren; so ergibt sich aus dem allgemeinen Naturgesetze, vermög welchem die Wirkungen ihren Ursachen proportional sind, dass auch die Grösse dieser zufälligen Ausdehnungen nach dem Verhältnisse der Spannkräfte zu berechnen seyn werde.

Wir wollen demnach diejenige Ausdehnung, um welche der bei dem Probeversuche mit der Last P beschwerte Stab nach seiner Befreiung von diesem Gewichte zurückgegangen ist mit u, und eben so die Ausdehnung von der zufälligen Belastung p mit e bezeichnen, so haben wir die allgemeine Proportion $P : p = u : e$; weil aber die Ausdehnung u der Länge des Stabes proportional ist, so wollen wir statt u die Grösse $m . L$ setzen, und da auf gleiche Art die Querschnittsfläche des Stabes F der Last P proportional seyn muss, so können wir in der vorigen Proportion an die Stelle von P die Grösse $n . F$ setzen, wo unter n das Tragungsvermögen eines Quadratzolles, und unter F der Querschnitt des betreffenden Stabes in Quadratzollen verstanden wird; dadurch erhalten wir $n . F : p = m . L : e$ und hieraus $p = \frac{e . n . F}{m . L}$, welche Gleichung mit der §. 238 angeführten Proportion ganz übereinstimmt.

Da jedoch bei der Aufstellung jener Proportion angenommen wurde, dass die Ausdehnungen den angehängten Gewichten nur in so weit proportional sind, als diese Gewichte noch klein und die Körper als vollkommen elastisch angenommen werden können; so belehrt uns im Gegentheile die gegenwärtige Gleichung, dass dieselbe Proportion auch bei grösseren Lasten statt findet, wenn nur die Eisenstäbe oder Ketten vorher bis zu einer grösseren Last als sie bei ihrem Gebrauche zu tragen haben, probiert worden sind.

§. 270.

Zur zweckmässigen Anwendung dieser über die Festigkeit und Ausdehnung des Eisens aufgestellten Gleichung, werden hier noch folgende Bemerkungen beigefügt.

In mehreren Schriften wird für den Gebrauch des Eisens die Regel angeführt, dass man zur Erzielung hinlänglicher Sicherheit den eisernen Stäben nur die Hälfte derjenigen Last anvertrauen dürfe, von welcher sie zerrissen oder zerbrochen werden würden.

Da die Ausdehnungen u und e den Spannkräften P und p proportional sind, so sehen wir, dass für den Fall $p = \frac{1}{2} P$ auch $e = \frac{1}{2} u$ oder $= \frac{1}{2} m . L$ seyn werde; das verwendete Eisen befindet sich demnach in der Mitte zwischen seiner grössten und kleinsten Ausdehnung, und für die veränderliche oder zufällige Belastung ist noch eine eben so grosse Last übrig als diejenige, welche dem verwendeten Stabe bereits anvertraut wird, und eben so gross ist auch noch die übrige Ausdehnungsfähigkeit. Da die letztere bei kurzen Stäben sehr gering ist, so dürfte die Beobachtung dieser Regel in solchen Fällen keinem weitern Anstande unterliegen.

B e i s p i e l. An einen Stab Eisen sollen 200 Zentner angehängt werden, die Länge des Stabes beträgt 15 Fuss = 180 Zoll. Das Eisen, welches hiezu verwendet wird, besitzt die Kraft von 500 Zentnern auf 1 Quadrat Zoll. Die Querschnittsfläche des Stabes sey F, so ergibt sich sein Tragungsvermögen aus der Proportion 1 Quad. Zoll : 500 Zentner = F : 500 . F; weil aber dieser Stab 200 Zentner tragen soll, so haben wir $\frac{500 . F}{2} = 200$, woraus $F = 0{,}8$ Quad. Zoll, demnach ist der kub. Inhalt dieses Stabes $= 180 . 0{,}8 = 144$ kub. Zoll. Wenn also 4 kub. Zolle 1 Pfund wiegen, so wird sein Gewicht $= \frac{144}{4} = 36$ ℔ seyn müssen.

§. 271.

Bei Kettenbrücken von einer bedeutenden Länge sey der bei dem Versuche der Kettenstäbe bis zur grössten Belastung P gefundene Spielraum, oder die Länge, um welche die Ketten nach abgenommener Belastung P sich verkürzen $= m . L$, so würde nach der vorhergehenden Regel, dass die grösste Spannung der Ketten zweimal so gross angenommen werden soll, folgen, dass die wirkliche Ausdehnung nur $\frac{1}{2} m . L$ seyn würde; weil aber wegen der bedeutenden Länge L auch diese Ausdehnung $\frac{m . L}{2}$ noch bedeutend und desshalb die Einsinkung der Brücke in ihrer Mitte d r e i m a l s o g r o s s seyn würde *), so muss zur Vermeidung solcher grössern Senkungen oder

*) Die Gleichung für die parabolische krumme Linie der Ketten sey $y^2 = p . x$ so ist $2 y . d y = p . d x$ also $\frac{d x}{d y} = \frac{2 y}{p}$. Die Länge dieser krummen Linie vom Scheitel an gerechnet wird daher $d s = \sqrt{(d y^2 + d x^2)} = d y \sqrt{\left(1 + \frac{d x^2}{d y^2}\right)} = d y \sqrt{\left(1 + \frac{4 y^2}{p^2}\right)} = d y \left(1 + \frac{2 y^2}{p^2}\right)$ beinahe seyn; also $S = y + \frac{2 y^3}{3 p^2}$ und weil $p^2 = \frac{y^4}{x^2}$, so ist $S = y + \frac{2 x^2}{3 y}$. Nennen wir nun die Länge der Brückenbahn $= a$, so ist $y = \frac{a}{2}$; die Höhe im Scheitel oder der Pfeil des Brückenbogens in der Mitte $= h = x$; so ist die Länge des Bogens $L = 2 S = 2 y + \frac{4 x^2}{3 y} = a + \frac{8 h^2}{3 a}$. Weil nun die Länge der horizontalen Bahn unverändert bleibt, wenn die Ketten durch ihre Spannkraft ausgedehnt werden, so ist $d L = \frac{16 h . d h}{3 a}$. Bei den meisten englischen Kettenbrücken ist $a = 16 h$, folglich $d h = 3 d L$; d. h. die Senkung in der Mitte ist d r e i m a l s o g r o s s, als die Ausdehnung, welche die Ketten von der aufgelegten Last erleiden.

des Spielraumes für mögliche Schwingungen nothwendig ein anderes Verhältniss, als das angegebene doppelte gewählt werden.

Es sey z. B. die Länge des Brückenbogens $= 90$ Klafter, und die Ausdehnung $= \frac{L}{180} = 3$ Fuss; so wäre für den Fall, wenn die Ketten mit einer solchen Stärke angetragen wären, dass sie die doppelte Spannkraft auszuhalten vermögen, die Ausdehnung $= \frac{1}{2}$ Fuss $= 18$ Zoll; demnach würde das Einsinken dieser Brücke bei ihrer grössten Belastung $= 3 . 18 = 54$ Zoll $= 4$ Fuss 6 Zoll betragen. Wollte man diese Einsinkung nur auf 2 Fuss reduziren, so würde dieses nach der Proportion $P : p = m . L : e = 3 : \frac{2}{3}$ anzunehmen seyn, demnach wäre $P : p = 9 : 2$, folglich $P = 4{,}5 . p$; also viel grösser als $2 p$.

§. 272.

Allgemein wäre diese Aufgabe auf folgende Art aufzulösen: Wenn die Kettenstäbe bis zu einer gegebenen Belastung (z. B. 600 Zentner auf einen Quad. Zoll) probiert werden, und die Querschnittsfläche aller Kettenstäbe in Quad. Zollen $= F$ gesetzt wird, so ist die grösste Spannung, welche die Kette auszuhalten vermag $= F . 600$ Zentner $= P$. Die gegebene Spannung, welche die Ketten bei ihrer grössten zufälligen Belastung aushalten sollen, sey $= p$. Die Ausdehnung, welche sich bei dieser Probe auf die Länge der probierten Stäbe l ergeben hat, sey $= m . l$, so wird die Ausdehnung für die Länge L der Ketten $= m . L$ seyn, und wenn wir die zulässige Einsinkung der Ketten in der Mitte $= e$, folglich die zulässige Ausdehnung $= \frac{e}{3}$ setzen, so haben wir die Proportion $F . 600 : p = m . L : \frac{e}{3}$. Wenn in dieser Proportion drei Glieder gegeben sind, können wir das vierte finden.

B e i s p i e l. Es sey die Länge $L = 90$ Klafter; die Ausdehnung der Kettenlänge $L = \frac{L}{180} = 3$ Fuss; die grösste Spannung, welche die Ketten zu erleiden haben $= 32000$ Zentner $= p$; das Einsinken in der Mitte der Brücke $= 18$ Zoll, folglich die Ausdehnung der Ketten für den Fall ihrer grössten Belastung $= 6$ Zoll $= \frac{1}{2}$ Fuss, so haben wir $600 . F : 32000 = 3 : \frac{1}{2}$ und hieraus folgt $F = 320$ Quad. Zoll, womit die Maasse der in England erbauten *Menai* Kettenbrücke vollkommen übereinstimmen.

§. 273.

Wir sehen hieraus, dass man zu dem Bauantrage einer Kettenbrücke Folgendes bedarf:

1 t e n s. Das Tragungsvermögen des Eisens auf einen Quad. Zoll, wofür Hr. *Telford* in England 600 Zentner angenommen hat, welches jedoch wegen der grossen Veränderlichkeit des Eisens an jedem Ort durch eigene Versuche bestimmt werden muss.

2 t e n s. Die grösste Spannung, welche die Ketten zu erleiden haben, wovon wir im folgenden Kapitel über die statische Baukunst umständlich handeln werden.

3 t e n s. Muss derjenige Spielraum der Ausdehnung, um welchen die Ketten nach ihrer Befreiung von der Belastung zurücktreten, durch die Versuche mit denselben Kettengliedern bestimmt werden.

Sind nun diese Grössen gegeben, so ist hiedurch auch die Grösse des Einsinkens in der Mitte vollkommen bestimmt; oder wenn die Grösse des Einsinkens ge-

geben ist, so lässt sich aus der obigen Proportion die Querschnittsfläche der Kettenstäbe berechnen.

§. 274.

Da in den bisherigen Schriften über die Festigkeit keine Rücksicht auf die Ausdehnung der Körper genommen wurde, und man bloss nach praktischem Gutdünken annahm, das Eisen und andere Körper zwei- bis dreimal so stark zu machen, als zur Verhütung des Zerreissens nöthig war, so wollen wir wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes noch einige Bemerkungen hierüber beisetzen.

Zu diesem Behufe stellen wir in der folgenden Tabelle die oben S. 266 bis S. 271 angeführten Versuche mit Drähten und stählernen Uhrfedern zusammen. In dieser Tabelle enthält die fünfte Rubrik den freien Spielraum, bis zu welchem die Länge der Kettenstäbe zurücktritt und der nach §. 266 für die Länge unserer Drähte $= \frac{E}{2}$, also überhaupt $= m.L$ ist. Die letzte Rubrik in dieser Tabelle enthält die Grösse $\frac{n}{m}$, welche in der §. 269 abgeleiteten Gleichung $p = \frac{e.n.F}{m.L}$ vorkommt; diese Grösse ist nämlich bei dem Clavierdraht Nro. 1 $= 132417.85 = 11255445$ u. s. w.

Versuchs Nro.	Beschreibung der versuchten Körper.	Dimensionen derselben.	Grösste Ausdehnung der Länge L.	Spielraum der Elasticität m.L.	Berechnetes Gewicht, womit die Querschnittsfläche eines N. Oe. Qdr. Zolles zerrissen wird.	Verhältniss des Kraftvermögens zum elastischen Spielraum $\frac{n}{m}$
1	Clavierdraht	Durchmesser = 0,3 Linien	$\frac{L}{85}$	$\frac{L}{2.85}$	132417 N. Oe. ℔	11255445
2	„	„ = 0,205 „	$\frac{L}{85{,}4}$	$\frac{L}{2.85{,}4}$	138040 „	11788616
3	„	„ = 0,243 „	$\frac{L}{102{,}4}$	$\frac{L}{2.102{,}4}$	122832 „	12577997
4	„	„ = 0,419 „	$\frac{L}{90{,}8}$	$\frac{L}{2.90{,}8}$	102528 „	9309542
5	„	„ = 0,554 „	$\frac{L}{98{,}9}$	$\frac{L}{2.98{,}9}$	100944 „	9983362
6	Gemeiner Draht	„ = 0,667 „	$\frac{L}{88{,}6}$	$\frac{L}{2.88{,}6}$	92880 „	8229168
7	„	„ = 0,843 „	$\frac{L}{161{,}3}$	$\frac{L}{2.161{,}3}$	68112 „	10986466
8	Stählerne Uhrfeder	Querschnitt = 0,1927 Qd. Lin.	$\frac{L}{45{,}4}$	$\frac{L}{2.45{,}4}$	233208 „	10587643
9	„	„ = 0,3 „	$\frac{L}{47}$	$\frac{L}{2.47}$	172800 „	8121600

Aus dieser Tabelle ergeben sich folgende Betrachtungen:

I. Die Drähte, deren Durchmesser klein sind, haben nicht nur ein grösseres Kraftvermögen um Lasten zu tragen, sondern auch einen grössern Spielraum für ihre Elasticität. Wenn nämlich von feinern oder stärkern Drähten so viele zusammen genommen werden, dass ihre Querschnittsflächen einen Quadratzoll oder ein anderes gleiches Flächenmaass ausmachen, so tragen die feinern Drähte nicht nur eine grössere Last, sondern sie werden auch von dieser Last mehr ausgedehnt, und nach abgenommener Last treten sie auf einen grössern Spielraum zurück. So beträgt das Kraftvermögen eines Quadratzolles von dem zweiten Clavierdrahte, dessen Durchmesser $= 0{,}205$ Linien war, 138040 ℔, und das Kraftvermögen eines Quadratzolles vom gemeinen Drahte mit dem Durchmesser $0{,}343$ Linien war 68112 ℔, oder nur die Hälfte des erstern. Dagegen war die Ausdehnung und das Zurückgehen bei dem ersten Clavierdrahte mit dem Durchmesser $0{,}205$ Linien $= \frac{L}{2 . 85{,}4} = \frac{L}{170{,}8}$ und die Ausdehnung bei dem gemeinen Drahte mit dem Durchmesser $0{,}343$ Linien war $= \frac{L}{2 . 161{,}3} = \frac{L}{322{,}6}$, also nur beiläufig die Hälfte von der vorigen.

Da die Gleichung $p = \frac{e . n . F}{m . L}$ zeigt, dass das Tragungsvermögen mit Rücksicht auf die Ausdehnung oder den Spielraum der Stäbe und Ketten von dem Verhältnisse $\frac{n}{m}$ abhängt, und die letzte Rubrik der vorstehenden Tabelle zeigt, dass dieses Verhältniss bei allen Drahtgattungen beinahe gleich ist, so erscheint es gleichgültig, eine Drahtbrücke aus feinern oder stärkern Drähten zu erbauen, weil die höhern Drahtnummern zwar ein grösseres Tragungsvermögen besitzen als die stärkern Drahtsorten, jedoch die erstern sich wieder mehr als die letztern ausdehnen.

II. Stählerne Uhrfedern haben ein bei weitem grösseres Tragungsvermögen als eiserne Drähte, allein die dabei statt findende Ausdehnung oder der freie Spielraum derselben ist beinahe in gleichem Verhältnisse grösser. Bei der Uhrfeder Nro. 8 war nämlich die Ausdehnung beiläufig der 2.45[te] Theil ihrer Länge, also das 3 bis 4fache, wie bei gemeinen Drähten. Wir sehen hieraus, dass der Gebrauch des Stahles zu Kettenbrücken zwar den Vortheil zu gewähren scheint, dass die Ketten, weil der Stahl ein grösseres Tragungsvermögen besitzt, auch einen kleinern Querschnitt und daher ein kleineres Gewicht zum Tragen derselben Last benöthigen; dagegen entsteht hiebei der wesentliche Nachtheil, dass diese Ketten einen grössern elastischen Spielraum haben, demnach 3 bis 4mal grössern Schwingungen unterworfen seyn werden, als es bei Ketten von Stabeisen oder gemeinem Drahte der Fall ist. Da überhaupt das Verhältniss $\frac{n}{m}$ nach den obigen Versuchen bei Stahl und Eisen beinahe gleich ist, so gewährt eine Stahlbrücke, wenn man nicht bloss das Tragungsvermögen, sondern auch ihre Senkung und ihre Schwingung bei zufälligen Belastungen berücksichtiget, keinen Vortheil vor einer Draht- oder Stabeisenbrücke. Inzwischen müssen über diesen Gegenstand noch mehrere Versuche angestellt werden, und wenn es sich bewähren sollte, dass die Verhältnisse $\frac{n}{m}$ bei Draht, Stabeisen und Stahl einander gleich bleiben, so wird es in Hinsicht des absoluten Kraftvermögens gleichgültig seyn, eine Brücke von Draht, Stabeisen oder Stahl herzustellen. In allen

drei Fällen wird nämlich die Querschnittsfläche der Ketten F einen gleichen Werth erhalten, wenn in der Gleichung $p = \frac{e.n.F}{m.L}$ die Belastung p, die Länge L und die zulässige Ausdehnung oder der Spielraum der Brücke e gleich bleiben sollen. Da nun unter diesen 3 Materialien das Stabeisen um einen geringern Preis als Draht und Stahl zu haben ist, so sieht man, dass Kettenbrücken von Stabeisen sowohl den Draht- als Stahlbrücken vorzuziehen seyn werden.

III. Ist hier noch zu bemerken, dass, wenn man die Ausdehnung einer Kette zur Bestimmung des Einsinkens in der Mitte des Kettenbogens berücksichtiget, man hiebei nicht bloss die Länge des Bogens, an welchem die Brückenbahn hängt, sondern jederzeit die ganze Länge der Kette von einem Uferbefestigungspunkte bis zum andern annehmen müsse, weil die horizontale Spannung der Kette durchaus gleich gross ist. Man muss daher auch in die Proportion §. 271, wodurch das Einsinken in der Mitte oder die Oscillationen der Brücke bestimmt werden, diese ganze Länge setzen. Da nun gewöhnlich die Länge der Ketten von ihrer Verankerung bis zum Pfeiler beinahe eben so viel, als von dem Pfeiler bis zur Mitte der Brückenbahn beträgt, wie diess bei der Menai- und Hammersmithbrücke in England der Fall ist, so ergibt sich, dass die Spielungen der erstern nicht 18 Zoll (nach §. 271), sondern 2mal 18 = 36 Zoll = 3 Fuss betragen werden.

IV. Das Eisen erleidet auch noch von der Wärme und Kälte eine Ausdehnung und Verkürzung. Die Ausdehnung des Eisens beträgt vom Gefrierpunkte bis zum Siedepunkte oder von 0 bis 80 Grad Reaumur $\frac{872}{100000}$ Theile seiner Länge. In unserem Klima beträgt die jährliche Aenderung der Wärme beiläufig 50° Reaumur; also beträgt die grösste Aenderung durch die Wärme $\frac{5}{8}$tel der obern oder $\frac{109}{20000} = \frac{1}{183}$ beinahe. Diess macht beiläufig eben so viel aus, als die Ausdehnung durch die grösste Belastung der Brücke; es wird daher das Einsinken der Kettenbrücke (der sogenannte Pfeil) um eben so viel grösser. Man sieht übrigens, dass, wenn auch eine Kettenbrücke bei der mittlern Temperatur aufgestellt wird, dennoch der Unterschied vom Winter zum Sommer sich in ihrer Senkung zeigen werde.

V. Das Eisen nimmt in der Sonne an heissen Tagen 16 bis 20 Grad mehr Wärme an, als die atmosphärische Luft und die übrigen Körper, wodurch also eine weitere Ausdehnung von $\frac{16}{80} \cdot \frac{872}{100000} = \frac{1}{573}$ erfolgt. Um diese letztere zu verhindern, wurden die neuern Kettenbrücken in England, wie z. B. jene bei Hammersmith nicht schwarz, sondern mit weisser Oehlfarbe sorgfältig angestrichen, und dieser Anstrich von Zeit zu Zeit erneuert. Die Zweckmässigkeit dieser Maassregel leuchtet von selbst ein.

§. 275.

Da die angeführten Versuche über die absolute Festigkeit des Eisens so verschiedene Resultate geben, dass es unmöglich wird, ein allgemeines Maass hierüber festzusetzen, so wollen wir wenigstens ein beiläufiges Maass bestimmen. Nach *Musschen-*

broek (pag. 254) trägt eine Stange von deutschem geschmiedetem Eisen, deren Querschnitt ein N. Oe. Quadrat-Zoll ist 604 N. Oe. Ztr.
Nach *Soufflot* und *Rondelet* trägt eine Stange von demselben Maasse . 580 „ „
Nach *Telford* und *Brown* aber 541 „ „
Das Mittel hievon ist . 575 N. Oe. Ztr.

Da nun ein Kubik-Zoll Eisen ¼ ℔, folglich eine Stange von einer Klafter Länge und einem Quadrat-Zolle Querschnitt 18 ℔ wiegt, so werden diese 18 ℔ von 575 Zentnern, folglich ein Pfund von derselben Länge von 32 Zentnern oder 3200 ℔ zerrissen.

Wollte man sonach einer aus dem besten Eisen verfertigten Kette nur die Hälfte dieser Last oder 1600 ℔ anvertrauen, so wäre diess beiläufig fünfmal grösser als die Annahme §. 248, wo das Kraftvermögen einer Klafter-Kette, die 1 ℔ wiegt, nur zu 300 ℔ angeschlagen wurde. Aber auch hierauf glaubt man nicht einrathen zu dürfen, weil erstens eine jede Kette wegen der in einander geschlungenen Form ihrer Glieder mehr wiegt, als ein gleich ausgeschmiedeter Stab; weil man sich zweitens von der vollkommen gleichen Beschaffenheit des Eisens in allen Gliedern nicht beruhigend überzeugen kann; drittens, weil bei allen angeführten Versuchen die verschiedene Temperatur, welcher die Ketten ausgesetzt werden, noch nicht in Betrachtung gezogen wurde; endlich viertens, weil die Ketten bei ihrem Gebrauche als Bergseile noch bei verschiedenen Gelegenheiten mehr zu tragen im Stande seyn müssen, als bei dem ersten Anschlage für dieselben gewöhnlich angenommen wird.

Aus diesen Gründen dürfte von den, oben für Eisenstäbe gefundenen 3200 ℔ nicht mehr als ein Fünftel oder ein Sechstel anzunehmen seyn, demnach einer Klafter Kette, die 1 ℔ wiegt, nur 600 bis 500 ℔ zu tragen gegeben werden, welches übrigens der Beurtheilung der angestellten Maschinenmeister an jedem Orte überlassen, und nach dem Resultate der vorher mit jeder Kette vorzunehmenden Probe beurtheilt werden muss.

Im allgemeinen ist hier noch zu bemerken, dass über die Festigkeit der Ketten noch mehrere Erfahrungen zu Rathe zu ziehen seyn werden, welche die Einführung und der allgemeinere Gebrauch der Ketten statt der Seile verlässlicher an die Hand geben wird, als es bisher noch der Fall seyn kann.

§. 276.

Am Schlusse dieser Abhandlung ist noch zu bemerken, dass man sich in keinem Falle nach den Erfahrungen, die über das Eisen in andern Ländern gemacht wurden, richten könne, sondern an jedem Orte alle Stäbe, welche man anwenden will, erst einer Probe sowohl hinsichtlich der Festigkeit als der Ausdehnung unterwerfen müsse. Diess betrifft selbst den Fall, wo ein Eisen von der besten Qualität verwendet wird. Die Ursachen hievon liegen in folgenden Umständen:

a) Die verschiedene Beschaffenheit der Erze, aus welchen das Eisen geschmolzen wird, und die zu grosse Verwandtschaft dieses Metalles zum Kohlenstoffe, zu andern Metallen und zu einfachen nicht metallischen Stoffen, mit welchen dasselbe in den Erzen angetroffen wird, ist die Ursache, dass es nie vollkommen rein dar-

gestellt werden kann, sondern immer mit einem Antheile des einen oder andern gemischt erscheint. Man hat in dieser Hinsicht schon seit längerer Zeit das rothbrüchige Eisen von dem kaltbrüchigen unterschieden, und durch genaue chemische Analysen in dem ersten Schwefel, und in dem zweiten Phosphor vorgefunden. Es gibt aber noch sehr viele andere Metalle, die das Eisen verunreinigen, als: *Silicium*, *Calcium*, *Aluminium*, *Titan*, *Chrom* u. dgl. m.

b) Der dreifache Zustand, in welchem das Eisen aus den Erzen dargestellt und zum Gebrauche verarbeitet wird, ist hauptsächlich Ursache, dass selten ein Stab von ganz gleichförmigem Eisen angetroffen wird, und wenn zwei Stäbe aus derselben Hütte an mehreren Stellen gebrochen werden, so findet man aller Orten sehr auffallende Verschiedenheiten im Korne und in der Textur, wodurch sich die rohen, stahlartigen und faserigen Eisentheile unterscheiden, und dem Auge bemerklich machen.

c) Der Einfluss, den die sorgfältigere Bearbeitung des Eisens durch wiederholtes Ausglühen, Schweissen und Strecken durch Hammer- und Walzwerke auf seine Qualität und Festigkeit hat, ist allgemein bekannt. Bei den meisten Versuchen hat das zu Draht gezogene Eisen nach Maassgabe der Feinheit des Drahtes eine grössere Festigkeit gezeigt, wovon die Ursache wohl darin liegt, dass die Eisentheile von minderer Qualität bei der Operation des Drahtziehens bereits zerrissen wurden, demnach nur das beste und gleichartigste Eisen übrig blieb. In Böhmen wird dasjenige Eisen für das beste gehalten, welches aus Blechabschnitten, alten Nägeln u. dgl. m. in hiezu eigends eingerichteten Hammerwerken bereitet wird. In England wird dasselbe Eisen durch Walzen bearbeitet, und wegen seiner vorzüglichen Qualität unter dem Namen: „*Scrap Iron*“ zu den höchsten Preisen verkauft. Zu den neuesten englischen Kettenbrücken wurde das Eisen nach hierüber erhaltenen Nachrichten auf eine Art bearbeitet, welche der bekannten Raffinirung des Stahles ähnlich ist. Es wurde nämlich das nach der *Puddlings* Methode gefrischte Eisen vorläufig zu dünnen Eisenplatten gewalzt, diese in schwache Stäbe zerschnitten, in Bündel gebunden, abermals zusammengeschweisst und wieder gewalzt; nachdem aber diese Operation zweimal wiederholt worden, sind erst die Kettenstäbe nach den verlangten Maassen hieraus verfertigt worden.

§. 277.

Der Umstand, dass diese Methode für die meisten Eisenwerke in Deutschland bei dem Gebrauche der Holzkohlen zu kostbar, und für den gewöhnlichen Gebrauch des Eisens überflüssig seyn dürfte, übrigens aber auch von keinem Eisenwerke für alle Fehler, die sich bei der Bearbeitung des Eisens ergeben können, gut gestanden werden kann, macht es begreiflich, dass die vollkommene Sicherheit hinsichtlich der Qualität und nöthigen Festigkeit des Eisens nur dadurch erzielt werden kann, indem man dasselbe vorhin mit einer grössern Last beschwert, als es bei dem nachherigen Gebrauche zu tragen erhält. Dadurch wird nicht nur dem Bruche vorgebeugt, sondern auch noch die Eigenschaft des Eisens erzielt, dass durch die nachherige geringere Belastung die Gränze seiner Elasticität nicht mehr überschritten wird, sonach das Eisen nach abgenommenem

Gewichte zu seiner vorigen Länge wieder zurückkehrt. Diese Vorsicht ist für Kettenbrücken um so wichtiger, als durch den Bruch eines einzigen mangelhaften Gliedes die grössten Nachtheile und der Einsturz des ganzen Bauwerkes herbeigeführt werden kann.

§. 278.

Nebst den über die absolute Festigkeit des Eisens und Stahles angestellten Versuchen findet man in den physikalischen Werken die Bestimmungen über die absolute Festigkeit vieler anderer Körper. *Musschenbroek* führt hierüber in der S. 253 bereits genannten: *Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum*, *Viennae* 1756, *pag.* 63 folgende Versuche mit Hölzern und Metallen an. Die Länge der untersuchten Holzstücke betrug 6 Zoll.

Nro. des Versuches.	Materie des Körpers, welcher zerrissen wurde.	Durchmesser, oder Seite des Querschnittes.	Beobachtetes Gewicht, wovon der Körper zerriss.	Berechnetes Gewicht, wovon der Querschnitt eines N.Oe. Qd. Zolles zerrissen wird.
		Rheinländischer Zoll.	Amsterd. ℔	N. Oe. ℔.
1	Lindenholz	Durchmesser = 0,27	720	11230
2	detto	Quadrat Seite = 0,27	1000	12250
3	Erlenholz	Durchmesser = 0,27	800	12478
4	detto	Quadrat Seite = 0,27	1000	12250
5	Kiefernholz	Durchmesser = 0,27	800	12478
6	Weiss - Tanne . . .	Durchmesser = 0,27	650	10139
7	detto	Quadrat Seite = 0,27	600	7350
8	Eichenholz	Durchmesser = 0,27	1150	17937
9	detto	Quadrat Seite = 0,27	1150	14088
10	Ulmenholz	Durchmesser = 0,26	850	14298
11	detto	Quadrat Seite = 0,27	950	11638
12	Olivenholz	Durchmesser = 0,27	650	10139
13	detto	Quadrat Seite = 0,26	850	11229
14	Buchenholz	Durchmesser = 0,26	1150	19344
15	detto	Quadrat Seite = 0,26	1250	16514
16	Buchsbaumholz . . .	Durchmesser = 0,26	850	14298
17	detto	Quadrat Seite = 0,26	950	12550
18	Birnbaumholz . . .	Durchmesser = 0,24	450	8883
19	detto	Quadrat Seite = 0,25	700	10002
20	Nussbaumholz . . .	Durchmesser = 0,26	800	13457
21	detto	Quadrat Seite = 0,26	800	10569
22	Weidenholz	Durchmesser = 0,26	1000	16821
23	detto	Quadrat Seite = 0,26	900	11890
24	Eschenholz	Durchmesser = 0,26	1050	17662
25	detto	Quadrat Seite = 0,25	1250	17861
26	Roth - Tannenholz . .	Durchmesser = 0,26	550	9251
27	detto	Quadrat Seite = 0,26	850	11229

Nro. des Versuches.	Materie des Körpers, welcher zerrissen wurde.	Durchmesser, oder Seite des Querschnittes.	Beobachtetes Gewicht, wovon der Körper zerriss.	Berechnetes Gewicht, wovon der Querschnitt eines N.Oe. Qd. Zolles zerrissen wird.
		Rheinländischer Zoll.	Amsterd. ℔	N. Oe. ℔.
28	Pflaumbaumholz . . .	Durchmesser = 0,25	600	10916
29	detto	Quadrat Seite = 0,25	550	7859
30	Apfelbaumholz . . .	Durchmesser = 0,25	500	9097
31	detto	Quadrat Seite = 0,25	550	7859
32	Zuckerkistenholz . . .	Durchmesser = 0,25	700	12735
33	detto	Quadrat Seite = 0,26	1500	19816
34	Mispelbaumholz . . .	Quadrat Seite = 0,26	650	8587
35	detto	Durchmesser = 0,26	700	11774
36	Guajakholz (*lignum sanctum*)	Quadrat Seite = 0,25	855	12217
37	Schwarz - Kirschenholz .	Durchmesser = 0,25	950	17284
38	detto . . .	Quadrat Seite = 0,25	400	5716
39	Weiss - Dornholz . . .	Durchmesser = 0,25	1000	18193
40	detto	Quadrat Seite = 0,25	900	12860
41	Wildes Kirschbaumholz .	Durchmesser = 0,25	650	11826
42	Amerikanis. Holz (*caro equina*)	Quadrat Seite = 0,25	1300	18576
43	Sakkerdanholz . . .	Quadrat Seite = 0,25	1350	19290
44	Granadillenholz . . .	Durchmesser = 0,25	950	17284
45	detto	Quadrat Seite = 0,25	800	11431
46	Rothes Santelbaumholz .	Quadrat Seite = 0,25	600	8573
47	Ebenholz	Quadrat Seite = 0,25	800	11431
48	Kupferdraht roth schwedischer	Durchmesser = 0,10	299¼	34027
49	Messingdraht . . .	Durchmesser = 0,10	360	40935
50	Golddraht, Pistolettengold .	Durchmesser = 0,10	500	56854
51	Bleidraht	Durchmesser = 0,10	29¼	3326
52	Zinndraht, reinstes Zinn .	Durchmesser = 0,10	49¼	5600
53	Silberdraht	Durchmesser = 0,10	370	42072
54	Weisses Glas . . .	Durchmesser = 0,23	118	2536
55	detto	Durchmesser = 0,25	150	2729

Noch andere Versuche sind in der *Introductio ad philosophiam naturalem* von *Musschenbroek* enthalten, welche wir jedoch der Weitläufigkeit wegen übergehen.

§. 279.

Herr Prof. *Barlow* in England hat ebenfalls mehrere Versuche über die absolute Festigkeit verschiedener Holzarten angestellt; er verwendete hiezu Holzstücke, die aus schönen und von allen Aesten freien Pfosten, in einer Länge von 6 englischen Zollen 1½ Zoll im Gevierten ausgeschnitten, dann aber in der Mitte bis auf einen kleinen Cylinder von ⅓ oder ¼ Zoll Durchmesser eingedreht wurden. Die Resultate dieser Versuche enthält nachstehende Tabelle:

Versuche über die absolute Festigkeit verschiedener Holzgattungen vom Professor *Barlow* in England.

Nro. des Versuches.	Benennung der Holzgattungen.	Spezifisches Gewicht.	Umfang des Cylinders.	Zerreissendes Gewicht	Reduzirtes Gewicht auf einen engl. Quadratzoll.	Reduzirtes Gewicht auf einen N. Oe. Quadratzoll.	Mittelwerth für die absolute Festigkeit.
			engl. Zolle.	engl. Pfd.	engl. Pfunde.	N. Oe. Pfunde.	N.Oe.Pfunde.
1	Tannen	0,600	1,05	1140	12994	11320	
2	do.	0,600	1,10	1260	13086	11400	
3	do.	0,600	1,10	1191	12369	10775	11248
4	do.	0,600	1,05	1160	13222	11518	
5	do.	0,600	1,11	1213	12372	10778	
6	do.	0,600	1,05	1180	13450	11717	
7	do.	0,581	1,10	1059	10998	9581	
8	do.	0,564	1,10	1201	12473	10866	
9	do.	0,601	1,10	1094	11362	9898	10061
10	do.	0,611	1,10	1130	11736	10224	
11	do.	0,532	1,10	1076	11175	9735	
12	do.	0,590	1,10	1112	11549	10061	
13	Eschen	0,594	0,8800	1100	17850	15550	
14	do.	0,611	0,9000	1096	17003	14812	15001
15	do.	0,611	0,8750	1024	16807	14642	
16	do.	0,600	0,8375	881	15784	13750	
17	do.	0,600	0,8625	1025	17315	15084	14764
18	do.	0,600	0,8750	1081	17743	15457	
19	Buchen	0,712	0,880	716	11619	10122	
20	do.	0,694	0,890	721	11438	9964	9989
21	do.	0,700	0,900	731	11341	9880	
22	Eichen	0,770	1,10	856	8890	7745	
23	do.	0,770	1,10	887	9212	8025	7995
24	do.	0,770	1,10	908	9430	8215	
25	do.	0,920	0,8500	740	12008	10461	
26	do.	9,920	0,8750	712	11686	10180	10096
27	do.	0,920	0,8900	698	11073	9646	
28	*Teak*	0,860	0,8625	868	14663	12774	
29	do.	0,860	0,8625	900	15203	13244	13146
30	do.	0,860	0,8625	912	15406	13421	
31	Buchsbaum	0,960	0,8625	1168	19730	17188	
32	do.	0,960	0,8625	1160	19595	17070	17306
33	do.	1,024	0,8625	1200	20271	17659	
34	Birnbaum	0,646	0,8625	683	11538	10051	
35	do.	0,646	0,8500	523	9096	7924	8557
36	do.	0,646	0,8625	523	8835	7697	
37	Mahagony	0,637	1,1125	783	7950	6926	
38	do.	0,637	1,1125	783	7950	6926	7005
39	do.	0,637	1,1125	810	8224	7164	

In der vorstehenden Tabelle ist das spezifische Gewicht des reinen Wassers = 1,000 gesetzt, und hiernach die spezifische Schwere in der dritten Kolumne angegeben worden.

Wenn man nach diesen Versuchen des Professor *Barlow* die absolute Festigkeit der von ihm geprüften Holzgattungen in den nächsten runden Zahlen ausdrücken will, so gibt diess:

Bei	Buchsbaumholz	für den Querschnitt	eines	N.	Oe.	Quadrat-Zolles	17300	N. Oe. ℔.
,,	Eschenholz	,,	,,	,,	,,	,,	14900	,,
,,	*Teak*	,,	,,	,,	,,	,,	13100	,,
,,	Tannenholz	,,	,,	,,	,,	,,	10700	,,
,,	Buchenholz	,,	,,	,,	,,	,,	10000	,,
,,	Eichen	,,	,,	,,	,,	,,	9000	,,
,,	Birnbaum	,,	,,	,,	,,	,,	8600	,,
,,	Mahagony	,,	,,	,,	,,	,,	7000	,,

Unter *Teak* wird hier eine Holzgattung verstanden, welcher man sich in Ostindien mit grossem Vortheile zum Baue der Seeschiffe bedient, indem die letztern eine weit längere Dauer, als es bei Schiffen von Europäischem Bauholze der Fall ist, haben.

§. 280.

Die Versuche, welche Herr *J. A. Eytelwein* über die absolute Festigkeit unserer einheimischen, bei dem Bauwesen vorkommenden Holzarten anstellte, sind in dessen bereits erwähntem Handbuche der Statik fester Körper enthalten.

Fig. 9 bis 11. Tab. 14. Die untersuchten Holzstücke waren sämmtlich 2 Jahre vorher gefällt, trocken aufbewahrt worden, und man konnte dabei weder Aeste, noch sonst einen Tadel auffinden; sie hatten die Gestalt Fig. 9; der mittlere Theil C D war 6 Berliner Zoll lang und hatte einen Querschnitt von $\frac{1}{2}$ Zoll im Quadrate, folglich eine Durchschnittsfläche von $\frac{1}{4}$ Quadrat Zoll. Die Holzstücke wurden so bearbeitet, dass die Fasern so viel als möglich parallel mit den Seitenflächen des Holzes gingen. Zur Fassung dieser Holzstücke gebrauchte man zwei gleiche $2\frac{3}{4}$ Zoll lange, 2 Zoll breite und $\frac{4}{6}$ Zoll dicke eiserne Schlösser (Fig. 10), in welchen eine konische Oeffnung angebracht war, die unten ebenfalls $\frac{1}{2}$ Zoll im Quadrate hatte. In diese Schlösser wurden die Holzstücke, welche genau in die Oeffnungen passten, eingeschoben, sodann das Einsatzstück E in das Schloss eingelegt und durch zwei eiserne Bolzen F, F befestigt. Nunmehr wurden die zwei, an dem Ende der zu prüfenden Holzstücke angebrachten Schlösser in die Haken H und K, wie Fig. 11 zeigt, eingehängt, und das Laufgewicht auf der Schnellwage so weit verschoben, bis das Holzstück C D (Fig. 9) zerriss. Die Verschiebung erfolgte mit aller Vorsicht und man liess jedesmal das Holzstück durch einige Zeit stehen, ehe das Laufgewicht weiter gerückt wurde. Aus der Verschiebung des Laufgewichtes wurde nun das Gewicht berechnet, welches die absolute Festigkeit der probierten Holzgattungen ausdrückt, und in nachstehender Tabelle angezeigt ist:

Nro. des Versuches.	Holzarten.	Eigenthümliches Gewicht dieser Holzarten.	Gewicht zum Zerreissen.	Mittelwerth des vorigen Gewichtes.	Berechnetes Gewicht, um 1 N. Oe. Qd. Zoll zu zerreissen.
			Berliner ℔.	Berliner ℔.	N. Oe. ℔.
1	Kiefer, (*Pinus sylvestris*), vom Kern	0,623	5540	5350	18126
2	,, — — ,, ,,		5160		
3	,, — — vom Kern, harzig	0,624	4040	4040	13688
4	,, zwischen Kern und Splint . . .	0,612	5100	5170	17516
5	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5240		
6	,, ,, ,, ,, ,, . . .	0,565	5510	5455	18482
7	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5400		
8	,, ,, ,, ,, ,, . . .	0,604	4680	5030	17042
9	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5380		
10	,, ,, ,, sehr harzig . .	0,657	2900	3130	10605
11	,, ,, ,, ,, ,, . . .		3360		
12	,, vom Splint	0,554	4400	4580	15517
13	,, ,, ,, ...		4760		
14	Sommereiche (*Quercus foemina*) vom Kern	0,795	7020	6650	22531
15	,, ,, ,, ,, ,,		6280		
16	,, zwischen Kern und Splint . . .	0,685	4740	4600	15585
17	,, ,, ,, ,, ,, . . .		4460		
18	,, ,, ,, ,, ,, . . .	0,618	6900	6370	21582
19	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5840		
20	,, vom Splint	0,616	3420	3690	12502
21	,, ,, ,, ...		3960		
22	Steineiche (*Quercus robur*) zwischen Kern und Splint	0,747	5640	5530	18736
23	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5420		
24	Rothtanne (Fichte, *Pinus picea*) zwischen Kern und Splint	0,374	2700	2730	9249
25	,, ,, ,, ,, ,, . . .		2760		
26	Weisstanne (*Pinus abies*), zwischen Kern und Splint	0,421	3860	3850	13044
27	,, ,, ,, ,, ,, . . .		3840		
28	Weissbuche, Hornbaum (*Carpinus betulus*) zwischen Kern und Splint . .	0,765	5240	5100	17279
29	,, ,, ,, ,, ,, . . .		4960		
30	Buche, Rothbuche (*Fagus sylvatica*) zwischen Kern und Splint . . .	0,762	5500	5590	18939
31	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5680		
32	Erle (*Betula alnus*), zwischen Kern und Splint	0,656	6400	6185	20955
33	,, ,, ,, ,, ,, . . .		5970		

Bei der Berechnung der letzten Rubrik in der vorstehenden Tabelle ist 1 Berliner Zoll = 0,993 Nied. Oe. Zoll und 1 Berliner Pfund = 0,8352 Nied. Oe. Pfund angenommen worden.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, wie man bei der Betrachtung der Tabelle sieht, dass bei gesunden Stämmen das Kernholz die grösste und der Splint die kleinste absolute Festigkeit besitze, ferner dass die Festigkeit des sehr harzigen Kiefernholzes geringer, als jene sey, wenn dieses Holz weniger Harz enthält.

§. 281.

Die Versuche, welche wir §. 258 bis §. 263 von Eisendrähten und stählernen Uhrfedern angeführt, und nachher durch allgemeine Gründe über die Gesetze der Festigkeit des Eisens überhaupt beleuchtet haben, würden auch noch bei andern Metallen anzustellen seyn und es unterliegt keinem Zweifel, dass sie auch ähnliche Resultate liefern würden. Eben so dürften auch gleiche Versuche über das Holz ähnliche Resultate geben, indem es bekannt ist, dass alle Körper sich ausdehnen lassen, und nach einer starken Belastung nicht ganz wieder zu ihrer vorigen Länge zurückkehren.

Da man jedoch unter den Metallen vorzüglich nur das Eisen hinsichtlich seiner Festigkeit benützt, bei Holz aber selten so lange Stücke vorkommen, wobei die Ausdehnung eine Rücksicht verdienen könnte, so glaubt man, dass das bisher Angeführte hinreichen dürfte, um die vorkommenden Aufgaben über die absolute Festigkeit mit hinlänglicher Sicherheit aufzulösen.

Als ein Beispiel dieser Art wollen wir noch folgenden Fall berechnen:

Eine Hängsäule von Fichtenholz bei einer Brücke oder einem Dachstuhle habe eine Last von 200 Ct. zu tragen, wie gross soll der Querschnitt derselben seyn?

Da das Tragungsvermögen von Fichtenholz nach den Versuchen Seite 289 beiläufig 9000 ℔ für den Nied. Oe. Quadrat Zoll beträgt, wir jedoch der Sicherheit wegen bloss ein Zehntel hievon anschlagen wollen, so ergibt sich der Querschnitt der Hängsäule aus der Proportion;

$1 \square'' : 9$ Ctr. $= f \square'' : 200$ Ctr., woraus $f = 22\frac{2}{9}$ Quad. Zoll. Unter dieser Fläche ist jedoch der kleinste Querschnitt zu verstehen, welcher der Säule nach ihrer Verschneidung übrig gelassen werden muss.

B. Relative Festigkeit der Körper.

§. 282.

Wird ein Balken in einer horizontalen Lage an dem einen Ende A C festgehalten (z. B. eingemauert) und am andern Ende B mit einem Gewichte belastet, so wird seine relative oder respektive Festigkeit in Anspruch genommen, weil die Cohaesion der Theile nur nach der Richtung A G des Balkens widersteht, während das angebrachte Gewicht nach der Richtung der Schwere wirkt, und beide also mitsammen einen Winkel bilden. Fig. 12. Tab. 14.

Alle Körper sind mehr oder weniger einer Ausdehnung und Zusammendrückung fähig, daher biegen sich dieselben, bevor sie brechen; es werden nämlich die cohaerirenden Fäden durch die Wirkung des angebrachten Gewichtes oben ausgedehnt und unten zusammengedrückt.

Bei der absoluten Festigkeit wirkt die Belastung in allen Querschnitten auf alle einzelnen cohaerirenden Theile gleich stark; bei der relativen Festigkeit dagegen werden die obersten Theilchen in F (Fig. 14) am meisten, und jede der Höhe nach tiefer liegenden in a, b.... weniger gespannt, bis endlich in einem Punkte T gar keine Spannung mehr statt findet. Von diesem Punkte T an werden die unterhalb liegenden Theilchen zusammengedrückt, und zwar um so mehr, je weiter sie von dem Punkte T abwärts liegen, am tiefsten Punkte E endlich ist die Zusammendrückung am grössten. Fig. 14.

Aus dieser ungleichen Ausdehnung der Cohaesionsfäden erhellet zugleich, dass, wenn die obersten am meisten gespannten Fäden reissen, der ganze Balken auch brechen muss; denn wenn alle Fäden den Bruch nicht hindern konnten, so wird die übrige geringere Zahl ihn noch weniger verhindern.

§. 283.

Um bei der Aufstellung der Gesetze für die respektive Festigkeit von dem Einfachsten zu dem Zusammengesetztern vorzuschreiten, wollen wir vorerst auf die Zusammendrückbarkeit der Materie keine Rücksicht nehmen, und bei den betrachteten Körpern bloss eine Ausdehnungsfähigkeit voraussetzen.

Die beiden bei A und a eingemauerten gleichartigen Balken A B und a b Fig. 12 sollen durch die Gewichte Q und q in B und b beschwert, in gleiche Spannungen versetzt, oder sich im Augenblicke des Bruches befinden. Fig. 12.

Wird der Balken A B durch das Gewicht Q gebogen, so wird bei irgend einem Theile des Balkens F E K J, wo vor der Belastung F K = E J war, wegen der Ausdehnung der obern Theilchen, F K grösser als E J werden. Wenn wir aus E zu J K die Parallele E D ziehen, so wird F D die auf die Länge F K bewirkte Ausdehnung des obersten Cohaesionsfadens seyn, und es müssen die Ausdehnungen aller tiefern Fäden dieses Stückes offenbar durch die Linien F E und D E begränzt seyn, weil der Körper A B eine feste Masse ist. Dasselbe gilt von dem zweiten Balken a b, die Grösse der Ausdehnungen der auf einander liegenden Fäden wird bei einem eben so langen Stücke f k = F K auf gleiche Art durch die Linien f e und d e begränzt und gemessen. Zur Erleichterung

37 *

Fig. 12. Tab. 14. der Betrachtungen wollen wir die Höhen F E = H und f e = h in eine beliebige aber gleiche Anzahl z. B. 100 Theile theilen, jede solche Schichte M O, m o in der Breite des Balkens ein Band nennen, und nach und nach die Spannungen dieser über einander liegenden Bänder, die den Balken bilden, mit einander vergleichen. — Nehmen wir an, das oberste Cohaesionsband bei A B müsse für die Länge E J um die Grösse F D ausgedehnt werden, um eine bestimmte Spannung zu erhalten, oder zu zerreissen; so muss auch bei dem Balken a b das oberste Cohaesionsband, um dieselbe Spannung zu erhalten, für dieselbe Länge e j (= E J) um eben so viel ausgedehnt werden, d. i. es muss f d = F D seyn, weil gleichartige und gleich lange materielle Fäden bei gleichen Spannungen nothwendig gleich viel sich ausdehnen müssen.

Betrachten wir nun die Bänder M P und m p, welche beide z. B. das 60te Band seyn sollen, so hat man offenbar für den grossen Balken
$FD : MN = FE : ME = 100 : 60$, und für den kleinern Balken
$fd : mn = fe : me = 100 : 60$.

Da in den beiden Proportionen die zweiten Verhältnisse gleich sind, so müssen es auch die ersten seyn, daher ist $FD : MN = fd : mn$.

Nun ist aber $FD = fd$, also auch $MN = mn$, d. h. diejenigen Bänder, welche von den Umdrehungspunkten E und e auf proportionalen Entfernungen EM und em liegen, sind gleichviel ausgedehnt; oder ihre Cohaesionsfäden haben eine gleiche Spannung.

Bezeichnen also S, s die Widerstandskräfte dieser Bänder, und B, b die Breiten der zwei Balken, so müssen sich die erstern nach §. 238 wie ihre Querschnittsflächen verhalten, d. i. es muss $S : s = MO \times B : mo \times b = \frac{H}{100} \times B : \frac{h}{100} \times b$ oder $S : s = B.H : b.h$ seyn (I).

Um diese Spannungen S und s zu erzeugen, muss offenbar von dem Gewichte Q oder q ein Theil X oder x hiezu verwendet werden. Soll nun unter den zusammengehörigen Kräften Gleichgewicht statt finden, so müssen, da sie an einem Winkelhebel M E G′ und m e g′, dessen Umdrehungspunkt E und e ist, wirken, die statischen Momente gleich seyn, d. i.

$$S.ME = X.G'E \text{ oder } S.\frac{60H}{100} = X.G'E \;\ldots\ldots\; (II),$$

$$\text{und } s.me = x.g'e \text{ oder } s.\frac{60h}{100} = x.g'e \;\ldots\ldots\; (III).$$

Diese Gleichungen geben zugleich zu erkennen, dass, da das Moment der Kraft X, also auch die Wirkung derselben mit dem Hebelsarme G′E wächst, der Balken dort die grösste Spannung erfährt, wo der Hebelsarm am grössten ist, d. i. also am Befestigungspunkte C, wo auch der Balken bricht. Da hier eine geringe Biegung angenommen wird, folglich die Hebelsarme C H und c h beinahe den Längen der Balken $L = CB$ und $l = cb$ gleich sind, so sind die Gleichungen (II) und (III)

$$S.\frac{60H}{100} = X.L \;\ldots\ldots\; (IV) \text{ und}$$

$$s.\frac{60h}{100} = x.l \;\ldots\ldots\; (V).$$

Die beiden Gleichungen (IV) und (V) in eine Proportion gebracht, geben Fig. 12. Tab. 14.

$$S \cdot \frac{60\,H}{100} : s \cdot \frac{60\,h}{100} = X \cdot L : x \cdot l \text{ oder}$$

$$S : s = \frac{X \cdot L}{H} : \frac{x \cdot l}{h} \;\ldots\ldots\; (VI).$$

Aus dem Vergleiche der Proportionen (I) und (VI) folgt

$$\frac{X \cdot L}{H} : \frac{x \cdot l}{h} = B \cdot H : b \cdot h \text{ oder}$$

$X : x = \frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l}$ d. h. die Gewichtstheile X und x, welche mit den Cohaesionskräften der einzelnen gleichnamigen Bänder im Gleichgewichte stehen, haben das constante Verhältniss $\frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l}$.

Setzen wir nun, auf dieses gestützt, für das 1te, 2te, 3te nte Band die zur Spannung und zum Gleichgewichte nöthigen Gewichtstheile für den Balken $AB = X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_n$, und eben so für den Balken $ab = x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, wo die Ziffern nur als unterscheidende Coeffizienten angehängt sind, so ist jedes der Verhältnisse der korrespondirenden Gewichtstheile $X_1 : x_1$, dann $X_2 : x_2$, ferner $X_3 : x_3 \ldots$ endlich $X_n : x_n$ dem constanten Verhältnisse $\frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l}$ gleich, also sind sie auch unter einander gleich. Addiren wir diese gleichen Verhältnisse, so ist auch

$X_1 + X_2 + X_3 \ldots + X_n : x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n = \frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l}$ oder weil alle X zusammen Q und alle x zusammen q geben, $Q : q = \frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l}$ d. h. die Gewichte, welche zwei gleichartige, an einem Ende eingemauerte Balken (ohne Rücksicht auf die Zusammendrückbarkeit der Theile) gleich stark spannen, oder abbrechen, verhalten sich wie die Produkte aus den Querschnittsflächen in die Höhen, und verkehrt wie die Längen der Balken.

§. 284.

Es ist merkwürdig, dass diese Proportion statt findet, wenn auch das Verhältniss, in welchem die Kräfte zu ihren Ausdehnungen stehen, nicht bekannt ist. Wir haben nämlich angenommen, dass die obern Ausdehnungen F D und f d bei gleichartigen Materien im Augenblicke des Bruches einander gleich sind und haben daraus erwiesen, dass, wenn die Punkte M und m auf proportionalen Höhen genommen werden, dann auch die Ausdehnungen M N und m n einander gleich seyn müssen. Ist aber das Letztere der Fall, so sind auch die Spannkräfte in denselben Punkten einander gleich, sie mögen nun in was immer für einem Verhältnisse zur Ausdehnung überhaupt stehen; dasselbe findet aber auch statt, wenn der Balken vom Bruche entfernt, jedoch nur die obern Ausdehnungen einander gleich sind, und die obigen Proportionen bleiben in jedem Falle dieselben. Fig. 12.

§. 285.

Aus der letzten Proportion folgt $Q = \frac{q \,.\, l}{b \,.\, h^2} \cdot \frac{B \,.\, H^2}{L}$. Um diese Gleichung für die Anwendung brauchbar zu machen, muss man die Grössen q, l, b und h vorläufig durch einen Versuch mit einem g l e i c h a r t i g e n Körper bestimmen. Nennen wir den Coeffizienten, welcher sich aus dem Versuche ergibt $\frac{q \,.\, l}{b \,.\, h^2} = \mu$, so erhalten wir die Gleichung $Q = \frac{\mu \,.\, B \,.\, H^2}{L}$ oder auch $\frac{\mu \,.\, F \,.\, H}{L}$, wenn wir die Querschnittsfläche B . H mit F bezeichnen.

Diese Gleichung zeigt, dass ein Balken eine um so grössere Last zu tragen im Stande sey, je grösser μ ist, d. i. je grösser durch einen Versuch die Cohaesionskraft der Materie gefunden wird; ferner wächst das Tragungsvermögen mit dem Querschnitte B . H, und zugleich mit der Höhe H, nimmt aber mit der Länge L des Balkens ab.

§. 286.

Für einen gegebenen Balken ist das Produkt F . H besonders merkwürdig; denn derselbe Balken hat in der Lage I (Fig. 13) das Tragungsvermögen $Q = \frac{\mu \,.\, F \,.\, A}{L}$, in der Lage II aber $Q' = \frac{\mu \,.\, F \,.\, D}{L}$, wenn A und D die Dimensionen der Querschnittsfläche F sind und einmal A, das anderemal D als Höhe angesehen wird. (Fig. 13. Tab. 14.)

Es ist also $Q : Q' = A : D$, d. h. das Tragungsvermögen eines und desselben Balkens, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, ist grösser oder kleiner, je nachdem man die grössere oder kleinere Seite zur Höhe nimmt, und steht mit diesen Höhen im geraden Verhältnisse. Z. B. ist $A = 2\,D$ und es wird A zur Höhe genommen, so ist das Tragungsvermögen zweimal so gross, als in dem Falle, wenn D die Höhe ist. Daraus folgt die wichtige Regel für das Bauwesen, d a s s m a n j e d e m z u m T r a g e n b e s t i m m t e n p a r a l l e l o p i p e d i s c h e n K ö r p e r u n g l e i c h e D i m e n s i o n e n z u s e i n e m Q u e r s c h n i t t e g e b e n, u n d d i e g r ö s s e r e D i m e n s i o n z u r H ö h e n e h m e n s o l l e.

§. 287.

Die eben aufgestellten Resultate für die Spannung oder den Bruch der Körper durch angehängte Gewichte gelten nur unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Körper bloss ausdehnbar und nicht auch zusammendrückbar ist. Alle Körper, die ausdehnbar sind, sind aber auch zusammendrückbar; wir wollen daher gegenwärtig auch auf die Zusammendrückbarkeit der Theile mit Rücksicht nehmen, und das Tragungsvermögen eines Balkens unter der Voraussetzung suchen, dass seine obern Theile ausgedehnt, seine untern zusammengedrückt seyen, und daher in irgend einem Punkte der Höhe ein Cohaesionsband liege, welches weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird.

Fig. 14. Es sey bei dem Balken A B (Fig. 14.), der durch das Gewicht Q gebogen wurde, die Linie O P in irgend einem Punkte O der Höhe derjenige Cohaesionsfaden der weder ausgedehnt, noch zusammengedrückt wird; die überliegenden Bänder werden aus-

gedehnt, die unterliegenden zusammengedrückt. Für die Ausdehnung und Zusammendrückung müssen hier dieselben Gesetze, wie jene §. 283 auseinandergesetzten statt finden; es werden hier, wie es dort der Fall war, die auf gleiche Art wie Fig. 12 bestimmten Geraden F D und E U die Längenänderungen (Ausdehnungen und Zusammendrückungen) der auf einander liegenden Bänder begränzen und ihre Grösse bestimmen. Fig. 14. Tab. 14.

Vergleichen wir den obern Theil A O P G dieses Balkens mit dem Falle in Fig. 12, so finden sich dieselben Umstände; es wird also die Summe der Spannungsmomente von A O P G, wenn wir $A O = h$, $O P = C B = L$ und die Breite des Balkens $= B$ setzen, durch den ähnlichen Ausdruck, wie §. 283 nämlich durch $\mu . B . h^2$.. (I) vorgestellt, wo μ der entsprechende Cohaesionskoeffizient ist. Betrachten wir nun den untern Theil O C B P, so widersteht der Körper durch seine abstossende Kraft (Repulsionskraft) offenbar nach ähnlichen Gesetzen, wie der obere durch die Cohaesionskraft, und es wird daher auf gleiche Art nach §. 283, wenn $O C = h'$ und der Repulsionskoeffizient $= \mu'$ gesetzt wird, $\mu' . B . h'^2$. . . (II) das Widerstandsmoment bezeichnen.

Mit diesen beiden Momenten widersteht der Balken dem Buge oder der Einwirkung des am Ende befestigten Gewichtes, das gesammte Widerstandsmoment des Balkens wird daher die Summe beider oder $\mu . B . h^2 + \mu' . B . h'^2$ seyn. Diesem wirkt das Moment der Belastung $Q . L$ entgegen, und es ist im Stande des Gleichgewichtes $Q . L = \mu . B . h^2 + \mu' . B . h'^2$.

Der Balken, sich selbst überlassen, kann aber nur in einer solchen Lage verharren, wo die Cohaesionskräfte über O P mit den Repulsionskräften unter O P im Gleichgewichte sind, oder wo die Cohaesionsmomente den Repulsionsmomenten gleich sind. Diese Bedingniss gibt $\mu . B . h^2 = \mu' . B . h'^2$. Wir können daher obige Gleichung auch $Q . L = 2 \mu . B . h^2$ schreiben, in welcher jedoch die Grösse h zu bestimmen kommt.

Das Tragungsvermögen Q eines Parallelopipeds hängt daher von den gegebenen Dimensionen B, H, L desselben, vorzüglich aber von der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit der Materientheilchen ab, und wir sehen in dieser Hinsicht, dass ein Körper um so mehr zu tragen vermag, je kleiner der Bruch $\frac{\mu}{\mu'}$ ist, oder je grösser bei einer gegebenen Cohaesionskraft seine Repulsionskraft wird.

Für kleine Belastungen gibt die Erfahrung, dass Cohaesionskraft und Repulsionskraft gleich gross, und dem Gewichte proportional, oder dass $\mu = \mu'$ ist; dann ist auch $h = h'$ und derjenige Cohaesionsfaden, der weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird, liegt genau in der Mitte der Höhe H, und wir erhalten $Q . L = 2 \mu . B . \frac{H^2}{4}$.

Bei grössern Belastungen wird aber die Repulsionskraft bedeutend vermehrt, also μ' grösser als μ; weil aber in jedem Falle $\mu . h^2 = \mu' . h'^2$ ist, so muss nun auch h grösser als h' und h grösser als $\frac{H}{2}$ seyn; daher wird der Balken wieder fähig, bei gleicher Zunahme der Spannung verhältnissmässig grössere Gewichte aufzunehmen.

Da die Balken, welche bei dem Maschinen- und Bauwesen verwendet werden, sich nicht viel biegen dürfen, so bleiben wir bei der Gleichung $Q . L = 2 \mu . B . \frac{H^2}{4}$ stehen;

hierin hängt der Koefficient $\frac{\mu}{2}$ von der physischen Beschaffenheit der Materie ab, und kann nur durch Versuche bestimmt werden. Wir werden diesen Coeffizienten der Kürze wegen bloss durch den Buchstaben m vorstellen. Die Gleichung für das Tragungsvermögen eines Parallelopipeds ist daher $Q = \frac{m.B.H^2}{L}$. Für ein anderes auf gleiche Art beschwertes Parallelopiped von derselben Materie, aber den Dimensionen b, h und l wird das Gewicht q, welches mit der bewirkten Spannung sich im Gleichgewichte befindet, gleichfalls durch die Gleichung $q = \frac{m.b.h^2}{l}$ ausgedrückt.

Bringt man diese beiden Gleichungen in eine Proportion, so ist $Q:q = \frac{B.H^2}{L} : \frac{b.h^2}{l}$ d. h. die Gewichte, welche zwei gleichartige an einem Ende eingemauerte Balken gleich stark spannen oder brechen, verhalten sich wie die Produkte aus den Querschnittsflächen in die Höhen, und verkehrt wie die Längen der Balken (wie §. 283).

§. 288.

Nach der vorigen Gleichung $Q = \frac{m.B.H^2}{L}$, lässt sich das Gewicht Q für einen Balken von gegebenen Dimensionen B, H und L finden, sobald durch einen Versuch der Cohaesionskoeffizient m bekannt ist. Man braucht in dieser Absicht nur bei einem vollkommen gleichartigen Parallelopipede seine Dimensionen b, h und l zu messen, und das Gewicht q, bei welchem dieser Stab bricht, zu bestimmen.

Hierüber führt abermals *Musschenbroek* in der bereits genannten: *Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum* pag. 121 mehrere Versuche an. Die Hölzer, welche derselbe untersuchte, waren sämmtlich Parallelopipede, hatten eine Breite von 0,26 Rheinländer Zoll und im Augenblicke des Bruches eine Länge, (C G′, Fig. 12) von 9 Zoll ausserhalb der Oeffnung, in welcher sie gut befestigt waren. Der erste Versuch, welcher auf diese Art angestellt wurde, betraf ein Parallelopiped von Eichenholz, dessen Höhe 0,33 Rheinländer Zoll betrug; dieses wurde von 5 Amsterdamer Pfunden gebrochen. Hieraus ergibt sich nun auf folgende Art der Cohaesionskoeffizient: Substituiren wir nämlich in die Proportion §. 287. $Q:q = \frac{B.H^2}{L} : \frac{b.h^2}{l}$ die Werthe aus dem Versuche, auf Nied. Oe. Maass und Gewicht reduzirt, so ist $Q : 5 . 0{,}8806 = \frac{B.H^2}{L} : \frac{0{,}26\,(0{,}33)^2.(0{,}993)^2}{9}$, woraus $Q = 1419{,}36\,\frac{B.H^2}{L}$ folgt. Um jedoch von dieser Gleichung Gebrauch zu machen, müssen die Dimensionen des Balkens B, H, L in Nied. Oe. Zollen substituirt werden, das Gewicht Q wird sodann in N. Oe. Pfunden erhalten.

Auf gleiche Art werden nun die Coeffizienten aus den andern Versuchen berechnet, welche *Musschenbroek* über die relative Festigkeit der Hölzer anstellte, und die in der folgenden Tabelle enthalten sind:

Nro. des Versuches.	Gattung der versuchten Hölzer.	Dimensionen derselben.			Gewicht, wovon der Bruch erfolgte.	Gleichung für die relative Festigkeit $Q = m \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	Mittelwerth.
		Breite	Höhe	Länge			
		Rhl. Zoll	Rhl. Zoll	Rhl. Zoll	Amst. Pf.		
1	Eichenholz	0,26	0,33	9	5	$Q = 1419 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	$1404 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$
2	„ „	0,26	0,40	9	8	$Q = 1546 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
3	„ „	0,26	0,52	9	$11\frac{15}{16}$	$Q = 1365 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
4	„ „	0,26	0,58	9	$14\frac{122}{128}$	$Q = 1374 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
5	„ „	0,26	0,68	9	$20\frac{7}{16}$	$Q = 1366 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
6	„ „	0,26	0,74	9	24	$Q = 1355 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
7	Ulmenholz	0,26	0,25	$7\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{128}$	$Q = 828 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	$922 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$
8	„ „	0,26	0,35	$8\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$Q = 834 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
9	„ „	0,26	0,43	9	$5\frac{1}{128}$	$Q = 837 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
10	„ „	0,26	0,52	8	$9\frac{1}{4}$	$Q = 940 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
11	„ „	0,35	0,35	8	$6\frac{1}{2}$	$Q = 1083 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
12	„ „	0,43	0,43	9	10	$Q = 1011 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
13	Kiefernholz	0,26	0,25	9	$2\frac{1}{2}$	$Q = 1237 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	$1131 \frac{B \cdot H^2}{L}$
14	„ „	0,26	0,35	9	5	$Q = 1262 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
15	„ „	0,26	0,41	9	$5\frac{1}{9}$	$Q = 940 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	
16	„ „	0,26	0,52	9	$9\frac{1}{2}$	$Q = 1086 \cdot \frac{B \cdot H^2}{L}$	

§. 289.

Bestimmt man nach den vorigen Werthen die Stärke der Hölzer, so ergibt sich diese immer für den Fall des wirklichen Bruches. Da man jedoch die Hölzer so stark machen will, damit sie die Belastung wirklich aushalten, so pflegt man nach einer praktischen Regel hier eben so wie bei der absoluten Festigkeit für den Cohaesionscoeffizienten

bei Hölzern gewöhnlich nur $\frac{1}{10}$tel und bei Metallen z. B. beim Eisen $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$tel der ausgemittelten Zahlen in der Rechnung anzusetzen. Man vertraut demnach den Hölzern, welche der Fäulniss und andern Beschädigungen sehr ausgesetzt sind, nur $\frac{1}{10}$tel, und dem Eisen nur $\frac{1}{3}$tel dessen, wovon der Bruch erfolgt. Bei dieser Belastung behalten dann die Hölzer meistens noch ihre vollkommene Elastizität.

Beispiel. Wie stark muss ein viereckiger kieferner Balken seyn, der 2 Klafter lang ist, und an seinem Ende eine Last von 1000 ℔ tragen soll?

Setzt man hier H = B, und m = 1131 für Kiefernholz, so ist $Q = \frac{1131 . H^3}{L}$, und $H = \sqrt[3]{\left(\frac{Q . L}{1131}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{1000 . 12 . 12}{1131}\right)} = 5{,}03$ Zoll. Allein bei dieser berechneten Stärke würde der Balken brechen, man müsste ihn daher entweder stärker machen, oder nicht so viel Last anhängen.

Setzt man aber für m bloss 113, wobei der Balken die anvertraute Last mit einer solchen Sicherheit trägt, dass er erst von dem 10fachen dieser Last brechen würde, so findet man $H = \sqrt[3]{\left(\frac{Q . L}{113}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{1000 . 12 . 12}{113}\right)} = 10{,}8$ Zoll.

§. 290.

Für kleine hölzerne Stäbe hat das Gewicht derselben auf den Bruch sehr wenig Einfluss, und kann daher ganz vernachlässigt werden. Bei grossen Balken aber muss ihr oft sehr bedeutendes Gewicht in Anschlag gebracht werden. Nach §. 287 ist $Q . L = m . B . H^2$, d. h. das Moment des aufgehängten Gewichtes ist dem Spannungsmomente $m . B . H^2$ des Balkens gleich. Wären daher an dem Balken mehrere Gewichte auf verschiedenen Entfernungen angebracht, so müsste man für Q . L die Summe aller Momente setzen; da man nun bei einem parallelopipedischen Balken sein Gewicht (G) als im Schwerpunkte, in der Mitte seiner Länge vereint, also an dem Hebelsarme $\frac{L}{2}$ wirkend denken kann, so erhält man $Q . L + G . \frac{L}{2} = m . B . H^2$ oder $\left(Q + \frac{G}{2}\right) L = m . B . H^2$, woraus folgt $Q = \frac{m . B . H^2}{L} - \frac{G}{2}$, d. h. das Tragungsvermögen des Balkens wird um das halbe Gewicht des Balkens verringert. Um G zu bestimmen, setze man das Gewicht eines Kubikfusses, oder das Gewicht von 1728 Kubikzoll Holz allgemein = g, so ist, (da nach §. 288 bei der Bestimmung des Coeffizienten m die Maasse B, H, L, in Zollen verstanden werden)

$1728^{c\,\prime\prime} : g = B'' . H'' . L'' : G$, und $G = \frac{g . B . H . L}{1728}$, folglich allgemein

$$Q = \frac{m . B . H^2}{L} - \frac{g . B . H . L}{2 . 1728}.$$

Ist in dieser Gleichung $\frac{m . B . H^2}{L} = \frac{G}{2}$, oder $\frac{m . B . H^2}{L} = \frac{g . B . H . L}{2 . 1728}$, also $m . H = \frac{g . L^2}{2 . 1728}$, so ist Q = 0, d. h. der Balken trägt nichts, denn er bricht

durch sein eigenes Gewicht; die Breite hat hierauf keinen Einfluss, weil mit derselben gleichzeitig, und in gleichem Maasse das Gewicht des Balkens und sein Tragungsmoment zu- und abnimmt.

1tes Beispiel. Berechnen wir das Beispiel des vorigen §. mit Rücksicht des eigenen Gewichtes des Balkens und setzen für sein 10faches Uibergewicht $m = 113$, g aber $= 33$ ℔, so ist nach der oben gegebenen Gleichung:

$$1000 = \frac{113 \,.\, H^3}{144} - \frac{33 H^2 \,.\, 144}{2 \,.\, 1728} = \frac{113 H^3 - 198 H^2}{144} \text{ oder } H^3 - 1{,}_{752} H^2 = 1274{,}_{336}.$$

Setzt man $H = 11$, so ist $1331 - 211{,}_{992} = 1119{,}_{008}$ statt $1274{,}_{336}$, also der Fehler $= -155{,}_{328}$
— — $H = 12$, — — $1728 - 252{,}_{288} = 1475{,}_{712}$ — — — — — — $= + 201{,}_{376}$.

Nun kann man nach der bekannten Regel mit 2 falschen Sätzen schliessen:
$155{,}_{328} + 201{,}_{376} : 155{,}_{328} = 12 - 11 : x$, woraus $x = 0{,}_4$ Zoll; also ist der richtige Werth $H = 11 + x = 11{,}_4$ Zoll.

2tes Beispiel. Bei welcher Länge bricht ein Balken von Kiefernholz, wenn er 12 Zoll Höhe hat, durch sein eigenes Gewicht? — Nach dem Obigen ist $m \,.\, H = \frac{g \,.\, L^2}{2 \,.\, 1728}$; setzt man hier $m = 1131$, $H = 12''$, und $g = 33$ ℔, so ist $L'' = \sqrt{\left(2 \,.\, 1728 \,.\, \frac{m \,.\, H''}{g}\right)}$ $= 24\sqrt{\left(6 \cdot \frac{m \,.\, H''}{g}\right)}$; oder die Länge des Balkens in Fussen

$$L' = 2\sqrt{\left(6 \cdot \frac{m \,.\, H''}{g}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{6 \,.\, 1131 \,.\, 12}{33}\right)} = 99{,}_{36} \text{ Fuss} = 16 \text{ Klafter } 3{,}_{36} \text{ Fuss}$$

d. h. wenn ein Balken von Kiefernholz 12″ hoch ist, so wird er, wenn er von einer Seite eingemauert ist, bei einer Länge von 16 Klafter $3{,}_{36}$ Fuss nicht die mindeste Last zu tragen vermögen, und schon durch sein eigenes Gewicht brechen.

§. 291.

Wir wollen nun die am häufigsten vorkommende Aufgabe betrachten, wo ein Balken an seinen beiden Endpunkten unterstützt ist, und in irgend einem Punkte seiner Länge eine Last Q zu tragen bekommt, und wollen sehen, wie es sich hier mit seinem Tragungsvermögen verhält.

Ist die Last Q im Punkte O ausser der Mitte C angebracht, so werden die Unterlagen M und N einen verschiedenen Druck erleiden müssen. Denkt man sich den Balken in M mit der Kraft q gehoben, so ist in N die Unterstützung, und es ist $q \,.\, MN = Q \,.\, NO$ oder $q = \frac{Q \,.\, NO}{MN}$. Denkt man sich den Punkt M unterstützt, und den Balken in N mit der Kraft q' gehoben, so ist: $q' \,.\, MN = Q \,.\, MO$ und $q' = \frac{Q \,.\, MO}{MN}$. Beide Drücke betragen zusammen $q + q' = \frac{Q \,.\, NO}{MN} + \frac{Q \,.\, MO}{MN} = Q\left(\frac{NO + MO}{MN}\right) = Q$, wie es seyn muss. Fig. 15. Tab. 14.

Da die Kräfte q, q' und Q mit einander im Gleichgewichte sind, so wird an der Wirkung der Kräfte offenbar nichts geändert, wenn man statt der auf MO wirkenden Kraft q den Theil MO fest oder eingemauert, und statt des Druckes q' auf N diese Kraft z. B. an einem Faden nach oben wirkend sich vorstellt. Unter dieser Voraussetzung haben wir den §. 287 behandelten Fall, nach welchem das Tragungsvermögen $q' = \frac{m.B.H^2}{NO}$, oder $\frac{Q.MO}{MN} = \frac{m.B.H^2}{NO}$, oder $Q = \frac{m.B.H^2.MN}{MO.NO}$, wo B und H, wie bekannt, die Abmessungen des Balkens sind.

Setzen wir NO festgehalten, und q an MO auf gleiche Art, wie früher, wirkend voraus, so ist nach ebendemselben §. $q = \frac{m.B.H^2}{MO}$, oder $\frac{Q.NO}{MN} = \frac{m.B.H^2}{MO}$, sonach $Q = \frac{m.B.H^2.MN}{MO.NO}$, also derselbe Werth wie früher.

Setzt man die Entfernung der Last vom Mittelpunkte C der Balkenlänge, $OC = E$ und $MN = L$, so ist $MO = \frac{L}{2} - E$ und $NO = \frac{L}{2} + E$, daher

$MO.NO = \left(\frac{L}{2} - E\right)\left(\frac{L}{2} + E\right) = \frac{L^2}{4} - E^2$, folglich $Q = \frac{m.B.H^2.L}{\frac{L^2 - E^2}{4}}$ oder

$$Q = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2}.$$

Um das Gewicht des Balkens (G) in Rechnung zu bringen, sey das Gewicht des Balkenstückes $MO = G'$, das Gewicht des Balkenstückes $NO = G''$, so muss $G' + G'' = G$ seyn. Im Augenblicke des Bruches ist der Balkentheil NO an seinem Endpunkte bei N unterstützt und liegt mit $\frac{G''}{2}$ auf, an dem andern Endpunkte O wirkt auch $\frac{G''}{2}$ und ist nicht unterstützt, daher wird die Last Q durch das Gewicht des Balkens NO um $\frac{G''}{2}$ vermehrt. Auf dieselbe Art vermehrt auch MO das Gewicht Q mit seinem halben Gewichte $= \frac{G'}{2}$ und es ist daher die für den Bruch wirkende Gesammtlast

$Q + \frac{1}{2}G'' + \frac{1}{2}G' = Q + \frac{G}{2}$, weil $\frac{G'' + G'}{2} = \frac{G}{2}$ ist; es muss demnach seyn

$Q + \frac{G}{2} = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2}$, oder $Q = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2} - \frac{G}{2}$, oder

$$Q = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2} - \frac{g.B.H.L}{2.1728}.$$

§. 292.

Betrachten wir in der vorigen Gleichung alle Grössen als gegeben, und bloss E als veränderlich; so sehen wir, dass, wenn $E = 0$ ist, die Last daher in der Mitte liegt, der Nenner der grösste, also das Tragungsvermögen das kleinste wird, nämlich $Q = \frac{4m.B.H^2}{L} - \frac{g.B.H.L}{2.1728}$, d. h. die Mitte des Balkens ist der schwäch-

ste Punkt; und der Balken trägt daselbst (ohne Rücksicht auf sein eigenes Gewicht G) 4mal so viel, als derselbe an einem Ende eingemauert, und am andern äussersten Ende belastet tragen würde. Daher nimmt man in der Anwendung bei Berechnung der Stärke solcher Balken die Belastung, der Sicherheit wegen, immer in der Mitte an. Je grösser dagegen E wird, oder je mehr die Last aus der Mitte gegen einen der beiden Unterstützungspunkte gerückt wird, desto grösser wird das Tragungsvermögen des Balkens; und rückt man die Last ganz ans Ende, so wird $E = \pm \frac{L}{2}$, d.h. die Last kommt ganz auf die Unterlage zu liegen. Für diesen Fall gibt die Rechnung den Nenner $= 0$, folglich das Tragungsvermögen Q unendlich gross, weil in diesem Falle die Last ganz von den Unterstützungspunkten, und gar nichts von dem Balken getragen wird. Aus dieser Ursache ist es vortheilhaft, in Gebäuden, Magazinen, Schüttböden etc. den Boden in der Mitte möglichst wenig zu belasten, und die Belastung näher an diejenigen Stellen zu bringen, welche den Balken zu Unterlagen dienen. Ein Wagen, eine Last etc., die über eine Brücke geschafft wird, ist ausser aller Gefahr, wenn sie die Mitte des Bogens überschritten hat.

§. 293.

Wenn die Belastung eines an beiden Enden unterstützten Balkens, die er in der Mitte zu tragen vermag, gegeben ist, kann man leicht finden, wie viel er **in jedem Punkte ausser der Mitte trägt?**

Nach §. 292 ist die Last, welche ein Balken bei irgend einer Spannung in der Mitte trägt $= \frac{4m.B.H^2}{L} - \frac{G}{2} = P - \frac{G}{2}$, wo nämlich $\frac{4m.B.H^2}{L} = P$ gesetzt wurde. Ausser der Mitte trägt er bei derselben Spannung $Q = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2-4E^2} - \frac{G}{2}$, und für $4m.B.H^2$ den obigen Werth P.L gesetzt, gibt $Q = \frac{P.L^2}{L^2-4E^2} - \frac{G}{2} = \frac{P}{1-\frac{4E^2}{L^2}} - \frac{G}{2}$. Theilt man die **ganze Länge** in 20 Theile, wo sodann jeder Theil $\frac{L}{20}$ gross ist, und nimmt für E allgemein n solcher Theile d.i. $E = \frac{n.L}{20}$, so ist auch $Q = \frac{P}{1-\frac{n^2}{100}} - \frac{G}{2}$, und man erhält, für n nach und nach die Zahlen von 0 bis 10 gesetzt, die Werthe, wie sie folgende Tabelle zeigt.

Dieselben Werthe gelten auch für die **andere Hälfte des Balkens**, weil die aufgestellte Gleichung für gleich grosse positive oder negative Werthe von E gleiche Resultate gibt.

n	Berechneter Werth für Q
0	$P - \frac{G}{2} = 1{,}000\,P - \frac{G}{2}$
1	$\frac{100}{99}P - \frac{G}{2} = 1{,}010\,P - \frac{G}{2}$
2	$\frac{100}{96}P - \frac{G}{2} = 1{,}042\,P - \frac{G}{2}$
3	$\frac{100}{91}P - \frac{G}{2} = 1{,}099\,P - \frac{G}{2}$
4	$\frac{100}{84}P - \frac{G}{2} = 1{,}190\,P - \frac{G}{2}$
5	$\frac{100}{75}P - \frac{G}{2} = 1{,}333\,P - \frac{G}{2}$
6	$\frac{100}{64}P - \frac{G}{2} = 1{,}563\,P - \frac{G}{2}$
7	$\frac{100}{51}P - \frac{G}{2} = 1{,}961\,P - \frac{G}{2}$
8	$\frac{100}{36}P - \frac{G}{2} = 2{,}778\,P - \frac{G}{2}$
9	$\frac{100}{19}P - \frac{G}{2} = 5{,}263\,P - \frac{G}{2}$
10	Unendlich gross.

Aus dieser Tabelle sieht man die Zunahme des Tragungsvermögens gegen die Unterstützungspunkte; insbesondere ergibt sich, dass, wenn man sich den Balken in drei Theile abgetheilt denkt, der mittlere Theil in allen Punkten eine beinahe gleiche Tragungskraft besitze, indem die Zahlen 1,010, dann 1,042, endlich 1,099 nur unbedeutend von 1,000 abweichen.

Von diesem dritten Theile aus wird das Tragungsvermögen gegen die Enden des Balkens immer grösser; kommt endlich die Last auf den Unterstützungspunkt des Balkens zu liegen, so wird dessen Tragungsvermögen unendlich gross, d. h. er bricht nicht mehr und es kommt nunmehr bloss seine rückwirkende Festigkeit in Betrachtung, wovon später gehandelt werden wird.

Ist bei diesem Balken B = 10″, H = 12″, L = 20′, das Gewicht eines Kubikfusses Holz = 30 ℔ und im Falle er von Tannenholz ist, und das zum Bruche erforderliche Gewicht gesucht wird, m = 1000, so ist

$$P = \frac{4\,m\,.\,B\,.\,H^2}{L} = \frac{4\,.\,1000\,.\,10\,.\,144}{20\,.\,12} = 24000;\ \text{ferner}$$

$$\frac{G}{2} = \frac{B\,.\,H\,.\,L\,.\,g}{2} = \frac{10\,.\,1\,.\,20\,.\,30}{12\,.\,2} = 250,\ \text{dann}$$

$$Q = \frac{24000}{1 - \frac{4\,.\,E^2}{20\,.\,20\,.\,12\,.\,12}} - 250.$$

Setzt man E = 0, 12 Zoll, 24 Zoll, 36 Zoll u. s. w., so erhält man jedesmal Q, wie in der nebenstehenden Tabelle zu ersehen ist.

E in Zollen.	Q in Pfunden.
0	23750
1.12	23992
2.12	24750
3.12	26124
4.12	28321
5.12	31750
6.12	37250
7.12	46809
8.12	66417
9.12	126066
10.12	Unendl. gross.

§. 294.

Da die Versuche über den Bruch der Balken weit leichter anzustellen sind, wenn die letztern an beiden Enden aufliegen, als wenn sie an einem Ende eingemauert wer-

den, so findet man auch mehrere Versuche in den mechanischen Schriften über diesen Fall angestellt.

Da das Tannenholz bei dem Bauwesen am häufigsten gebraucht wird, so hat Hr. *Barlow* in England eine Reihe von Versuchen über die Festigkeit solcher Hölzer angestellt, die an beiden Enden frei auflagen, und durch ein in der Mitte derselben angebrachtes Gewicht gebrochen wurden. Bei dem ersten Versuche dieser Art wurden sechs Stäbe von Tannenholz, deren jeder 1 Zoll hoch, 1 Zoll breit und 15 Zoll lang war, nach und nach in ihrer Mitte mit Gewichten beschwert, bis der Bruch erfolgte. Das Mittel aus diesen sechs Versuchen gab ein Gewicht von 418⅚ ℔. Da diess durchaus englisches Maass und Gewicht ist, so findet man den Coeffizienten m für diesen Versuch aus der Proportion $Q : 418\frac{5}{6} \times 0{,}8099 = \frac{4 . B . H^2}{L} : \frac{4 . 1 . 1^2}{15} \cdot (0{,}9642)^2$ woraus $Q = 4 . 1368 \cdot \frac{B . H^2}{L}$. Auf gleiche Art wurde der Coeffizient bei allen andern Versuchen in der nachstehenden Tabelle berechnet.

Nro. der Versuchsreihe.	Dimensionen der probierten Holzstücke. Länge	Höhe	Breite	Anzahl der Versuche, welche mit jedem Holzstücke gemacht wurden.	Mittel des Gewichtes, wovon der Bruch erfolgte	Gleichung für die relative Festigkeit in N. Oe. Maasse $Q = 4\,m \cdot \frac{B . H^2}{L}$
	engl. Zoll.	engl. Zoll.	engl. Zoll.		engl. Pfunde.	
1	15	1	1	6	418⅚	$Q = 4 . 1368 \cdot \frac{B . H^2}{L}$
2	18	1	1	6	375⅙	$Q = 4 . 1471$. „
3	24	1	1	3	264⁴⁄₆	$Q = 4 . 1383$. „
4	24	1	1	3	266⁴⁄₆	$Q = 4 . 1394$. „
5	30	1	1	3	237	$Q = 4 . 1548$. „
6	36	1	1	6	197	$Q = 4 . 1545$. „
7	24	1½	¾	3	428²⁄₆	$Q = 4 . 1327$. „
8	24	1½	¾	3	529⁴⁄₆	$Q = 4 . 1641$. „
9	30	1½	¾	3	394²⁄₆	$Q = 4 . 1527$. „
10	24	2	1	3	1106	$Q = 4 . 1445$. „
11	30	2	1	3	868²⁄₆	$Q = 4 . 1418$. „
12	36	2	1	6	734⁴⁄₆	$Q = 4 . 1440$. „
13	36	2	1	3	746⅔	$Q = 4 . 1464$. „

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass die Festigkeit des Tannenholzes nicht durchaus gleich sey, da die Versuche für den Coeffizienten m die Werthe 1327 bis 1641 geben; wovon die Ursache darin liegt, weil man nicht leicht zwei vollkommen gleiche Hölzer zu finden im Stande ist.

§. 295.

In dem bereits erwähnten Handbuche der Statik fester Körper von *I. A. Eytelwein* erscheint eine Reihe von Versuchen, welche über die relative Festigkeit der in

Preussen üblichen Bauhölzer mit aller Genauigkeit angestellt wurden. Wir übergehen hier zur Vermeidung der Weitläufigkeit das Detail dieser Versuche, indem wir bloss die Resultate derselben anführen. Diese geben q oder die Last, wovon ein, an einem Ende eingemauerter Stab von 1 Zoll Länge, 1 Zoll Breite und 1 Zoll Höhe (Berliner Maass) bricht:

Für Rothbuchenholz	= 4710 Berl. ℔,	folgl. auf N. Oe. Maass u. Gewicht reduzirt	m = 3989.
„ Steineiche	= 4109 „	„ „ „ „	m = 3480.
„ Sommereiche	= 4006 „	„ „ „ „	m = 3393.
„ Erlenholz	= 3449 „	„ „ „ „	m = 2921.
„ Weissbuche	= 3005 „	„ „ „ „	m = 2545.
„ Kiefernholz	= 2878 „	„ „ „ „	m = 2438.
„ Weisstanne	= 2737 „	„ „ „ „	m = 2318.
„ Rothtanne	= 2049 „	„ „ „ „	m = 1736.

§. 296.

Über die relative Festigkeit des Gusseisens führt Hr. *Rondelet* in seinem *Art de bâtir, tome IV, page* 514 folgende Versuche mit Stangen an, deren Höhe und Breite sämmtlich einen Zoll betrug.

Nro. des Versuches.	Gattung des versuchten Gusseisens.	Entfernung der zwei Unterlagen.	Biegung im Augenblicke des Bruches.	Gewicht in der Mitte, welches den Bruch bewirkte.	Mittleres Gewicht.	Reduzirter Coefficient auf N. Oe. Maass und Gewicht m
		franz. Zoll.	franz. Lin.	franz. ℔.	franz. ℔.	
1	Weissgraues Gusseisen	42	6,25	450	450	3911
2	detto	„	6,75	450		
3	Dunkelgraues Gusseisen	42	15,75	650	656	5702
4	detto	„	14,00	1062		
5	detto	„	4,25	350		
6	detto	„	10,50	561		
7	Weissgraues Gusseisen	21	1,00	540	795	3455
8	detto	„	2,00	1050		
9	Dunkelgraues Gusseisen	21	5,25	1650	1461	6349
10	detto	„	2,00	1272		

§. 297.

Auch über die relative Festigkeit der Steine wurden Versuche dieser Art angestellt. Herr *Tredgold* führt in dem *philosophical Magazine and Journal, vol.* 56, *p.* 290 nachstehende Versuche mit parallelopipedischen Steinkörpern an, die horizontal auf zwei Unterlagen gelegt und in der Mitte beschwert wurden:

Nro. des Versuches.	Gattung der versuchten Steine.	Entfernung der zwei Unterlagen.	Breite der versuchten Steine.	Höhe der versuchten Steine.	Gewicht, wovon der Bruch erfolgte.	Reduzirter Coefficient auf N. Oe. Maass und Gewicht m.
		Engl. Zolle	Engl. Zolle	Engl. Zolle	Engl. ℔.	
1	Weisser Bildhauermarmor, sehr rein, spez. Schwere 2,706 .	30	1,075	1,075	50	263
2	detto	15	1,080	1,050	110	302
3	detto	14	1,075	1,075	130	319
4	Brauner *Portland*stein, spez. Schwere 2,113	24	2,000	1,450	100	124
5	Kieselartiger weisser Sandstein, spez. Schwere 2,212 . . .	18	1,450	1,525	92	107
6	Stein von *Dundee*, spez. Schwere 2,621	14	1,450	1,500	414	387
7	Sandstein von *Craigleith*, spez. Schwere 2,362	14	1,550	1,550	137	112
8	Sandstein aus dem Bruche von *Hailes*	14	1,550	1,500	123	108
9	Sandstein von *Long-Annet* .	9	1,525	1,450	160	98
10	detto	7	1,550	1,550	233	95
11	Kalkstein von *Portland* . .	12	2,070	1,550	270	142
12	Stein von *Bath*	5,5	1,000	1,000	58	69

§. 298.

Herr *Barlow* hat über die relative Festigkeit der Ziegeln in England Versuche angestellt. Dieselben waren 4 engl. Zoll breit, 2 Zoll hoch und befanden sich auf zwei, 8 Zoll von einander entfernten Unterlagen. Nach diesen Versuchen brach ein

alter ordinärer Ziegel von 343 *liv. av. du poids*, folgl. ist für N. Oe. Maass u. Gew. m = 37
neuer „ „ 403 „ „ „ „ m = 44
Ziegel v. bester Qualität 444 „ „ „ „ m = 48.

Bei allen bisher angeführten Versuchen über die respektive Festigkeit der hölzernen Balken, Metalle und Steine ist bei der Berechnung des Cohaesionscoefficienten m das eigene Gewicht der Körper nicht in Rücksicht genommen worden, weil die versuchten Körper ohnehin kein bedeutendes eigenes Gewicht hatten. Wird jedoch von diesen Versuchen in der Anwendung bei dem Maschinen- und Bauwesen Gebrauch gemacht, so muss das eigene Gewicht nach der Anleitung, welche §. 290 und §. 291 hierüber gegeben wurde, mit in Rechnung genommen werden. — Es dürfte wohl überflüssig seyn, hierüber noch ein Beispiel anzuführen.

§. 299.

Das Tragungsvermögen eines schief liegenden Balkens wird auf folgende Art bestimmt:

Nehmen wir zuerst an, es sey MN ein unschwerer Balken, welcher auf zwei festen Unterlagen liegt und mit dem Horizonte MR einen beliebigen Winkel NMR $= \alpha$ bildet; es wirke ferner in irgend einem Punkte O eine Kraft S in der auf die Länge des Balkens winkelrechten Richtung Oq, so wird dieser Fall von jenem im §. 291 enthaltenen in nichts, als in der absoluten Lage verschieden seyn; es muss daher auch hier eine eben solche Gleichung wie dort statt finden, d. i.

Fig. 1. Tab. 15.

$S = \frac{m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L}{MO \,.\, NO} = \frac{4\, m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L}{L^2 - 4E^2}$, wenn wir hier die Entfernung der Kraft von der Mitte, nämlich CO $=$ E setzen.

Denken wir uns nun an eben diesem Balken in demselben Punkte O die Last Q frei aufgehängt, also die Kraft in einer schiefen Richtung auf den Balken wirkend, so lässt sich Q durch On vorstellen, und in zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon Op nach der Richtung des Balkens und Oq senkrecht auf denselben wirkt; es werden daher Op und Oq dieselbe Wirkung hervorbringen, welche On früher äusserte. Die Kraft Op wirkt in der Richtung des Balkens und strebt ihn über seine Unterlagen abgleiten zu machen, wesshalb er auf jeden Fall durch eine gleiche entgegenwirkende Kraft gehalten werden muss; allein auf die Biegung oder den Bruch des Balkens kann Op nicht einwirken, und ist in dieser Hinsicht so gut als gar nicht vorhanden zu betrachten.

Die zweite Kraft Oq hat genau die Richtung wie die vorher genannte, und bewirkt daher allein die Spannung des Balkens; bezeichnen wir diese Kraft Oq $=$ S, so besteht die obige Gleichung $S = \frac{4m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L}{L^2 - 4E^2}$ (I); nun ist der Winkel Onp eben so gross als der Winkel NMR $= \alpha$, demnach haben wir $S : Q = \text{Cos}\, \alpha : 1$, also $S = Q \,.\, \text{Cos}\, \alpha$ (II).

Da aber auch das Dreieck Onp dem Dreiecke NMR ähnlich ist, so ist auch $S : Q = pn : On = MR : MN = b : L$, wenn MR $=$ b und MN $=$ L ist; also auch $S = \frac{Q \,.\, b}{L}$ (III).

Werden diese Werthe statt S in die Gleichung (I) gesetzt, so ist $Q = \frac{4\, m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L^2}{(L^2 - 4E^2)\, b}$ und auch $Q = \frac{4m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L}{(L^2 - 4E^2)\, \text{Cos}\, \alpha}$, wobei, wenn man das eigene Gewicht des Balkens mit berücksichtigen will, unter Q nicht bloss der vertikale Druck (On), sondern auch das halbe Gewicht des Balkens mit begriffen werden muss.

Bezeichnen wir das Tragungsvermögen eines wagerechten Balkens $\frac{4m \,.\, B \,.\, H^2 \,.\, L}{L^2 - 4E^2}$ mit W, so ist dasselbe für den schief liegenden Balken $Q = \frac{W \,.\, L}{b}$ oder $Q = \frac{W}{\text{Cos}\, \alpha}$. **Man findet daher das Tragungsvermögen eines schief liegenden Balkens, wenn man sein Tragungsvermögen für die wagerechte Lage sucht, und dieses entweder mit dem Cosinus seines Neigungswinkels divi-**

dirt, oder mit dem Bruche $\frac{L}{b}$ multiplicirt, wo L seine Länge und b ihre horizontale Projection ist.

§. 300.

Wir haben noch das Tragungsvermögen für den häufig vorkommenden Fall zu bestimmen, wenn eine Last Q auf einem, an seinen beiden Enden unterstützten Balken gleichförmig vertheilt ist, wie diess z. B. bei einem mit Getreide beschwerten Speicher oder Schüttboden vorkommt. In diesem Falle ist jeder Punkt des Balkens gleich beschwert, er wird also dort brechen, wo er das kleinste Tragungsvermögen hat, welches nach §. 292 in der Mitte statt findet. Im Augenblicke des Bruches kann der Zusammenhang der Fläche bei C nicht mehr in Rechnung kommen. Fig. 2. Tab. 15.

Ein jeder Theil MC oder NC hat das Gewicht $\frac{Q}{2} + \frac{G}{2}$ zu tragen. Hievon trägt für den Theil MC der Unterstützungspunkt M die Last $\frac{1}{2}\left(\frac{Q+G}{2}\right) = \frac{Q+G}{4}$ und in dem Punkte C wirkt gleichfalls das Gewicht $\frac{1}{2}\left(\frac{Q+G}{2}\right) = \frac{Q+G}{4}$ herab. Auf gleiche Art trägt von dem Theile NC der Punkt N das Gewicht $\frac{Q+G}{4}$ und in dem Punkte C wirkt abermals das Gewicht $\frac{Q+G}{4}$ herab; in dem Mittelpunkte C wirkt also das Gewicht $\frac{Q+G}{4} + \frac{Q+G}{4} = \frac{Q+G}{2}$ herab, welches den Bruch bewirkt. Wenn daher eine Last auf einem, an den Endpunkten unterstützten Balken gleichförmig vertheilt ist, so wirkt in dem Augenblicke des Bruches in der Mitte des Balkens die Hälfte dieser Last. Dem §. 292 zu Folge haben wir nun $\frac{Q+G}{2} = \frac{4m.B.H^2}{L}$ oder $Q = \frac{8m.B.H^2}{L} - G$ oder $Q = \frac{8m.B.H^2}{L} - \frac{g.B.H.L}{1728}$. Es ist daher die Tragkraft eines auf beiden Enden unterstützten Balkens, wenn die Belastung gleichförmig über seine ganze Länge vertheilt ist, doppelt so gross, als im Falle die ganze Last in einem einzigen Punkte in der Mitte angebracht wird.

§. 301.

Es erübrigt noch das Tragungsvermögen eines an seinen beiden Enden eingemauerten Balkens zu bestimmen, wenn die Last an irgend einem Punkte herabwirkt, und das Gewicht des Balkens mit in Rechnung genommen wird.

In diesem Falle muss die Last Q den Balken in den Punkten M, O und N brechen; man zerlege daher dieses Gewicht in drei Theile q, q' und q'', so dass $Q = q + q' + q''$ sey. Fig. 3.

Um den Bruch des Balkens in O zu bewirken, muss vermög §. 291 $q = \frac{m.B.H^2.MN}{MO.ON}$ seyn; das Gewicht für den Bruch des Balkens in M gibt §. 287 mit

Fig. 3. Tab. 15. $q' = \frac{m.B.H^2}{MO}$, und jenes für den Bruch in N ebenfalls §. 287 mit $q'' = \frac{m.B.H^2}{ON}$; folglich ist $Q = q + q' + q'' = \frac{m.B.H^2.MN}{MO.ON} + \frac{m.B.H^2}{MO} + \frac{m.B.H^2}{ON}$ oder

$$Q = m.B.H^2\left(\frac{MN + MO + ON}{MO.ON}\right) = \frac{2m.B.H^2.MN}{MO.ON}.$$

Wenn nun C in der Mitte von M und N liegt, so dass $MC = CN = \frac{MN}{2} = \frac{L}{2}$ und die Entfernung, wie viel die Last Q ausser der Mitte hängt, oder CO abermals $= E$ gesetzt wird, so haben wir $Q = \frac{2m.B.H^2.L}{\left(\frac{L}{2} - E\right)\left(\frac{L}{2} + E\right)} = \frac{8m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2}$; nimmt man aber das Gewicht des Balkens noch in Rechnung, so ist nach §. 291 die Last $Q = \frac{8m.B.H^2.L}{L^2 - 4E^2} - \frac{g.B.H.L}{2.1728}$.

Vergleicht man dieses Resultat mit jenem §. 291 wo der Balken beiderseits frei aufgelegt war, so ergibt sich, dass der eingemauerte Balken (wenn man auf sein eigenes Gewicht keine Rücksicht nimmt) doppelt so viel trägt, als wenn er beiderseits aufliegt, und dass er 8mal so viel trägt, als wenn derselbe bloss an einem Ende eingemauert ist.

§. 302.

Wir haben §. 287 das Tragungsvermögen eines parallelopipedischen, an einem Ende eingemauerten Balkens $Q = \frac{m.B.H^2}{L}$ gefunden. Ein jeder Balken wird aus einem runden Baumstamme gezimmert; die Abmessungen B und H desselben hängen daher von dem Durchmesser des Stammes ab, und können ein mannigfaltiges Verhältniss zu einander bekommen. Es frägt sich nun, wenn der Durchmesser des Stammes gegeben ist, das Verhältniss von $B : H$ so zu bestimmen, damit das Produkt $B.H^2$ am grössten wird, um dadurch den stärksten Balken aus einem gegebenen Stamme zu erhalten.

Fig. 4. Es stelle Fig. 4 das Profil eines runden Stammes vor, in welchem der Querschnitt des auszuzimmernden Balkens MONP verzeichnet ist, so dass die Breite desselben $ON = B$ und seine Höhe $PN = H$ jene Maasse seyen, bei denen das Produkt $B.H^2 = A$ ein Maximum wird. Bezeichnen wir den Durchmesser des Stammes OP mit D, so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke ONP offenbar $H^2 = D^2 - B^2$, also auch das Produkt $A = B.D^2 - B^3$. Soll nun B derjenige Werth seyn, bei welchem A am grössten wird, so muss für jeden Werth $B \pm x$, der um eine noch so kleine Grösse x grösser oder kleiner als B ist, das Produkt immer kleiner werden, sonst könnte der Voraussetzung gemäss A nicht das grösste Produkt seyn, d. i. das Produkt $C = (B + x) D^2 - (B + x)^3 = B.D^2 - B^3 + (D^2 - 3B^2) x - 3B.x^2 - x^3$ muss kleiner seyn, als A. Damit dieses Bedingniss erfüllt werde, muss das Glied $(D^2 - 3B^2)x$,

für jeden Werth von x offenbar $= 0$, also $D^2 - 3B^2 = 0$ seyn. Diess gibt $B^2 = \frac{D^2}{3}$ Fig. 4. Tab. 15.
für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$, oder für den Fall des Maximum von A; und weil nun $H^2 = D^2 - B^2 = D^2 - \frac{D^2}{3} = \frac{2}{3} D^2$ ist, so ist auch $B^2 : H^2 = \frac{D^2}{3} : \frac{2}{3} D^2 = 1 : 2$ also $B : H = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{,}4142 \ldots$ oder sehr nahe $B : H = 10 : 14 = 5 : 7$, d. h. ein aus einem runden Stamme gezimmerter Balken ist am stärksten, wenn sich die Breite zur Höhe, wie 5 zu 7 verhält.

Für diesen Fall gibt die Gleichung $B^2 = \frac{D^2}{3}$ die Proportion $\frac{D}{3} : B = B : D$

und die Gleichung $H^2 = \frac{2}{3} D^2$ die Proportion $\frac{2}{3} D : H = H : D$.

Wenn man daher Fig. 4 auf der Durchschnittsfläche des Stammes einen Kreis beschreibt, den Durchmesser OP in drei gleiche Theile theilt, mittelst eines Winkelhakens aus den Punkten Q und R die Senkrechten QN und RM zieht, bis sie die Peripherie in N und M schneiden, und die Durchschnittspunkte N und M mit den Endpunkten des Durchmessers O und P durch gerade Linien verbindet, so ist MONP der Querschnitt des stärksten Balkens; denn es ist

$$OQ : ON = ON : OP \text{ oder } \frac{D}{3} : B = B : D, \text{ ferner}$$

$PQ : NP = NP : OP$ oder $\frac{2}{3} D : H = H : D$, wie es nach dem Obigen seyn muss. Das Produkt $H^2 . B$ wird in diesem Falle $= \frac{2}{3} . D^2 . D . \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}3849 . D^3$, welches das Maximum ist.

Dass ein Balken, welcher nach der eben angeführten Theilung aus einem runden Stamme gezimmert wird, das grösste Tragungsvermögen besitze, ergibt sich auch noch, wenn man die Verzeichnung desselben auf eine andere Art vornimmt.

Wir wollen zuerst den Durchmesser des Stammes in zwei gleiche Hälften Fig. 5.
$OR = RP = \frac{D}{2}$ zertheilen, so ist die Höhe des Balkens eben so gross als seine Breite, oder $PN = NO = H = B = \sqrt{\left(\frac{D^2}{4} + \frac{D^2}{4}\right)} = D \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\ D$, folglich das Produkt $B . H^2 = 0{,}707\ D . D \sqrt{\frac{1}{2}} . D \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}3535\ D^3$.

Theilt man dagegen den Durchmesser eines Stammes OP in 4 Theile, errichtet im 1[ten] und 3[ten] Viertel die Senkrechten QN und RM, verbindet die vier Punkte M, O, N und P mit einander, so ist MONP der Querschnitt des Balkens, wobei $PN = H$ die Höhe, und $NO = B$ die Breite desselben vorstellt. Fig. 6.

Nun verhält sich $OQ : ON = ON : OP$ oder $\frac{D}{4} : B = B : D$, woraus $B = D \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{D}{2}$

Ferner $PQ : PN = PN : PO$ oder $\frac{3}{4} D : H = H : D$, woraus $H = D \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866\ D$

Es wird daher das Produkt $B . H^2 = \frac{D}{2} . D^2 . \frac{3}{4} = 0{,}3750\ D^3$.

Wir sehen, dass in diesen beiden Fällen die Produkte $B . H^2 = 0{,}3535\ D^3$ und $B . H^2 = 0{,}3750\ D^3$ wirklich kleiner als das oben berechnete $B . H^2 = 0{,}3849\ D^3$ sey; es ist

daher die oben angegebene Verzeichnungsart diejenige, bei der man aus einem runden Stamme wirklich den stärksten Balken durch Zimmerung erhält.

§. 303.

Die Vergleichung der Tragungsfähigkeit eines Modelles, z. B. eines hölzernen Brückenmodelles mit jener des darnach ausgeführten Baues verdient ihrer Wichtigkeit wegen hier noch eine Erwähnung.

Es seyen b, h, l die Abmessungen eines einzelnen Balkens des Modelles und p das noch darauf befindliche Gewicht der Streuhölzer etc., so ist sein Tragungsvermögen in der Mitte oder $q = \frac{4\,m.b.h^2}{l} - \left(\frac{g.b.h.l}{2.1728} + \frac{p}{2}\right)$. Wir wollen zu einem Beispiele die Belastung viermal so gross als das eigene Gewicht des Balkens oder $p = \frac{4g.b.h.l}{1728}$ annehmen, so ist

$$q = \frac{4\,m.b.h^2}{l} - \left(\frac{g.b.h.l}{2.1728} + \frac{4g.b.h.l}{2.1728}\right) = \frac{4\,m.b.h^2}{l} - \frac{5g.b.h.l}{2.1728} \quad \text{(I).}$$

Werden nun nach diesem Modelle die Abmessungen für den wirklichen Bau sämmtlich n^{mal} vergrössert, so ist das Tragungsvermögen eines solchen Balkens der Brücke

$$Q = \frac{4\,m.n^2.b.h^2}{l} - \frac{5n^3.g.b.h.l}{2.1728} \quad \text{(II).}$$

Aus dem Vergleiche dieser beiden Ausdrücke, welche die Cohaesionskraft ähnlicher Balken darstellen, sehen wir, dass das erste Glied mit der zweiten Potenz der Verhältnisszahl n wächst, dagegen aber das zweite Glied, worin das Gewicht der Balken und ihre Belastung vorkommt, wegen der gleichfalls darin enthaltenen dritten Potenz von n weit schneller zunimmt; es wird daher das Tragungsvermögen einer Brücke gegen jenes eines Modelles desto geringer werden, je grösser das eigene Gewicht der Balken der Brücke sammt ihrer Belastung gegen das Gewicht der Balken des Modelles ist. Da überhaupt das Tragungsvermögen des Modelles und der Brücke durch die Differenz der, in I und II enthaltenen zwei Glieder bestimmt wird, so sieht man, dass sich aus dem, von einem Modelle getragenen Gewichte keineswegs auf ein von der Brücke zu tragendes Gewicht, welches im Verhältnisse zu der Vergrösserung steht, schliessen lässt; ja es können Fälle statt finden, wo das Modell bedeutende Gewichte trägt, während die darnach ausgeführte Brücke durch ihr eigenes Gewicht bricht. Das Letztere findet nämlich in der Gleichung II statt, wenn man $Q = 0$ setzt, in welchem Falle $\frac{4\,m.n^2.b.h^2}{l} - \frac{5\,n^3.g.b.h.l}{2.1728} = 0$, mithin $n = \frac{4\,m.h.2.1728}{5\,g.l^2}$ ist; es wird daher bei dieser Vergrösserung (n) die ausgeführte Brücke brechen, wenn gleich das Modell ein bedeutendes Gewicht trägt.

Beispiel. Es sey im Modelle $b = h = \frac{1}{2}$ Zoll, $l = 36$ Zoll, das Gewicht eines Kubikfusses Holz oder $g = 30$ ℔ und m für den Bruch $= 1000$, so bricht ein Tragbalken des Modelles nach der Gleichung I von dem Gewichte

$$q = \frac{4.1000.0{,}5.(0{,}5)^2}{36} - \frac{5.30.0{,}5.0{,}5.36}{2.1728} = 13{,}5$$ ℔ und wenn 8 solche Balken vorhanden sind, so bricht das ganze Modell von $8\,q = 108$ ℔. Es wird daher eine geringere Last z. B. die Hälfte oder 54 ℔ t r a g e n.

Berechnet man nun für die angenommenen Dimensionen aus der obigen Gleichung für n die Vergrösserung, so findet man $n = \frac{4.1000.0{,}5.2.1728}{5.30.(36)^2} = 35{,}56$. Da also die Brücke bei der 35,56fachen Vergrösserung durch ihr eigenes Gewicht bricht, so wollen wir $n = 36$ setzen, d. h die Balken (Endsbäume) der Brücke zu $36.0{,}5 = 18$ Zoll Höhe und Breite, dann mit 36.36 Zoll = 108 Fuss Länge annehmen, und diess in den Ausdruck II substituiren. Nehmen wir bei der Brücke abermals 8 Balken, wie bei dem Modelle an, so ist das Tragungsvermögen der nach dem Modelle im 36fachen Maasse hergestellten Brücke

$$8\,Q = 8\left\{\frac{4.1000.(36)^2.0{,}5.(0{,}5)^2}{36} - \frac{5.(36)^3.30.0{,}5.0{,}5.36}{2.1728}\right\} = 8\,(18000 - 18225) = -1800$$

Pfund; d. h. die Brücke bricht schon durch ihr eigenes Gewicht, und darf gar nicht mehr belastet werden. Wir sehen also, wie unrichtig es wäre, wenn man von dem Umstande, dass 8 Balken des Modelles beiläufig 54 ℔ tragen, darauf schliessen wollte, dass 8 Balken der Brücke 36mal 54 ℔ = 1944 ℔ tragen werden. Noch unrichtiger wäre es jedoch, wenn man die Vermehrung des Tragungsvermögens mit dem Quadrate der Vergrösserung (mit n^2) annehmen wollte, und daher dieser Brücke ein Vermögen von $54.36^2 = 69984$ ℔ zuschreiben wollte.

Diese Bemerkung verdient hauptsächlich eine Berücksichtigung bei Modellen für hölzerne Brückenkonstructionen von grossen Spannweiten.

§. 304.

Eine wichtige Anwendung der Lehre über die Festigkeit der Körper biethet sich bei der B e r e c h n u n g d e r D i m e n s i o n e n v o n B r ü c k e n dar.

Die einfachsten Holzbrücken, wie man sie über kleine Bäche und Schluchten zu erbauen pflegt, bestehen aus zwei an beiden Ufern aufgerichteten hölzernen oder gemauerten Widerlagen, welche den beiden Enden der Brückenbahn zu Auflagen dienen. Die Brückenbahn bilden mehrere nach der Breite des Baches, gewöhnlich 3 bis 4 Fuss von einander entfernte, parallel aufgelegte starke Bäume (Endsbäume a), welche mit schwächern Pfosten oder Hölzern (Streu- oder Brückenhölzern b) senkrecht auf die Richtung der Endsbäume dicht überlegt werden. Der Sicherheit wegen bekommt eine solche Brücke an beiden Seiten Geländer, und an diesen der Länge nach oft noch zwei Längen-Balken (Anzüge c) über die Streuhölzer, um diese hiedurch festzuhalten. (Fig. 7 und 8. Tab. 15.)

Wir wollen daher in dem folgenden Beispiele jene Grundsätze deutlich zu machen suchen, welche bei dem Entwurfe einer Holzbrücke in Bezug auf Festigkeit zu beobachten sind.

B e i s p i e l. E s i s t f ü r e i n e H o l z b r ü c k e v o n 6 K l a f t e r L ä n g e u n d 4 K l a f t e r B r e i t e d i e A n z a h l u n d S t ä r k e d e r e r f o r d e r l i c h e n E n d s-

Fig. 7 und 8. Tab. 15. bäume zu bestimmen, wenn die Brücke eine gegebene grösste zufällige Belastung mit Sicherheit tragen soll.

Da die Bemessung der Stärke der Endsbäume von der Grösse der Last abhängt, welche sie zu tragen bekommen, so muss zuerst diese ausgemittelt werden. Bei einer jeden Brücke kommt eine beständige und eine zufällige Belastung zu betrachten. Die beständige Belastung der Brücke ist:

1tens. Das Gewicht der Endsbäume. Ist ihre Anzahl N, und die Abmessungen b, h, L in Zollen und g das Gewicht eines Kubikfusses dieser Holzgattung, so ist das Gewicht der N Endsbäume $= N.G = \frac{N.b.h.L.g}{1728}$ (I).

2tens. Das Gewicht der Brückenstreu. Dieselbe bildet einen Holzkörper von der Länge der Brücke L, ihrer Breite B und der Höhe der Streuhölzer h'; wird daher alles in Zollen gemessen, so beträgt das Gewicht der Brückenstreu

$$G' = \frac{L.B.h'.g}{1728} \quad \text{(II)}.$$

3tens. Das Gewicht der beiden Anzüge. Nennen wir b' die Breite und h'' die Höhe derselben, so beträgt ihr Gewicht $G'' = \frac{2.L.b'.h''.g}{1728}$ (III).

4tens. Das Gewicht der Geländer. Nimmt man die Entfernung der Geländersäulen zu 1 Klafter, ihre Höhe zu ½ Klafter an, und alles Holz von gleicher Stärke b'' und h''', so kann man für beide Geländer sammt Streben die nöthige Holzlänge 4 L, und das Gewicht $G''' = \frac{4L.b''.h'''.g}{1728}$ setzen (IV).

Die zufällige Belastung der Brücke muss der Sicherheit wegen immer als die grösstmöglichste angenommen werden. Die Erfahrung und eine nähere Betrachtung lehren, dass eine Fläche durch ein Menschengedränge am meisten belastet sey. Beobachtungen hierüber haben gezeigt, dass bei einem Menschengedränge 24 Personen auf einer Quadrat Klafter stehen können. Rechnet man das Gewicht eines Menschen im Mittel zu 125 ℔, so ist durch 24 Menschen eine Quadrat-Klafter mit 30 Zentner belastet. Für unsere Brücke ist daher die grösste zufällige Belastung

$G'''' = \frac{L.B}{72.72}$. 30 Zentner, wenn L und B abermals in Zollen sind (V).

Dem Vorhergehenden zu Folge ist daher die ganze der Länge nach gleichförmig vertheilte Belastung der Brücke $= N.G + G' + G'' + G''' + G''''$.

Statt dieser ausgemittelten gleichförmig vertheilten Belastung können wir nach §. 299 eine einzige, in der Mitte wirkende Last $\frac{N.G + G' + G'' + G''' + G''''}{2}$ in Rechnung nehmen, und wir erhalten für das Tragungsvermögen der Brücke nach §. 292, da statt einem Balken N Balken vorhanden sind, die Gleichung

$$\frac{4.m.b.h^2}{L} . N = \frac{N.G + G' + G'' + G''' + G''''}{2} \quad \text{(VI)}.$$

Sind nun alle Abmessungen gegeben, oder man wählt sie dem Zwecke entsprechend und nimmt für m einen durch angestellte Versuche ausgemittelten und aus Vorsicht ge-

hörig verminderten Werth an, so lässt sich aus dieser Gleichung die Anzahl der Endsbäume N bestimmen.

Man wird jedoch in solchen Fällen am sichersten zu Werke gehen, wenn man sich als Grundlage der Rechnung an die Resultate hält, welche sich durch vieljährige Erfahrungen für ähnliche Fälle unter gleichen Umständen als erprobt bewährt haben. Eine Erfahrung dieser Art ist, dass eine 4 Klafter lange und 4 Klafter breite Brücke ($L = B = 24$ Fuss), deren Endsbäume 12 Zoll im Gevierten ($h = b = 12$ Zoll) hatten, und 4 Fuss von einander entfernt lagen, durch viele Jahre eine hinreichende Festigkeit gewährte. Die Zahl der Endsbäume war also $\frac{24'}{4'} + 1 = 7 = N$. Die Streuhölzer waren 6zöllig ($h' = 6$ Zoll), die Anzüge 9zöllig im Gevierten ($h'' = b' = 9$ Zoll), endlich war bei den Geländern $b'' = 4$ Zoll und $h''' = 5$ Zoll.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichung VI und nimmt das Gewicht eines Kubikfusses Holz, $g = \frac{1}{3}$ Zentner an, so ist

$$\left\{\frac{7.12.12.24.12.100}{1728.3} + \frac{24.12.24.12.6.100}{1728.3} + \frac{2.24.12.9.9.100}{1728.3} + \frac{4.24.12.4.5.100}{1728.3} + \frac{24.12.24.12.3000}{72.72}\right\}\frac{1}{2} = \frac{4\,m.12.12.12.7}{24.12}$$ oder $(5600 + 9600 + 900 + 444 + 48000)\frac{1}{2} = 168\,m$,

woraus $m = 192$ folgt. Wenn man jedoch die beständige und zufällige Belastung in Zentnern berechnet, so folgt $m = 1{,}92$, wofür man $m = 2$ setzen kann.

Hat man auf diese Art den Werth von m ausgemittelt, so bekommt für unsere Aufgabe die Gleichung VI die Gestalt $\frac{N.G + G' + G'' + G''' + G''''}{2} = \frac{8\,b.h^2}{L} \cdot N$ (VII).

Wir haben nun für unser Beispiel die einzelnen Abmessungen vorerst noch anzugeben. Es sey für die Endsbäume $b = 12$ Zoll, $h = 14$ Zoll, für die Streuhölzer $h' = 4$ Zoll, für die Anzüge $b' = h'' = 8$ Zoll, für die Geländer $b'' = 5$ Zoll und $h''' = 6$ Zoll, übrigens die gemeinschaftlichen Maasse $L = 6$ Klafter, $B = 4$ Klafter, $g = \frac{1}{3}$ Zentner und $m = 2$, wo sodann alle Gewichte in Zentnern zu substituiren sind. Werden alle diese Werthe in die Gleichung VII gesetzt und gehörig reduzirt, so findet man $\frac{14\,N + 836\frac{2}{3}}{2} = \frac{392\,N}{9}$, woraus $N = 11{,}4$, wofür man 12 nehmen wird. Da zwischen diesen 12 Endsbäumen 11 Entfernungen für die ganze Brückenbreite von 24 Fuss entstehen, so ist ihre Entfernung von Mitte zu Mitte $= \frac{24}{11}$ Fuss $= 2$ Fuss 2 Zoll.

§. 305.

Für Brücken von grössern Spannweiten und bei einer grössern Belastung würde die Rechnung die Dimensionen der Endsbäume so gross geben, dass sie in der Natur entweder nicht vorgefunden oder nur mit grossen Kosten beigeschafft werden könnten; auch kann sich für eine gegebene Stärke der Endsbäume ihre Zahl so gross ergeben, dass sie der Breite der Brücke nach nicht Raum hätten. In allen solchen Fällen legt man daher die Endsbäume doppelt oder dreifach über einander.

Um das Tragungsvermögen solcher über einander gelegter Balken noch zu vermehren, pflegt man sie nach sanften Curven zu krümmen, und fest mit einander zu verbinden. Zu dem letztern Behufe werden die Balken entweder in der Fläche, mit welcher sie auf einander zu liegen kommen, der ganzen Breite nach in einer Fig. 9 dargestellten
Fig. 9. Tab. 15. zahnförmigen Linie so ausgearbeitet, dass die Verschneidungen beider Balken bei dem Aufeinanderlegen in einander greifen und genau passen, oder aber man schneidet statt dieser zahnförmigen Linie in beiden Balken und zwar in jedem zur Hälfte kleine Rechtecke, die im Ganzen 3 bis 4 Zoll hoch und 4 bis 6 Zoll breit werden, aus, wie es Fig. 10 dar-
Fig. 10. gestellt ist. In beiden Fällen werden sodann die über einander gelegten Balken durch eine entsprechende Anzahl starker Schrauben in der Mitte ihrer Breite nach den Linien a b, c d fest zusammengezogen. Die kleinen Rechtecke Fig. 10 werden dann mit harten, von beiden Seiten gegen einander eingetriebenen hölzernen Keilen verkeilt. Auf gleiche Art verkeilt man auch Fig. 9 die kleinen Zwischenräume, die sich etwa bei den Zähnen zeigen, und die man oft lassen muss, weil die genau passende Ausfertigung fast unerreichbar ist.

Die Fig. 10 dargestellte Art der Verbindung oder Verkuppelung hat offenbar vor der Verschneidung Fig. 9 nebst der leichtern, schnellern und genauern Ausfertigung auch noch den Vorzug, spätere Reparaturen leichter bewirken zu können. Uiberdiess ist ersichtlich, dass der Fig. 10 dargestellte gekuppelte Balken gegen jenen Fig. 9, wenn Holz von gleichen Dimensionen dazu genommen wird, um die Höhe der Verzahnung in Fig. 9 höher bleibt, daher bei der Verbindung zweier Balken nach der Methode Fig. 10 ein grösseres Tragungsvermögen als Fig. 9 erhalten wird.

Solche gekuppelte Balken nennt man gespannte Röste, und sie können bei bedeutenden Längen nicht bloss aus ganzem Holze, sondern auch aus mehreren der Länge nach kunstmässig an einander gefügten Balken hergestellt werden. Längere gespannte Röste werden nach gegebenen Curven gekrümmt ausgeführt. Einen gespannten Rost pflegt man als einen, aus einem einzigen Stamme erzeugten Balken anzusehen, und auch so seine Tragkraft zu berechnen; dem zu Folge hätten also 2 Balken nach ihrer Verkuppelung (ohne Rücksicht auf ihr eigenes Gewicht) nicht das 2fache, sondern das 4fache, und 3 Balken nicht das 3fache, sondern das 9fache Tragungsvermögen. Wenn gleich die Verkuppelung nicht so vollkommen anzunehmen ist, dass das Tragungsvermögen in diesem Verhältnisse dadurch gesteigert werden könnte, so wird es doch in jedem Falle bedeutend vermehrt. Die Vorsicht wird es daher räthlich machen, sich bei der Ausübung auf die Voraussetzung der oben genannten Vermehrung des Tragungsvermögens nicht ganz zu verlassen.

§. 306.

Fig. 11. Wenn ein Balken nicht an beiden Endpunkten A und B, sondern in C und D, von den beiden Endpunkten auf gleichen Entfernungen unterstützt, und die Last Q über seine ganze Länge $AB = l$ gleichförmig vertheilt ist; so ist der Theil der Last, welcher auf AC oder $BD = x$ ruht, offenbar $= \frac{Q \cdot x}{l}$ (I); und der auf $CD = 2y$ ruhende Theil $= \frac{Q \cdot 2y}{l}$ (II).

Für die Spannung des Balkentheiles CD wirkt in der Mitte O nach §. 300 nur die Hälfte der darauf ruhenden gleichförmig vertheilten Last, also nur $\frac{Q \cdot y}{l}$. Die Last, welche auf AC und BD ruht, und in der Mitte von AC und BD als wirkend angenommen werden kann, hat um die Punkte C und D das statische Moment Fig. 11. Tab. 15.

$\frac{Q \cdot x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l}$, mit welchem es auf die Spannung in C und D und zugleich als Gegengewicht auf die Belastung von CD wirkt. Durch diese beiden Momente wird daher ein Theil der mittlern Belastung in O aufgewogen, welcher für jede Seite AC oder BD offenbar $\frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l}$ dividirt durch den Hebelsarm $CO = y$, oder $\frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l \cdot y}$, demnach für beide Seiten $\frac{Q \cdot x^2}{l \cdot y}$ beträgt. Es bleibt also in der Mitte O für die Spannung des Balkens nur der Druck $\frac{Q \cdot y}{l} - \frac{Q \cdot x^2}{l \cdot y}$ übrig (III).

Bezeichnen wir der Kürze wegen das Spannungsmoment eines auf einer Seite befestigten Balkens mit M und das Moment eines auf beiden Seiten frei aufliegenden Balkens mit 4 M′, so erhalten wir für die Spannung in C und in D durch die Belastung (I) von AC und BD nach §. 287 die Gleichung $\frac{Q \cdot x}{l} = \frac{M}{\frac{1}{2} x}$, weil die Last $\frac{Q \cdot x}{l}$ als in dem Schwerpunkte, also auf der Länge $\frac{AC}{2} = \frac{x}{2}$ von C wirkend zu betrachten ist. Hieraus folgt $\frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l} = M$ (IV).

Für die Spannung in O durch die Belastung (III) von CD erhalten wir nach §. 292 die Gleichung $\frac{Q \cdot y}{l} - \frac{Q \cdot x^2}{l \cdot y} = \frac{4 M'}{2 y}$ oder $\frac{Q \cdot y^2}{2 \cdot l} - \frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l} = M'$ (V).

Das Tragungsvermögen des Balkens wird am meisten benützt, wenn derselbe in C, D und O, welche dem Bruche am nächsten sind, **gleiche Spannungen** erfährt. Diese Bedingniss gibt aber aus IV und V die Gleichung $M = M'$ oder $\frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l} = \frac{Q \cdot y^2}{2 \cdot l} - \frac{Q \cdot x^2}{2 \cdot l}$, woraus $2 x^2 = y^2$ oder $x : y = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{,}4 = 5 : 7$ sehr nahe folgt.

Wenn daher auf einem Balken eine Last gleichförmig vertheilt ist, so trägt derselbe am meisten, wenn seine ganze Länge in 24 Theile getheilt wird, und die Entfernungen der Unterlagen C und D von den beiden Enden 5 Theile bekommen, sonach die Unterlagen selbst um 14 Theile von einander abstehen.

Anwendungen dieses Satzes finden vorzüglich bei der Bestimmung der Stellung der Achsen und Räder an Frachtwägen statt, weil hier die Tragbäume durch die beiden Wagenachsen innerhalb ihrer Länge unterstützt werden. Uiberhaupt kann die obige Berechnung in allen jenen Fällen angewendet werden, wo Balken eine gleichförmig vertheilte Last zu tragen bestimmt sind, und nicht an ihren Endpunkten, sondern innerhalb ihrer Länge gestützt werden.

§. 307.

Der Ausdruck für das Tragungsvermögen eines Cylinders oder einer Welle lässt sich auf eine elementare Weise nicht ableiten, und kann nur mittelst der höheren Analysis gefunden werden *).

Fig. 12,13 und 14. Tab. 15.

*) Es sey Fig. 12 ein ovaler Cylinder ohne Schwere, dessen Materie zugleich ausdehnbar und zusammendrückbar ist. Wird derselbe in A C befestigt, z. B. eingemauert, und in B mit einem Gewichte Q belastet, so wird er dadurch gebogen. Hiebei werden nun, wie §. 287 gezeigt wurde, die obern Massentheilchen ausgedehnt, die untern dagegen zusammengedrückt, und in irgend einer horizontalen Fläche f g h i, welche durch die Sehne m n des Querschnittes F E zugleich geht, bleiben die Theilchen ganz ungeändert.

Nehmen wir an, dass die Cohaesionskraft und Repulsionskraft vollkommen gleich wirke, oder dass die Ausdehnung und die Zusammendrückung der Theile, welche ein und dasselbe Gewicht bei derselben Materie und gleicher Fläche zu bewirken im Stande ist, gleich viel betrage, wie es bei kleinen Belastungen durch die Erfahrung bestätigt wird, so wird die Sehne m o n (Fig. 13) in der Mitte der Höhe E F liegen.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir zuerst die Gleichung für die Spannung des horizontalen Flächenelementes N M e c (Fig. 13) aufstellen, und setzen in diesem elyptischen Querschnitte die halbe kleine Achse $F o = b$, die halbe grosse Achse $n o = a$, beschreiben ferner aus o mit der halben kleinen Achse den Kreis F r E k und setzen den Winkel $r o v = \varphi$. Hiernach ist $p o = b \,.\, \mathrm{Sin.}\, \varphi$ und $p q = b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi$; ferner $v p = b \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi$ und daher nach der bekannten Eigenschaft der Elypse $N p = \frac{a}{b} \,.\, b \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi = a \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi$. Die Fläche des Elementes N M e c ist daher $= 2 \,.\, N p q c = 2\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi \,.\, b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi = 2\, a \,.\, b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}^2\, \varphi$, bei welcher die Ausdehnung in allen Punkten gleich gross ist.

Die Fig. 14 zeigt einen Theil des vertikalen Längendurchschnittes durch die Achse des Cylinders von einer beliebigen Länge $o s = \lambda$, und zwar nachdem der Cylinder durch das angehängte Gewicht gebogen wurde. Hierin ist o s der mittlere, keiner Längenänderung unterworfene Cohaesionsfaden, der nach der Biegung des Balkens eine Curve bildet. Die beiden Geraden E o F und H s G sind winkelrecht auf die unveränderte Linie o s, daher ursprünglich, nämlich vor der Biegung, parallel zu einander, nach derselben aber gegen C convergent. Die durch o zu H s G gezogene Parallele E′ o F′ zeigt für die obere Körperhälfte die in dem Dreiecke F o F′ begriffene Grösse der Ausdehnungen, und für die untere Körperhälfte die in dem Dreiecke E′ o E begriffene Grösse der Zusammendrückungen der Massentheile für die Länge o s.

Stellen wir durch $\alpha = F F'$ die Ausdehnung auf die Länge $o s = \lambda$ in F auf der Entfernung $o F = b$ vor, so ist auf der Entfernung $p o = b \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi$ die Ausdehnung $p t = \frac{\alpha}{b} \,.\, b \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi = \alpha \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi$, welche in dem betrachteten Elemente statt findet. Bezeichnet nun K die Kraft, welche ein Längenelement von dem Querschnitte f und der Länge λ um α auszudehnen vermag, so wird für die Fläche $2\, a \,.\, b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}^2\, \varphi$ und für die Ausdehnung $\alpha \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi$ offenbar die Kraft $K \,.\, \frac{2\, a \,.\, b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}^2\, \varphi}{f} \,.\, \alpha \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi$ erfordert, mit welcher auch dieses Element der wirkenden Spannkraft widersteht. Bei der Biegung des Balkens hat diese Kraft von der unbeweglichen Geraden m n (Fig. 13) die Entfernung $p o = b \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi$, mithin das Moment $K \,.\, \frac{2\, a \,.\, b \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}^2\, \varphi}{f} \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, b \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi = K \,.\, \frac{2\, a \,.\, b^2}{f} \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi \,.\, \mathrm{Cos}^2\, \varphi$, dessen Integral $K \,.\, \frac{2\, a \,.\, b^2}{f} \left(\frac{\mathrm{Sin}^3\, \varphi \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi}{4} - \frac{\mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \mathrm{Cos}\, \varphi}{8} + \frac{\varphi}{8} \right)$ das Cohaesionsmoment für die Flä-

Man findet nämlich das Tragungsvermögen eines Cylinders $^{33}/_{56}$tel oder beinahe 0,6tel von dem Tragungsvermögen eines Parallelopipedes, dessen Querschnitt ein, der Kreisfläche des Cylinders umgeschriebenes Quadrat ist, oder dessen Breite und Höhe dem Durchmesser des Cylinders gleich sind.

che n N M m angibt, wo keine Constante beizusetzen ist, weil für $\varphi = 0$ zugleich die Summe der Cohaesionsmomente verschwindet. Fig. 13.

Für die Fläche n F m ist φ der 4te Theil der Peripherie oder $\frac{\pi}{2}$, wenn $\pi = 3{,}14159 \ldots = \frac{22}{7}$, Tab. 15.
und daher die Summe der Cohaesionsmomente für den obern halben Querschnitt $= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a \,.\, b^2$.

Die Summe der Repulsionsmomente für den untern halben Querschnitt hat dieselbe Grösse, weil für jeden Querschnitt nur dann Ruhe oder Gleichgewicht statt finden kann, wenn die Momente der Ausdehnung über der unveränderlichen Linie n o m den Momenten der Zusammendrückung unter derselben Linie n o m gleich werden.

Nach §. 287 ist die Summe aus den Cohaesionsmomenten und Repulsionsmomenten zusammengenommen, oder $2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a \,.\, b^2$ eben so gross, als das Moment des getragenen Gewichtes $Q \,.\, BE$, oder weil die Biegung dort am stärksten ist, wo das Moment von Q am grössten wird, so gibt diess das Moment $Q \,.\, BC = Q \,.\, l$, wenn die Länge des Balkens mit l bezeichnet wird. Wir erhalten daher für einen elyptischen Körper, dessen g r o s s e A c h s e h o r i z o n t a l liegt, die Gleichung $Q \,.\, l = 2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a \,.\, b^2$. Liegt dagegen bei diesem Körper die k l e i n e A c h s e h o r i z o n t a l, so ist $Q \,.\, l = 2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a^2 \,.\, b$. Ist endlich der Körper ein C y l i n d e r, demnach sein Querschnitt ein Kreis, wo $a = b$, so ist $Q \,.\, l = 2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a^3$.

Für ein P a r a l l e l o p i p e d u m ist die Breite des Elementes $NpM = nom$ constant. Setzen wir diese $= B$ und $op = x$, also $NMec = B \,.\, dx$ und die halbe Höhe des Parallelopipedes $Fo = h$, so ist auf gleiche Art der Cohaesionswiderstand dieses Elementes $\frac{K}{f} \cdot \frac{x}{h} \cdot B \,.\, dx$ und sein Moment $\frac{K}{f} \cdot \frac{x^2}{h} \cdot B \,.\, dx$, folglich dessen Integrale $\frac{K}{f} \cdot \frac{B \,.\, x^3}{3h}$. Nehmen wir in diesem Ausdrucke $x = h$, so ist die Summe der Cohaesionsmomente $= \frac{K}{3f} \cdot B \,.\, h^2$, und daher auf gleiche Art, wie oben, $Q' \,.\, l = \frac{2K}{3f} \cdot B \,.\, h^2$.

Vergleicht man nun das Tragungsvermögen eines Cylinders mit jenem eines Parallelopipedes, dessen Querschnitt ein um die Kreisfläche des Cylinders beschriebenes Quadrat ist, wo also $B = 2a$ und $h = a$ wird, so erhält man $Q : Q' = 2 \,.\, \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K}{f} \cdot a^3 : \frac{2K}{3f} \cdot 2a^3 = \frac{3\pi}{16} : 1 = 33 : 56$.

Nennen wir P das Gewicht, welches bei dem so eben betrachteten Parallelopipedum dieselbe Ausdehnung erzeugen würde, wenn es nach der Länge der Cohaesionsfäden wirkte, so würde man nach den Grundsätzen der a b s o l u t e n F e s t i g k e i t bei seiner Querschnittsfläche $B \,.\, 2h = B \,.\, H$ die Gleichung $P = \frac{K}{f} \cdot B \,.\, H$ finden. Es verhält sich also $Q' : P = \frac{H}{6 \,.\, l} : 1$, oder es ist $Q' = \frac{P}{6} \cdot \frac{H}{l}$, d. h. d i e r e l a t i v e F e s t i g k e i t e i n e s P a r a l l e l o p i p e d e s i s t d e m P r o d u k t e a u s d e m s e c h s t e n T h e i l e s e i n e r a b s o l u t e n F e s t i g k e i t i n d a s V e r h ä l t n i s s $\frac{H}{l}$ g l e i c h. Ferner ist bei einem Parallelopipede die absolute Festigkeit eben so gross als die relative, wenn seine Höhe der sechsfachen Länge gleich kommt.

§. 308.

Es sollen mittelst eines Kreuzhaspels Werkstücke von $Q = 12$ Zentner Gewicht aufgezogen werden, wie gross muss der Durchmesser der Welle seyn, wenn sie von Eichenholz genommen wird, und zwischen ihren Auflagen eine Klafter Länge $= l$ erhält?

Nennen wir den unbekannten Durchmesser der Welle x, so wissen wir, dass ein viereckigter Balken von dieser Breite und Höhe in der Mitte zwischen den Auflagen mit Rücksicht auf sein Gewicht nach §. 292 die Last $\frac{4\,m\,.\,x^3}{l} - \frac{G}{2}$ tragen würde. Weil aber der Balken ein Cylinder seyn soll, so ist von dem Tragungsvermögen $\frac{4\,m\,.\,x^3}{l}$ nach dem vorigen §. nur $^{33}/_{56}$ zu nehmen; es ist demnach die von der Welle getragene Last $Q = \frac{33}{56} \cdot \frac{4\,m\,.\,x^3}{l} - \frac{G}{2}$. Bezeichnet g das Gewicht eines Kubikfusses Eichenholz, so ist $G = {}^{11}/_{14}\,.\,x^2\,.\,l\,.\,g$.

Nimmt man nun in unserm Beispiele $Q = 1200$ ℔ und $l = 6$ Fuss, dann $g = 50$ ℔, für m aber von dem für den Bruch nach der Tabelle, S. 297 bestimmten Coeffizienten 1404 nur beiläufig $^1/_{10}$tel oder die runde Zahl von 140 an, so ist

$1200 = \frac{33}{56} \cdot \frac{4\,.\,140}{72} \cdot x^3 - \frac{11}{14} \cdot \frac{72\,.\,50}{1728} \cdot x^2$, oder $x^3 - 0{,}3571\,x^2 = 261{,}818$, woraus der beiläufige Werth $x = \sqrt[3]{261{,}818} = 6{,}4$ Zoll folgt, wofür man 7 Zoll nehmen kann.

Nehmen wir nun an, es sey noch für die Welle des obigen Kreuzhaspels die Stärke oder der Durchmesser der gusseisernen Zapfen zu bestimmen.

Es sey P das Gewicht der Maschine (nämlich der Welle, der daran befestigten Arme etc.) und der ihr aufgelegten zufälligen Last Q, so weit sie von dem Zapfen getragen wird, so wird auf jeder Seite der Zapfen das Gewicht $\frac{P}{2}$ zu tragen haben. Die Länge des Zapfens sey λ, auf welchem die Last $\frac{P}{2}$ ruht und gleich vertheilt vorausgesetzt werden kann; wir können daher die Kraft $\frac{P}{2}$ in der Mitte der Länge λ, also auf der Entfernung $\frac{\lambda}{2}$ von der Welle wirkend denken. Der Zapfen in der Welle ist in Bezug auf den Bruch desselben wie ein, in einer festen Wand eingemauerter Körper zu betrachten, wobei die Kraft $\frac{P}{2}$ an dem Hebelsarme $\frac{\lambda}{2}$, also mit dem Momente $\frac{P\,.\,\lambda}{4}$ aufwärts wirkt. Ist daher x der unbekannte Durchmesser des Zapfens, so ist nach dem Obigen sein Cohaesionsmoment $= {}^{33}/_{56}\,.\,m\,.\,x^3$. Diese beiden Momente müssen einander gleich seyn; wir erhalten demnach $\frac{P\,.\,\lambda}{4} = {}^{33}/_{56}\,.\,m\,.\,x^3$; hieraus $x = \sqrt[3]{\left(\frac{14\,P\,.\,\lambda}{33\,m}\right)}$.

In unserm Beispiele sey die Länge des Zapfens $\lambda = 4$ Zoll; nach der vorigen Berechnung ist $P = Q + G = 1200 + {}^{11}/_{14}\,.\,({}^7/_{12})^2\,.\,6\,.\,50 = 1280$ ℔, wozu wir noch 20 ℔ für die Arme an der Welle oder die Kurbel schlagen, und daher $P = 1300$ ℔ setzen können.

Nehmen wir ferner nach den Versuchen für den Bruch bei Gusseisen S. 304 den Coefficienten m in runder Zahl $= 4000$, oder, weil die Zapfen die Last mit Sicherheit und ohne sich zu biegen tragen sollen, $m = \frac{4000}{3}$, so erhalten wir

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{14 . 1300 . 4 . 3}{33 . 4000}\right)} = \sqrt[3]{1{,}655} = 1{,}18 \text{ Zoll.}$$

Uibrigens ist hier noch zu bemerken, dass diese Rechnung nur für den Fall gültig ist, wenn die an der Maschine wirkende Kraft (K) keinen Druck auf die Zapfen ausübt; wäre diess jedoch der Fall, so muss $P = Q + G + K$ gesetzt, und für diesen Werth die Rechnung durchgeführt werden.

§. 309.

Um das Tragungsvermögen eines abgestutzten Kegels zu finden, wenn er an seinem dickern Ende eingemauert und an dem dünnern belastet ist, wollen wir den grössern Durchmesser $AC = D$, den kleinern $BD = d$ und seine Länge $AB = l$ setzen. Fig. 15. Tab. 15.

Der Querschnitt, in welchem der konische Körper durch eine in B angehängte Last Q bricht, sey mn, der Durchmesser desselben $mn = y$ und die Entfernung von der Last Q, nämlich $op = x$. Die Gleichung für das Gleichgewicht im Augenblicke des Bruches ist daher, wie für einen Cylinder $Q . x = {}^{33}\!/_{56} . m . y^3$ oder $Q = {}^{33}\!/_{56} . m . \frac{y^3}{x}$.

Ergänzen wir die Pyramide ABDC bis zu ihrer Spitze q und setzen die Länge $pq = c$, so ist $c = \frac{l . d}{D - d}$ und $y = \left(\frac{c + x}{c}\right) d$, mithin auch

$Q = \frac{33}{56} . \frac{m . d^3}{c^3} \frac{(c + x)^3}{x}$. Der Balken bricht offenbar dort, wo die kleinste Last Q erfordert wird; es muss also der veränderliche Faktor $\frac{(c + x)^3}{x}$ zu einem Minimum werden *). Dieses findet statt, wenn $x = \frac{c}{2}$ genommen wird. Ein konischer Körper wird sonach durch eine Last Q in jenem Querschnitte gebrochen, der von dem Aufhängungspunkte des Gewichtes halb so weit absteht, als die Spitze des Kegels von demselben Aufhängungspunkte entfernt ist, und das Tragungsvermögen eines solchen Balkens ist daher

$$Q = \frac{33}{56} . \frac{27}{4} . \frac{m . d^3}{c} = 3{,}98 . \frac{m . d^3}{c} .$$

Eine praktische Bestätigung der vorhergehenden Rechnung ergibt sich bei dem Windbruche der Bäume. Man kann offenbar die Kraft des Windes auf der Ober- Fig. 16.

*) Setzt man in der Funktion $\frac{(c + x)^3}{x}$ den Differenzialcoeffizienten $3 x (c + x)^2 - (c + x)^3 = 0$, so gibt diess $3 x - (c + x) = 0$ oder $x = \frac{c}{2}$ als denjenigen Werth von x, für welchen der obige Ausdruck ein Minimum wird.

fläche, welche der Baum dem Winde darbiethet, im Schwerpunkte p dieser Fläche wirkend annehmen. Verlängert man nun die Seiten A a und B b des Kegels A a b B bis zu ihrem Durchschnittspunkte q, so wird der in p wirkende Wind nach dem obigen Satze den Stamm in einem Punkte o brechen, wo $op = \frac{pq}{2}$ ist.

Fig. 16. Tab. 15. Nadelholzbäume, deren Stämme sehr nahe die Gestalt eines Kegels haben, brechen daher in der Gegend der tiefsten Aeste, immer auf einer grössern Höhe über dem Boden. Laubholzbäume dagegen, deren Stämme sich mehr der cylindrischen Form nähern und bei welchen folglich der, durch die Verlängerung der Seiten sich ergebende Punkt q von p weiter entfernt liegt, brechen tiefer an der Wurzel oder werden durch den Wind sehr häufig sammt der Wurzel aus der Erde herausgehoben.

Bei aufmerksamer Beobachtung solcher Windbrüche wird man das Gesagte immer bestätigt finden, wenn der Stamm des Baumes in allen Theilen gleich gesundes Holz enthält; eine Ausnahme hievon wird man nur dann bemerken, wenn der Baum durch einen krankhaften Zustand in irgend einem andern Punkte der Höhe eine geschwächte Stelle hatte.

§. 310.

Bei dem Maschinenwesen tritt manchmal der Fall ein, dass ein Balken oder Längenträger auf zwei Unterlagen frei aufliegt, und über denselben bestimmte Lasten der ganzen Länge nach fortrücken; diess findet z. B. bei den Schienen der Eisenbahnen, bei Brücken u. dgl. statt. Sind nun diese Längenträger aus einem kostspieligen Materiale, z. B. aus Guss- oder gewalztem Eisen hergestellt, so kann man bei derselben Solidität an Material und daher auch an Kosten sparen, wenn man ihnen von dem schwächsten Punkte in der Mitte an gegen beide Unterlagspunkte nach und nach eine geringere Höhe gibt, und die letztere zugleich so bestimmt, dass der Träger in jedem Querschnitte eine gleiche Tragkraft erhält.

Fig. 17. Es sey Fig. 17, A C B m der Längendurchschnitt eines solchen Trägers, welcher an beiden Enden A und B unterstützt ist; auf der Entfernung $CO = x$ von der Mitte C befinde sich die Last Q, so beträgt das Tragungsvermögen dieses Körpers in dem Punkte O, wie nach §. 291 bekannt ist, $Q = \frac{4m.B.H^2.L}{L^2 - 4x^2}$. Setzen wir nun bei dem zu bestimmenden Körper die Breite B und vermöge unserer Voraussetzung das Tragungsvermögen Q unveränderlich, seine mit der Entfernung $x = CO$ veränderliche Höhe aber $y = On$, so gibt vorstehende Gleichung die veränderliche Höhe $y^2 = Q \cdot \frac{L^2 - 4x^2}{4m.B.L}$ (I).

Da diese Gleichung für jeden Werth von x statt findet, so gilt sie auch für die Mitte C, wo $x = 0$ ist, nennen wir daher die Höhe des Körpers in der Mitte $Cm = f$, so ist, wenn diese Werthe in I substituirt werden $f^2 = Q \cdot \frac{L^2}{4m.B.L}$ (II).

Wird die Gleichung I durch II dividirt, so ist $\frac{y^2}{f^2} = \frac{L^2 - 4x^2}{L^2}$ oder $y^2 = \frac{4f^2}{L^2}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)$ (III).

Dieser Ausdruck zeigt, dass die untere Begränzungslinie des Körpers oder AmB eine Elypse sey, bei welcher $\frac{L}{2}$ die grosse und f die kleine halbe Achse ist. Da nun f aus II berechnet werden kann, wenn m durch einen Versuch bestimmt ist, und Q, B und L gegeben sind, so kann mit Hülfe dieser Grössen aus III für jeden willkührlich angenommenen Werth von x die zugehörige Höhe y gefunden, und demnach die Figur des Körpers von gleichförmiger Stärke konstruirt werden. Fig. 17. Tab. 15.

In der Anwendung ist es jedoch unausführbar dem Träger in A und B, wie es die Rechnung gibt, gar keine Höhe zu ertheilen; wir wollen daher bei der im Eingange dieses §. genannten Aufgabe noch die Bestimmung zusetzen, dass die kleinste Höhe des Körpers, nämlich in den beiden Unterlagspunkten, die Grösse AE = BD = h betragen solle.

Nehmen wir nun wieder die Höhe in der Mitte $Cm = f$ und $On = AE + n'n = h + z$ an, so ist für diese Mitte C nach der Gleichung II abermals Fig. 18.

$f^2 = \frac{Q.L^2}{4.m.B.L}$ (IV); auf gleiche Art ist nach I für jeden Punkt auf der Entfernung x von der Mitte $(z + h)^2 = Q\left(\frac{L^2 - 4x^2}{4m.B.L}\right)$ (V).

Wird V durch IV dividirt, so ist $\left(\frac{z+h}{f}\right)^2 = \frac{L^2 - 4x^2}{L^2}$, woraus $z + h = \frac{2f}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)}$ folgt (VI).

Nimmt man in dieser Gleichung $z = 0$ an, so ist $h = \frac{2f}{L} \cdot \sqrt{\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)}$ und $x = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{f^2}\right)}$ (VII); dieser Werth gibt diejenige Entfernung (x) an, bei welcher von der Mitte aus die bedingte Höhe h anfängt, und bis zu den beiden Unterlagspunkten unverändert beibehalten werden muss, um die gegebene Bedingniss der Aufgabe zu erfüllen.

§. 311.

Beispiel. Eine Eisenbahnschiene aus Gusseisen soll zwischen ihren Unterlagen 4 Fuss lang werden und fähig seyn, eine Belastung von 20 Zentner in jedem Punkte ihrer Länge mit gleicher Sicherheit zu tragen; es fragt sich, welche Abmessungen dieselbe erhalten solle.

Die vorangegangenen Untersuchungen über relative Festigkeit der Körper haben gezeigt, dass das Tragungsvermögen derselben bei gleicher Länge und einerlei Masse (gleichem Kubikinhalte) dadurch vortheilhaft vergrössert werde, wenn man ihre Breite oder horizontale Dimension vermindert und dagegen ihre Höhe oder vertikale Dimension in gleichem Verhältnisse vergrössert. Wir wollen daher die unveränderliche Breite der fraglichen Schiene auf $\frac{1}{4}$ Zoll = B festsetzen, und die zugehörige Höhe durch Rechnung bestimmen. Nach den Versuchen S. 304 können wir bei Gusseisen den Coëffizienten m für die relative Festigkeit und zwar für den Bruch eines Körpers mit rechteckigem Querschnitte in einer runden Zahl mit 4000 annehmen, wovon wir jedoch, da die Schiene die anvertraute Last mit Si-

Fig. 18. Tab. 15. cherheit tragen soll, nur ein Drittheil in Rechnung nehmen, also $m = \frac{4000}{3}$ setzen wollen.

Die Gleichung IV gibt, wenn wir L = 48 Zoll, B = ½ Zoll und Q = 2000 ℔ setzen, für die Höhe in der Mitte der Schienenlänge $f = \sqrt{\left(\frac{2000 \cdot 3 \cdot 48}{4 \cdot 4000 \cdot \frac{1}{2}}\right)} = 6$ Zoll.

Soll nun weiters die Schiene auf den beiden Unterlagen an ihren Endpunkten 3 Zoll = h zur Höhe erhalten, so gibt die Gleichung VII die Entfernung von der Mitte aus, bei welcher diese Höhe anzufangen hat $x = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{9}{36}\right)} = 12 \sqrt{3} = 20{,}78$ Zoll.

Die übrigen abnehmenden Höhen der Schiene von der Mitte an (wo die Höhe 6 Zoll ist) bis zum Ende der berechneten Entfernung von 20,78 Zoll (wo sie 3 Zoll ist), gibt für jede Entfernung x die Gleichung VI, nämlich $z + h = \frac{2 \cdot 6}{48} \sqrt{(\frac{1}{4} \cdot 48^2 - x^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(576 - x^2)}$.

Setzt man hier $x = 0$, so ist $z + h = 6$ Zoll;
für $x = 5$ Zoll, ist $z + h = 5{,}87$ Zoll;
für $x = 10$ Zoll, ist $z + h = 5{,}45$ Zoll;
für $x = 15$ Zoll, ist $z + h = 4{,}68$ Zoll;
für $x = 20$ Zoll, ist $z + h = 3{,}32$ Zoll.

Die Verzeichnung der Schienenform wird nun leicht bewirkt, wenn man in der obern wagerechten Begränzungslinie A B der Schiene von der Mitte C aus, nach beiden Seiten die angenommenen Entfernungen x oder C O als Abscissen, und die berechneten Höhen z + h oder O n in den zugehörigen Punkten als Ordinaten nach unten aufträgt, und durch alle erhaltenen Punkte eine fortlaufende Linie B n m D zieht.

Fig. 19. Fig. 20. In der Ausübung wird der Querschnitt der Schiene nicht in der hier vorausgesetzten rechtwinkeligten Form Fig. 19 angenommen, sondern an der Oberfläche durch die beiderseits angegossenen elyptischen Leisten a und b (Fig. 20) von beiläufig 1 Zoll Stärke vermehrt; die grösste Breite der Schiene a b beträgt auf diese Art bei den englischen Eisenbahnen 2 bis 2½ Zoll. Durch diese Leisten a und b wird der Vortheil erreicht, dass das Geleise oder die Bahn für das Rad breiter, und die Abnützung der Schiene, vorzüglich aber jene des Rades bedeutend vermindert wird. Die Tragungskraft der Schiene wird ebenfalls grösser, und man pflegt zur Vermehrung derselben auch an dem untern Rande der Schiene ähnliche Leisten C und D angiessen zu lassen; hiedurch wird nun das Querprofil Fig. 21 erhalten, nach welchem die meisten gusseisernen oder gewalzten Schienen Fig. 21. bei den Eisenbahnen in England und Frankreich konstruirt sind. Die besondere Einrichtung der Schienen an ihren Endpunkten, ihre Unterstützung, Zusammenfügung und Befestigung wird umständlicher in dem VII[ten] Kapitel abgehandelt werden.

§. 312.

Man fordert allgemein, dass die Bestandtheile einer Maschine oder eines Gebäudes nicht bloss gegen den Bruch sicher gestellt werden, sondern auch ihren festen Stand gegen Biegung und Schwankungen aufrecht erhalten; wir müssen

daher noch die Biegung der Körper berücksichtigen. Es ist bekannt, dass lange Stäbe oder Balken, wenn sie auch eine darauf liegende Last vollkommen zu tragen vermögen, doch hiebei oft eine so grosse Biegung annehmen, dass diese in anderer Rücksicht dem Zwecke der Maschine hinderlich wird, indem nämlich die bewegten Bestandtheile schlottern, die Zähne und Getriebe aus dem Eingriffe kommen u. s. w. Derselbe Fall tritt ein, wenn die Endsbäume bei einer Brücke zwar die darauf befindliche Last tragen, sich jedoch in ihrer Mitte biegen, wodurch nicht bloss die Form der Bögen verunstaltet wird, sondern auch ein lebhafter Verkehr über die Brücke nicht statt finden kann.

Wir haben bereits oben §. 283 erwiesen, dass bei dem Bruche zweier gleichartiger prismatischer Körper, die statischen Momente der an ihren Endpunkten angehängten Gewichte $L . Q : l . q$ sich wie $B . H^2 : b . h^2$ verhalten. Im §. 284 wurde gezeigt, dass dieselbe Gleichheit der Verhältnisse auch statt finde, wenn die Ausdehnungen Ao, ae an der Oberfläche der Balken AG', ag' auch ausser dem Zustande des Bruches einander gleich ($Ao = ae$), folglich die Spannkräfte dieser Oberflächen ebenfalls einander gleich sind. Wenn aber der erste Körper an seiner Oberfläche mehr ausgedehnt oder die Länge AG' mehr gespannt wird, als die Länge ag' des zweiten oder Ao' grösser als ae ist, so werden auch die hiezu erforderlichen Spannkräfte sich verhalten, wie $\frac{Ao'}{o'G'} : \frac{ae}{eg'}$, oder wenn wir die Ausdehnung des ersten $Ao' = E$ und die Länge $o'G' = CG = L$, und eben so die Ausdehnung des zweiten $ae = e$, und die Länge $eg' = cg = l$ setzen, so ergibt sich von selbst, dass wir zur Berechnung der Biegungsmomente zu dem Verhältnisse $B . H^2 : b . h^2$ noch das Verhältniss $\frac{E}{L} : \frac{e}{l}$ beifügen müssen. Wir erhalten demnach Fig. 22. Tab. 15.

$Q . L : q . l = B . H^2 . \frac{E}{L} : b . h^2 . \frac{e}{l}$. Nun gibt aber die Aehnlichkeit der Dreiecke $Ao'C$ und CGO die Proportion $Ao' : AC = CO : CG$ oder $E : \frac{H}{2} = CO : L$, folglich, wenn wir die Tiefe CO oder den sogenannten Pfeil des Bogens $CG = U$ setzen, erhalten wir $E = \frac{H . U}{2 L}$. Auf gleiche Art ist für den zweiten Körper $e = \frac{h . u}{2 l}$.

Setzen wir nun diese Werthe an die Stelle von E und e in die obige Proportion, so erhalten wir $Q . L : q . l = \frac{B . H^3 . U}{L^2} : \frac{b . h^3 . u}{l^2}$, folglich

$Q : q = U . B \left(\frac{H}{L}\right)^3 : u . b \left(\frac{h}{l}\right)^3$, d. h. die Lasten Q, q, welche an den Endpunkten zweier elastischer Stäbe angehängt werden können, verhalten sich wie die Produkte aus den hiedurch bewirkten Senkungen oder Pfeilen U, u in die Breiten der Balken B, b, und in die Würfel der Verhältnisse der Höhe zur Länge $\left(\frac{H}{L}\right)^3$, und $\left(\frac{h}{l}\right)^3$. Umgekehrt folgt hieraus die allgemeine Regel, dass die Biegungen (Pfeile) zweier gleichartiger Balken den Produkten aus den aufgelegten Gewichten in

die Würfel der Längen, und verkehrt den Produkten aus den Breiten in die Würfel der Höhen proportional sind, oder dass sich $U : u = \frac{Q \cdot L^3}{B \cdot H^3} : \frac{q \cdot l^3}{b \cdot h^3}$ verhält.

§. 313.

Bei Versuchen über die Biegungen elastischer Stäbe oder Balken ist es bequemer, so wie für den praktischen Gebrauch angemessener, die Balken an beiden Enden auf Unterlagen zu legen, und sie in der Mitte mit Gewichten zu beschweren, statt sie bloss an einem Ende zu befestigen, und an dem andern zu belasten. Setzen wir die Last

Fig. 23. Tab. 15. in der Mitte $= G$, so ist der Druck auf jede Unterlage $Q = \frac{G}{2}$. Es ist demnach für die eine Seite $\frac{G}{2} : \frac{g}{2} = \frac{B \cdot H^3 \cdot U}{L^3} : \frac{b \cdot h^3 \cdot u}{l^3}$. Wird hiezu die gleiche Proportion für die andere Seite addirt, so erhalten wir $G : g = \frac{2 B \cdot H^3 \cdot U}{L^3} : \frac{2 b \cdot h^3 \cdot u}{l^3}$. Wenn wir aber unter L die ganze Länge MN des Balkens oder die Entfernung zwischen den Auflagen verstehen wollen, so müssen wir in der letzten Proportion zwar $\frac{L}{2}$ statt L setzen, da es sich jedoch hier nur um die Verhältnisse $\frac{L}{2} : \frac{l}{2} = L : l$ handelt, so haben wir überhaupt $G : g = U \cdot B \left(\frac{H}{L}\right)^3 : u \cdot b \left(\frac{h}{l}\right)^3$, wo G und g die in der Mitte der Stäbe angehängten Gewichte, U und u die Einsenkungen OH und oh, B und b die Breiten, H und h die Höhen und L, l die Längen der Balken oder die Entfernungen zwischen ihren Auflagspunkten vorstellen. Hieraus folgt nun auch $U : u = \frac{G}{B} \left(\frac{L}{H}\right)^3 : \frac{g}{b} \left(\frac{l}{h}\right)^3$. Aus dieser Proportion lässt sich die Biegung U eines Stabes von gegebenen Dimensionen, welche durch das aufgelegte Gewicht G bewirkt wird, berechnen, wenn für einen andern Stab von derselben Materie die zugehörigen Maasse b, h, l, g und u gegeben sind. *)

*) Zur bessern Aufklärung dieses Gegenstandes wollen wir aus der Theorie der elastischen Linien Folgendes anführen:

Fig. 24. Es sey AMNB die Mittellinie eines elastischen Stabes A′ A″ B″ B′, welcher an einem Ende bei A′ A″ unveränderlich festgehalten, und durch das am andern Ende B angehängte Gewicht p aus der horizontalen Richtung A′ E in die krumme Linie A′ M′ O′ B′ herabgebogen wird. Zur Bestimmung der krummen Mittellinie AMNB nehme man einen willkührlichen Theil MN derselben, jedoch von einer solchen Grösse, dass die Linie MN und die dazu Parallelen mn und m′ n′ als gerade Linien betrachtet, sonach das Element mnn′m′ des Stabes hinsichtlich seiner Ausdehnung und Elasticität mit einem andern geraden Stabe von derselben Materie verglichen und hiebei die §. 238 (IV) angeführte Proportion $q : Q = \frac{f \cdot \alpha}{l} : \frac{F \cdot \alpha'}{L}$ angewendet werden könne.

Setzen wir zu dieser Absicht die Breite unseres Prisma $= b$, die Entfernung des Elementes mnn′m′ von der Mittellinie MN oder $Nn = x$, $nn' = dx$, so ist die Querschnittsfläche dieses Elementes $f = b \cdot dx$. Da der angenommene Theil M′ M″ N′ N″ durch die Biegung in die Lage

§. 314.

Zur Bestimmung der Festigkeit, die mit biegsamen Körpern zu erreichen ist, werden nun abermals genaue Versuche erfordert. Wir finden solche Versuche in den neuern

M′M″ O′ O″ versetzt, folglich an seiner Oberfläche um N′ O′ ausgedehnt, und an seiner untern Seite um N″ O″ verkürzt worden, so sieht man, dass auf gleiche Art das Element m n um n o verlängert, folglich an die Stelle des $\frac{\alpha}{l}$ das Verhältniss $\frac{n\,o}{m\,n}$ gesetzt werden müsse. Weil aber die Dreiecke n N o und M C N einander ähnlich sind, so ist $\frac{n\,o}{m\,n} = \frac{N\,n}{M\,C}$, und wenn wir den Krümmungshalbmesser des Bogens M N oder $M\,C = r$ setzen, so ist $\frac{\alpha}{l} = \frac{x}{r}$, folglich haben wir die Proportion $d\,q : Q = \frac{f.\alpha}{l} : \frac{F.\alpha'}{L} = \frac{b.x.dx}{r} : \frac{F.\alpha'}{L}$. Setzen wir an die Stelle der Querschnittsfläche des zur Vergleichung angenommenen Stabes $F = B.H$, so ist das Gewicht, welches das Element m n n′ m′ von der Länge m n auf die Länge m o ausdehnt $= d\,q = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.x.dx}{r}$. Fig. 24. Tab. 15.

Setzen wir nun die am Hebelsarme N P angebrachte und mit d q am Hebelsarme $N\,n = x$ im Gleichgewichte befindliche Kraft = d p, so folgt, wegen $N\,P = t\,P - t\,N = E - y$, für die Gleichheit der Momente, $x.\,d\,q = (E - y)\;d\,p = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.x^2.dx}{r}$.

Da nun für alle Punkte der Höhe N n n′ N′ die Grössen E, y und r sich nicht ändern, so gibt das Integrale dieser Gleichung $(E - y)\;p = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.x^2}{3\,r}$; folglich ist, wenn wir an die Stelle von x die halbe Höhe des Stabes $N\,N' = \frac{h}{2}$ setzen, $(E - y)\;p = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{3.8\,r}$. Weil aber an der untern Hälfte des Stabes von N bis N″ das Moment der rückwirkenden Kraft (Repulsionskraft) dem Cohaesionsmomente von N bis N′ das Gleichgewicht hält, und beide zusammen dem Momente der Last p am Hebelsarme N P entgegen wirken, so haben wir

$(E - y)\;p = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{3.4\,r}$. Diess ist die allgemeine Gleichung für alle Punkte der krummen Linie A M N B.

Um aus dieser Gleichung den Krümmungshalbmesser r wegzuschaffen, wollen wir $A\,t = u$, $t\,N = y$ und den Winkel $M\,N\,J = w$, sonach $\text{Tang}\; w = \frac{d\,u}{d\,y}$ setzen. Da der Winkel $M\,C\,N = M\,N\,J - A\,M\,S = d\,w$ ist, und weil $\frac{d\,w}{\text{Cos}^2\,w} = d\,\frac{d\,u}{d\,y}$, so können wir für unsern Zweck, wo der Balken nur w e n i g g e b o g e n werden darf, für alle Fälle $\text{Cos}\; w = 1$ setzen, wornach $d\,w = d\,\frac{d\,u}{d\,y}$ ist. Nehmen wir nun in dem Dreiecke N C M die Länge $C\mu = 1$, folglich $\mu\,v = d\,w$ an, so ist $d\,w : 1 = M\,N : M\,C$; weil aber wegen der geringen Grösse des Winkels M N J auch $M\,N = J\,N = d\,y$ gesetzt werden kann, so haben wir $\frac{d\,y}{d\,w} = M\,C = r$. Wird nun dieser Werth in die letzte Gleichung gesetzt, so erhalten wir $p\,(E - y) = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{12.dy} \cdot d\,\frac{d\,u}{d\,y}$. Das Integrale dieser Gleichung gibt $p\left(E.y - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{12} \cdot \frac{d\,u}{d\,y}$, und wenn diese Gleichung noch einmal integrirt wird, so erhalten wir $p\left(\frac{E.y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) = \frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{12} \cdot u$.

Abhandlungen über die Festigkeit der Körper, ersehen jedoch aus ihrer Vergleichung, dass sie selbst bei gleichen Materien sehr verschiedene Resultate geliefert haben.

Fig. 24. Tab. 15. Setzen wir nun in dieser Gleichung $y = TB = E$ und $u = AT = U$, so ist $\frac{p \cdot E^3}{3} = \frac{Q \cdot L}{B \cdot H \cdot \alpha'} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot U$ oder $\frac{p}{Q} = \frac{b \cdot h^3 \cdot U}{4 E^3} \cdot \frac{L}{B \cdot H \cdot \alpha'}$.

Wird aber der Stab auf zwei Unterlagen gelegt, und in der Mitte mit $2p = G$ belastet, so muss statt E die halbe Entfernung zwischen den Auflagspunkten, nämlich $\frac{l}{2}$ gesetzt werden; wir erhalten daher $\frac{G}{Q} = \frac{2p}{Q} = \frac{2b \cdot h^3 \cdot U}{4 \cdot \frac{l^3}{8}} \cdot \frac{L}{B \cdot H \cdot \alpha'} = \frac{4b \cdot h^3 \cdot U}{l^3} \cdot \frac{L}{B \cdot H \cdot \alpha'}$. Hieraus folgt $U : \alpha' = \frac{G \cdot l^3}{4b \cdot h^3} : \frac{Q \cdot L}{B \cdot H}$ d. h. es verhält sich die Biegung des Stabes in der Mitte oder der sogenannte Pfeil (U) der krummen Linie zur Ausdehnung (α') des zur Vergleichung angenommenen Stabes, wie die Grössen $\frac{G \cdot l^3}{4b \cdot h^3} : \frac{Q \cdot L}{B \cdot H}$.

Aus dieser Proportion ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1tens. Wenn der Stab, welcher zur Vergleichung angenommen wurde, auf zwei Unterlagen gelegt und in der Mitte mit derselben Last Q, welche ihn vorher ausgedehnt hat, beschwert wird, so ist $l = L$, $b = B$, $h = H$ und $G = Q$, demnach verhält sich $U : \alpha' = \frac{l^2}{4h^2} : 1 = \frac{l^2}{4} : h^2$, d. h. bei einem jeden vollkommen elastischen Körper verhält sich die Biegung zur Längenausdehnung, wie das Quadrat der halben Länge zum Quadrate der Höhe desselben Stabes. Da nun bekannt ist, dass alle Körper, so lange ihre Biegungen sehr klein bleiben, als vollkommen elastisch betrachtet werden können, so lässt sich auch unter solchen Umständen für alle Körper die Ausdehnung, die sie durch eine bestimmte Last Q erleiden, aus jener Biegung berechnen, welche dieselbe Last (Q) bei diesem Körper verursacht hat. Diese Methode gewährt vorzüglich in dem Falle einen grossen Vortheil, wenn die Längenausdehnung der Körper zu klein ist, um sie unmittelbar messen zu können, weil die Biegung, da $\frac{l^2}{4}$ grösser als h^2 ist, eine hinreichende Grösse hat. Umgekehrt kann man bei einem Körper, dessen Ausdehnung gegeben ist, die Biegung finden, welche dasselbe Gewicht verursacht.

Beispiel. Ein Stab sey 2 Fuss lang und 1 Zoll hoch, so ist $U : \alpha' = 144 : 1$ oder die Biegung in der Mitte ist 144mal grösser als die Längenausdehnung, wenn die Belastungen in beiden Fällen gleich sind.

2tens. In der obigen Gleichung $\frac{G}{Q} = \frac{4b \cdot h^3 \cdot U}{l^3} \cdot \frac{L}{B \cdot H \cdot \alpha'}$ kommt sowohl U als α' in der ersten Potenz vor; wenn also alle übrigen Grössen dieselben sind, so ist U dem α' proportional. Hieraus sehen wir, dass sich bei der Biegung dieselben Gesetze finden müssen, die bei der Ausdehnung statt finden. Diess wird durch alle über diesen Gegenstand angestellten Versuche bestätigt.

3tens. Wenn es sich nur um die Biegung allein handelt, welche zwei Körper von derselben Materie aber ungleichen Dimensionen bei verschiedenen Belastungen erfahren, so fällt in diesem Falle der Coefficient, welcher den zur Vergleichung angenommenen Stab betrifft, nämlich $\frac{Q \cdot L}{B \cdot H \cdot \alpha'}$ weg, und wir erhalten für die zwei Körper die Proportion $P : p = \frac{B \cdot H^3 \cdot U}{L^3} : \frac{b \cdot h^3 \cdot u}{l^3}$ oder $U : u = \frac{P \cdot L^3}{B \cdot H^3} : \frac{p \cdot l^3}{b \cdot h^3}$, welches dieselbe Proportion ist, die oben (wo Q statt P steht) bloss durch elementare Betrachtungen abgeleitet wurde.

Die bisherigen Beobachtungen zeigen, dass diese Ungleichheiten vorzüglich in folgenden Umständen ihren Grund haben. Der Stand des Baumes, ob er nämlich an einem feuchten oder trockenen Orte gewachsen ist, dem Sonnenscheine, Wind und Wetter mehr oder weniger ausgesetzt war, endlich auch die Zeit des Fällens üben einen wesentlichen Einfluss auf die Festigkeit der Hölzer aus. Ferner ist in jedem gesunden Baume das Holz vom Kerne aus gewöhnlich sehr verschieden; dort wo die Jahresringe am dichtesten sind, ist es am stärksten. Bei einem gesunden Stamme hat das Holz an der Wurzel mehr Festigkeit, als am Wipfel; wird endlich ein Holzstück so zerschnitten, dass die Holzringe vertikal oder mit der Richtung der Last parallel laufen, so besitzt dasselbe mehr Festigkeit, als wenn man die Holzringe wagerecht legt. Aus allen diesen Gründen kann man bei Versuchen mit Holz keine solche Uibereinstimmung erwarten, als es bei dem Eisen und andern Metallen der Fall ist. Aber auch bei dem Eisen geben die Versuche über die Biegung desselben wegen der ungleichen Beschaffenheit unserer Eisenstäbe, worüber die Gründe §. 276 angegeben wurden, ungleiche Resultate; dasselbe findet bei allen andern Metallen statt.

Man ist in dieser Hinsicht allgemein darüber einverstanden, dass alle, hinsichtlich der Biegung untersuchte Körper nur bis zu einer gewissen Gränze vollkommene Elasticität besitzen, bei deren Uiberschreitung die Körper mehr ausgedehnt werden, als es den, bei den ersten Versuchen mit denselben Körpern beobachteten Gesetzen der Elasticität gemäss ist. Werden nämlich die Belastungen sehr vergrössert oder die Anstrengungen der Körper gleichsam überspannt, so besitzen die letztern nicht mehr das Vermögen nach abgenommener Last zu ihrem ursprünglichen Stande wieder zurückzukehren, indem sie den aufgelegten grössern Belastungen immer mehr nachgeben. Werden endlich die Körper durch eine längere Zeit in diesem Zustande der Uiberspannung gelassen, so kann dann der Bruch von der blossen Fortdauer dieser grössern Belastung herbeigeführt werden. Obgleich diese Erfahrungen keinem Zweifel unterliegen, so war man doch bisher nicht im Stande über die Gränzen der Elasticität bestimmte Gesetze anzugeben oder sie durch eine Rechnung zu begründen, auch haben die bisherigen Schriftsteller sich überhaupt mehr bemüht, die Umstände, unter welchen der Bruch erfolgt, zu berücksichtigen und die Hindernisse, welche einer diessfälligen Bestimmung im Wege stehen, darzustellen; man hat sonach bloss nach sogenannten praktischen Urtheilen geglaubt, dass es für alle Fälle hinreichen werde, dem Eisen bloss die Hälfte der Last, dem Holze aber nur den dritten oder vierten Theil jenes Gewichtes mit Sicherheit auflegen zu können, wovon den Versuchen zu Folge der Bruch erfolgen würde.

Da bei dieser praktischen Regel die Biegung gar nicht berücksichtigt wird, jedoch, so wie bereits oben §. 271 bei den Kettenbrücken gezeigt worden, mehrere Fälle vorkommen, wo selbst geringe Biegungen Nachtheile nach sich ziehen, und da es zur Vermeidung derselben erwünschlich ist, auch für die Maasse der Biegung eine bestimmte Regel zu besitzen, so wurden bei dem technischen Institute zu Prag nebst den bereits oben über die Festigkeit, Elasticität und Ausdehnung des Eisens angeführten Versuchen, auch noch später (im November 1830) ähnliche Versuche, vorzüglich über die Biegung der Hölzer angestellt, weil es wohl keinem Zweifel unter-

liegt, dass der Gebrauch des wohlfeilern, in hinreichender Anzahl vorhandenen Holzes auf dem festen Lande gegen das Gusseisen noch lange den Vorzug behaupten wird.

§. 315.

Fig. 1 bis 4. Tab. 16. Der Apparat, dessen man sich bei den Versuchen über die Biegung der Hölzer im technischen Institute bediente, erscheint Fig. 1, 2, 3 und 4, Tab. 16 abgebildet. Derselbe bestand aus dem hinlänglich starken hölzernen Gerüste DEFG, worauf der zu prüfende Stab B gelegt wurde. Um die Verrückung des Stabes zu beseitigen wurden auf die Gerüstbalken D und F vorerst Holzstücke von der Form, N wie sie Fig. 4 im Grundrisse und Durchschnitte zeigt, befestigt, in welche der viereckige Stab mit seinem untern Theile genau passte. In der Mitte des Stabes wurde ein ähnliches, sattelförmiges kurzes Holzstück O (Fig. 3) welches unten abgerundet und oben mit einer Schneide versehen ist, abermals quer über den Stab gelegt, welches in seiner Mitte eingeschnitten war, um den Bügel JKL aufzunehmen, an welchem die Wagschale LM befestigt war. Quer über den Sattel, welcher oberhalb mit einer Schneide versehen war, wurde der hölzerne Fühlhebel mCA aufgelegt, dessen Spitze A in einen Draht auslief. Dieser Hebel wurde bei Q durch ein Gegengewicht so weit ausgeglichen, damit derselbe den auf dem Stabe aufgesetzten Sattel zwar immer berühre, jedoch keinen Druck auf denselben ausübe. Die Skale AH war senkrecht aufgestellt, in Linien getheilt, und der Fühlhebel zeigte an derselben in der $\frac{CA}{Cm} = \frac{75\,\text{Zoll}}{5\,\text{Zoll}} =$ 15fachen Vergrösserung die Senkungen des versuchten Holzstabes für jedes auf die Wagschale gelegte Gewicht an. Da die Spitze des Sattels E sich genau in der vertikalen Linie ch mit dem Stabe herabbewegte, und die Skale AH wie bereits erwähnt wurde, ebenfalls vertikal aufgestellt war, so waren auch die Dreiecke mcC und maA in einer jeden Lage des Fühlhebels einander ähnlich, folglich musste auch der an der Skale beschriebene Raum immer genau 15mal grösser seyn, als die Senkung des geprüften Stabes in der Mitte betrug.

§. 316.

Der erste Versuch dieser Art wurde mit einem Stabe von Eichenholz von möglichst gleichförmigem Gefüge angestellt. Der Querschnitt desselben betrug genau einen N. Oe. Quadrat-Zoll, und die horizontale Entfernung der zwei Unterlagspunkte, welche hier als die Länge des Stabes anzusehen ist, 446 Linien = 37″ 2‴. Nachstehende Tabelle enthält die ganze Versuchsreihe mit diesem Stabe, welche genau auf dieselbe Art zu lesen ist, wie es §. 259 bei dem Versuche mit dem Clavierdrahte der Fall war.

Versuchsreihe.	Bleibende Biegung des Holzstabes.	Angehängte Gewichte = g in N. Oe. Pfunden.													
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
		15fache Biegung des geprüften Holzstabes in N. Oe. Linien.													
0	0														
1	0	16													
2	0	16	32												
3	0	16	32,5	48,5											
4	0,5	17	33	49	65										
5	1	17	34	50	66	82									
6	1	17	35	51	67	83	99								
7	1	18	36	52	67,5	84	100,5	116,5							
8	2	21,5	38	54	70	86	102	118	134,5						
9	3	22,5	39,5	56	72	88	104,5	121	137,5	153,5					
10	5	25	42	59	75,5	92	108	124	141	157	173				
11	8	28	45	62	78	95	111	128	144,5	161	178	194			
12	12	32	49	66	83	99	116	133	150	167	184	200	216		
13	17	35	53	70	87	104	121	138	155	172	189	206	223	239	
14	22	41	59	76,5	94	111	128	145	162	179	196	213	230	247	263,5

Bei der folgenden Belastung von 150 ℔ war die Biegung 288, bei 160 ℔ war sie 314, bei 170 ℔ betrug sie 341, bei 180 ℔ endlich erfolgte der gänzliche Bruch des versuchten Holzstabes.

§. 317.

Um aus diesen Versuchsreihen das Gesetz zu finden, nach welchem die letzten in jeder horizontalen Reihe angeführten Einsinkungen den in jeder Columne darüber stehenden Gewichten entsprechend fortlaufen, wollen wir wieder, wie §. 260, diese Zahlen zusammenstellen, wie auf der folgenden Seite zu sehen ist.

Aus den in der 4ten Columne beigefügten Differenzen ersieht man, dass die Biegung Anfangs eben so, wie es bei der Ausdehnung des Eisens der Fall war, den aufgelegten Gewichten proportional blieb, später jedoch immer grösser wurde. Bloss die letzten Versuche zeigen Irregularitäten, welche daher rühren, weil der Stab bei der Belastung über 140 ℔ bereits im Bruche begriffen war, und bei grösseren Belastungen die Zeit, nach welcher der Stab ohne weitere Einsinkung ruhig an seiner Stelle geblieben wäre, nicht abgewartet werden konnte.

Versuchs-Nro.	Angehängtes Gewicht g.	15fache Biegung u.	Differenzen.
	N. Oe. ℔.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.
0	0	0	
1	10	16	
2	20	32	16
3	30	48,5	16,5
4	40	65	16,5
5	50	82	17
6	60	99	17
7	70	116,5	17,5
8	80	134,5	18
9	90	153,5	19
10	100	173	19,5
11	110	194	21
12	120	216	22
13	130	239	23
14	140	263,5	24,5
15	150	288	24,5
16	160	314	26
17	170	341	27

Die Ursache der abwärts immer grösser werdenden Differenzen liegt wie bei dem Eisen in dem Umstande, dass das Holz, wenn es mehr beschwert wird, eine **bleibende Biegung** annimmt, welche daher von der, durch den Zeiger angegebenen Biegung erst abgezogen werden muss, um die Wirkung des aufgelegten Gewichtes und den Elasticitätszustand des Holzes richtig zu beurtheilen.

Um demnach ein allgemeines Gesetz für die Biegung aufzustellen, können wir uns des §. 264 für die Festigkeit aller Körper allgemein abgeleiteten Ausdruckes $g = u\,(A - B\,.\,u)$ oder $\frac{g}{u} = A - B\,.\,u$ abermals bedienen, wo unter g das in der Mitte des Stabes angehängte Gewicht (mit Einschluss des Gewichtes der Wagschale sammt Sattel und des halben Gewichtes des Stabes), dann unter u die in der Mitte des Stabes bewirkte Biegung (15mal vergrössert) verstanden wird. Durch Substitution in diesen allgemeinen Ausdruck ergeben sich nunmehr für die ersten 10 Versuche, bei denen die meiste Regularität statt fand, folgende Gleichungen:

$$\frac{10}{16} = 0{,}625000 = A - 16\ B$$
$$\frac{20}{32} = 0{,}625000 = A - 32\ B$$
$$\frac{30}{48{,}5} = 0{,}618557 = A - 48{,}5\ B$$
$$\frac{40}{65} = 0{,}615385 = A - 65\ B$$
$$\frac{50}{82} = 0{,}609756 = A - 82\ B$$

Werden diese Gleichungen addirt, so ist:

$$3{,}093698 = 5\ A - 243{,}5\ B \quad \text{(I)}.$$

$$\frac{60}{99} = 0{,}606061 = A - 99\ B$$
$$\frac{70}{116{,}5} = 0{,}600858 = A - 116{,}5\ B$$
$$\frac{80}{134{,}5} = 0{,}594796 = A - 134{,}5\ B$$
$$\frac{90}{153{,}5} = 0{,}586319 = A - 153{,}5\ B$$
$$\frac{100}{173} = 0{,}578035 = A - 173\ B$$

$$2{,}966069 = 5\ A - 676{,}5\ B \quad \text{(II)}.$$

Werden die Gleichungen I und II addirt, so ist $6{,}059767 = 10\,A - 920\,B$ (III), und wird II von I subtrahirt, so ist $0{,}127629 = 433\,B$, woraus $B = \frac{0{,}127629}{433}$ oder $B = \frac{1}{3393}$ folgt (IV).

Die Substitution dieses Werthes in III gibt $A = 0{,}633091$ (V).

Substituiren wir endlich diese Werthe für A und B in die erste Gleichung, so ergibt sich $g = u\left(0{,}633091 - \frac{u}{3393}\right)$, welches die Gleichung zwischen dem in der Mitte angehängten Gewichte g und der dadurch bewirkten Biegung u ist.

Da jedoch gewöhnlich das aufgelegte Gewicht gegeben ist, und die Biegung hiezu gesucht wird, so wollen wir in der allgemeinen Gleichung $g = u\,(A - B\,.\,u)$ oder $-\frac{g}{B} = -\frac{u\,.\,A}{B} + u^2$ beiderseits $\left(\frac{A}{2\,B}\right)^2$ addiren, und hieraus die Wurzel ziehen, so ist $\sqrt{\left\{\left(\frac{A}{2\,B}\right)^2 - \frac{g}{B}\right\}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{A}{2\,B}\right)^2 - \frac{u\,.\,A}{B} + u^2\right\}}$, oder $\frac{A}{2\,B}\sqrt{\left(1 - \frac{g\,.\,4B}{A^2}\right)} = \frac{A}{2\,B} - u$, woraus nunmehr $u = \frac{A}{2\,B}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g\,.\,4B}{A^2}\right)}\right\}$ folgt.

Wird in diese allgemeine Gleichung, welche **die Biegung aller Körper bei eintretenden Belastungen** ausdrückt, für den oben angeführten, bei dem Versuche gebrauchten Stab von Eichenholz der Werth $\frac{A}{2\,B} = 1074$ und $\frac{4B}{A^2} = \frac{1}{340}$ substituirt, so erhalten wir für diesen Stab $u = 1074\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{340}\right)}\right\}$. Dieser Ausdruck ist dem §. 262 für die Ausdehnung der Drähte aufgestellten vollkommen ähnlich, nur wird hier die Biegung u unmittelbar so gefunden, wie sie bei den Versuchen an der Skale 15mal vergrössert angezeigt wurde. Will man daher die wirklich eingetretene Biegung berechnen, so muss der obige Werth für u mit 15 dividirt werden, und wir erhalten $\frac{u}{15} = 71{,}6\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{340}\right)}\right\}$. Wir ersehen hieraus, dass die **Biegung** der Körper denselben Gesetzen wie ihre **Ausdehnung** unterliegt.

§. 318.

Zur Bestätigung der Richtigkeit unserer Rechnung, wollen wir die im vorigen §. angeführte Versuchsreihe nach der für die 15fache Biegung aufgestellten Formel $u = 1074\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{340}\right)}\right\}$ berechnen. Wir erhalten hiedurch folgende Tabelle:

I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Eichenstabes nach der Beobachtung, u.	III. nach der Rechnung, u.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
N.Oe. ℔	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin	N. Oe. Lin.
10	16	15,9	+ 0,1	15,8	+ 0,1
20	32	32,1	— 0,1	31,6	+ 0,5
30	48,5	48,5	+ 0,0	47,4	+ 1,1
40	65	65,2	— 0,2	63,2	+ 2,0
50	82	82,1	— 0,1	79,0	+ 3,1
60	99	99,4	— 0,4	94,8	+ 4,6
70	116,5	116,9	— 0,4	110,6	+ 6,3
80	134,5	134,8	— 0,3	126,4	+ 8,4
90	153,5	153,1	+ 0,4	142,2	+ 10,9
100	173	171,7	+ 1,3	158,0	+ 13,7
110	194	190,7	+ 3,3	173,8	+ 16,9
120	216	210,1	+ 5,9	189,6	+ 20,5
130	239	229,9	+ 9,1	205,3	+ 24,6
140	263,5	250,3	+ 13,2	221,1	+ 29,2
150	289	271,1	+ 17,9	236,9	+ 34,2
160	314	292,6	+ 21,4	252,7	+ 39,9
170	341	314,6	+ 26,4	268,5	+ 46,1

In dieser Tabelle wurde in der fünften Columne die Biegung berechnet, welche dem versuchten Stabe bei einer vollkommenen Elasticität desselben zukommen würde. In diesem Falle muss nämlich in der allgemeinen Gleichung $g = A \cdot u - B \cdot u^2$, wenn die Biegung u dem angehängten Gewichte g vollkommen proportional seyn soll, das zweite Glied, worin u^2 erscheint, weggelassen werden, und es bleibt nur $g = A \cdot u$ oder $u = \frac{g}{A}$, demnach bei dem untersuchten Eichenstabe $u = \frac{g}{0{,}633091} = 1{,}5796 \cdot g$; wornach die fünfte Columne berechnet ist.

§. 319.

Aus dieser Tabelle ergeben sich nunmehr folgende Resultate:

I. Vergleichen wir die in der zweiten Columne enthaltenen beobachteten Biegungen mit den, in der dritten Columne enthaltenen, nach der obigen Formel berechneten Werthen, so sehen wir bei den ersten 10 Versuchen eine vollkommene Uibereinstimmung; der grösste Unterschied zwischen der Beobachtung und Rechnung, welcher bei dem 10ten Versuche statt findet, beträgt nur 1,3 Linien an der Skale; da aber die Biegungen daselbst 15mal grösser angezeigt wurden, so beträgt der wirkliche Unterschied nur höchstens $\frac{1}{10}$tel Linie.

Die folgenden Versuche, bei welchen der Stab mehr belastet wurde, zeigen jedoch immer grössere Differenzen, welches bei den §. 262 und 263 angeführten Versuchen mit Clavierdrähten und stählernen Uhrfedern nicht der Fall war. Diese Unterschiede würden noch grösser seyn, wenn man bei den Versuchen eine längere Zeit z. B. mehrere Tage oder Wochen abgewartet hätte, wo die durch die zuletzt aufgelegten grössern Gewichte bewirkten Einsenkungen noch beträchtlich mit der Zeit vermehrt worden wären. Bei den angeführten Versuchen hat man nämlich nach der Auflegung eines jeden Gewichtes immer nur eine Zeit von 4 bis 5 Minuten abgewartet, und dann die Senkung

an der Skale gemessen. Hiemit konnte man für den vorhabenden Zweck, bei dem es sich nur um die Gesetze der Biegungen durch Gewichte, die noch weit vom Bruche entfernt sind, handelt, um so mehr zufrieden seyn, als den in mehreren Schriften angeführten Erfahrungen zu Folge alle gebogenen Körper nach abgenommener Belastung sich beinahe wieder herstellen, wenn die aufgelegten Lasten nicht die Hälfte des zum Bruche erforderlichen Gewichtes überschreiten.

Aus den Versuchen ersehen wir nun, dass hölzerne Stäbe, eben so wie ordinäres Stabeisen nur sehr unvollkommen jenen Gesetzen folgen, welche wir bei dem vollkommensten in Clavierdrähten und Uhrfedern enthaltenen Eisen gefunden haben. Da die zwischen den Jahresringen des Holzes befindlichen weichen oder schwammigen Theile keine gleiche Stärke mit den übrigen Theilen besitzen, so ist offenbar, dass sie auch früher nachgeben oder zerreissen werden, demnach bei der Auflegung grösserer Gewichte keine Wirkung mehr äussern, in welcher Hinsicht auch die Biegungen verhältnissmässig grösser seyn müssen. Auf gleiche Art mögen bei gewöhnlichen Eisenstäben, wenn sie mit grössern Lasten beschwert werden, einzelne minder feste Theilchen früher nachgeben oder abreissen, und hiedurch den Widerstand des Eisenstabes bei zunehmenden Belastungen verhältnissmässig verringern, wogegen nur in dem reinsten Eisen, wie es bei Clavierdrähten und stählernen Uhrfedern der Fall war, alle Theile fortwährend unter einander eine gleiche Kraft behalten.

Dieser ungleichförmige Zustand des Holzes wurde bereits von mehreren Schriftstellern in der Nähe des Bruches aller Hölzer beobachtet, und in dieser Hinsicht der Grundsatz angenommen, dass eine Regularität bei der Biegung des Holzes bis zur Hälfte oder höchstens zu $^2/_3$ seiner grössten Belastung statt finde. Diess zeigt auch der obige Versuch, wobei der Bruch bei 180 Pfund erfolgte und ein unserer aufgestellten Formel entsprechendes Gesetz bis in der Nähe von 120 Pfund statt findet.

II. Wir haben §. 261 gezeigt, dass der Divisor von p, nämlich P $\left(\text{hier } \frac{A^2}{4B} = 340\right)$ das grösste Gewicht bedeutet, welches der Stab tragen kann, und dass der Faktor der ganzen Grösse nämlich E $\left(\text{hier } \frac{A}{2\,B} = 1074\right)$ diejenige Ausdehnung bedeutet, wobei der Eisenstab zerreisst; wenn demnach das Holz von gleicher Beschaffenheit, wie das reinste Eisen wäre, so dürfte der versuchte Eichenstab erst bei 340 Pfund brechen und müsste zugleich eine Biegung von $\frac{1074}{15} = 71{,}6$ Linien annehmen, wogegen bei dem Versuche der Bruch schon bei 180 Pfund erfolgte und die hiebei beobachtete grösste Biegung nur $\frac{341}{15} = 22{,}7$ Linien betrug. Die Ursache dieser Abweichung liegt in dem bereits erwähnten Umstande, dass nämlich das Holz eben so wie ordinäre Eisenstäbe aus Theilen von ungleicher Stärke besteht, wo also die schwächern Theile früher zerreissen und wie diess eintritt, wegen der hiemit veränderten Beschaffenheit des Holzes auch die oben aufgestellte Gleichung, in unserem Falle

$$\frac{u}{15} = 71{,}6 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{340}\right)}\right\}$$ nicht mehr statt finden kann.

III. Da überhaupt das Holz, Eisen und alle gebogenen Körper nur durch ihre zusammenhängende Kraft dem Bruche widerstehen, so folgt von selbst, dass diejenige Biegung, welche ein Körper durch früher aufgelegte Gewichte bereits angenommen hat, auch nicht als eine Wirkung der neu aufgelegten Last betrachtet werden kann; es muss daher in jedem Falle das Tragungsvermögen nur von derjenigen Kraft, welche widersteht, d. h. von dem wirklich vorhandenen oder sich äussernden Elasticitätsvermögen bestimmt werden, woraus folgt, dass überhaupt ein Stab, der keine Elasticität hätte, nach einander nachgeben und gar keine Last zu tragen fähig seyn würde. Man sieht hieraus, dass die Meinung derjenigen sehr gegründet ist, welche behaupten, dass die Festigkeit der Körper nur von der elastischen Kraft derselben bestimmt werde, und dass man überhaupt einem Körper keine Last anvertrauen könne, die seinen elastischen Widerstand übersteigt.

In der obigen Tabelle zeigt die VIte Columne die Abweichungen, welche sich ergeben, wenn die nach dem Gesetze der Elasticität berechneten Biegungen von den wirklich statt gehabten Biegungen abgezogen werden. Hieraus ersieht man, dass bei dem versuchten Eichenstabe die eingetretenen Biegungen nur bis zum 5ten oder 6ten Theil der 180 ℔, wovon der Bruch erfolgte, als alleinige Wirkungen der vollkommenen Elasticität betrachtet werden können, indem bis zu einer Belastung von 10 bis 40 ℔ die Abweichungen der Elasticität von dem vollkommenen Tragungsvermögen nur 0,1 bis 2,0, also eigentlich bloss $\frac{1}{150}$ bis $\frac{2}{15}$ Linie betrugen; es können demnach bis zu dieser Gränze die Biegungen den aufgelegten Gewichten als proportional angenommen werden.

IV. Betrachten wir in der Tabelle S. 329 die horizontalen Reihen, so finden wir, dass die Differenzen der zwei letzten Glieder überall 16, höchstens 16,5 betragen; sie sind daher dem elastischen Vermögen gemäss, und man ersieht, dass nur die Elasticität der Biegung des Körpers entgegenwirkt. Zur Erklärung der übrigen Unterschiede, wie weit die Biegungen nach abgenommenen Gewichten bei den Versuchen zurückgingen, wollen wir von den, oben im Detail mitgetheilten Versuchsreihen eine horizontale Reihe z. B. die 10te herausheben, so betragen

die aufgelegten Gewichte	10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90 und	100,
die 15fachen Biegungen	25,	42,	59,	75,5,	92,	108,	124,	141,	157 und	173,
die Differenzen		17,	17,	16,5,	16,5,	16,	16,	17,	16,	16.

Hieraus sehen wir, dass bei dem Abheben der Gewichte die Biegungen etwas mehr zurückgehen als nach Verhältniss der abgehobenen Gewichte, wovon die Ursache darin zu liegen scheint, dass die ausgedehnten Holztheilchen, wenn sie einander wieder näher kommen, ein grösseres Vermögen zu ihrer vollkommenen Wiederherstellung gewinnen. Dass jedoch dieses Vermögen nicht so weit gehe, um den Körper in seine ursprüngliche Lage wieder zurückzuführen, zeigt die zweite Columne der Tabelle S. 329, in welcher die Biegungen, welche dem Holzstabe nach Abnahme der Belastung verblieben, angezeigt sind. Diese bleibenden Biegungen sind um so grösser, je mehr das aufgelegte Gewicht betragen hat, wie es auch bei der Ausdehnung der Drähte der Fall war.

V. Hiebei ist noch zu bemerken, dass nach den Beobachtungen der Schriftsteller und vorzüglich des Hrn. Oberlandesbaudirektor *J. A. Eytelwein* die Biegungen der Hölzer,

bei grossen Belastungen mit der Zeit grösser werden; auch ist es allgemein bekannt, dass belastete Hölzer, welche durch längere Zeit im gebogenen Zustande erhalten wurden, nach abgenommenen Gewichten weniger zurückgehen, als wenn die Gewichte nur eine kurze Zeit darauf liegen blieben. Diese Erscheinungen beruhen auf gleichem Grunde, wie die bei dem Versuche bemerkten bleibenden Biegungen, indem die gebogenen Körper, so lange sie nicht ganz gebrochen sind, immer noch eine Elasticität behalten und daher nach abgenommener Belastung zwar wieder zurückgehen, jedoch wegen der gewohnten Verrückung ihrer Theile nicht mehr in ihre vorige Lage ganz zurückkehren. Hierin liegt ebenfalls der Grund, warum ein Körper, der mit einer grössern Last beschwert wird, als seine Elasticität zu ertragen vermag, zwar die Last eine Zeit lang halten kann, jedoch nach Verhältniss der Zeit eine immer grössere Biegung annimmt und endlich bricht.

VI. Wir wollen nun noch den Coeffizienten m für den Bruch nach der Proportion $Q : q = \frac{4 B . H^2}{L} : \frac{4 b . h^2}{l}$, oder aus der Gleichung $Q = \frac{q . l}{4 b . h^2} . \frac{4 B . H^2}{L}$ bestimmen. Zu diesem Behufe ist bei dem versuchten Eichenstabe, $b = h = 1$ Zoll, $l = 446$ Linien und $q = 180$ ℔, demnach $Q = \frac{180 . 446}{4 . 1 . 1^2 . 12} . \frac{4 B . H^2}{L} = 1672{,}5 . \frac{4 B . H^2}{L}$, also $m = 1672{,}5$. Dieser Werth stimmt mit jenem nach *Musschenbroek* S. 297 ausgemittelten beiläufig überein.

Es muss jedoch in Hinsicht der Bestimmung dieses Coeffizienten bemerkt werden, dass die Gleichung $Q = \frac{q . l}{4 b . h^2} . \frac{4 B . H^2}{L}$ nur statt findet, wenn bei dem Bruche die Ausdehnungen der zwei Körper an der Oberfläche gleich angenommen werden. Weil aber die Hölzer aus sehr ungleichartigen Theilen bestehen und man bemerkt hat, dass mehrere Hölzer noch nicht abbrachen, ohngeachtet einzelne Fasern an ihrer Oberfläche schon gesprungen waren, so sieht man, dass die Berechnung des Coeffizienten m nur zu einem sehr unvollkommenen Maasse der Festigkeit dienen könne, und diess um so mehr, als nach unserer frühern Bemerkung der Bruch auch von der Zeit abhängig ist. Ein verlässigeres Maass der Festigkeit lässt sich aber aus der Biegung abnehmen.

§. 320.

Wir kommen demnach zu der Untersuchung, wie viel ein Eichenstab von gleicher Materie, wie der S. 328 beschriebene, jedoch mit andern Dimensionen von einer gegebenen Belastung gebogen werde, oder wie viel ein solcher Stab tragen könne, wenn die hiebei zulässige Biegung festgesetzt ist.

Es seyen die Dimensionen dieses Stabes B, H und L, seine Biegung U und das aufgelegte Gewicht G, so verhält sich nach der §. 313. aufgestellten allgemeinen Proportion über die Biegung gleichartiger Körper $G : g = \frac{U . B . H^3}{L^3} : \frac{u . b . h^3}{l^3}$. Nehmen wir nun an, dass die Biegungen der zwei Eichenstäbe gleich gross seyn sollen, oder dass $U = u$ ist, so ist $G : g = \frac{B . H^3}{L^3} : \frac{b . h^3}{l^3}$.

Der Tabelle S. 329 zu Folge betrug bei der Belastung $g = 40$ ℔ die beobachtete Biegung $\frac{65}{15} = 4{,}33$ Linien $= U = u$; werden daher diese Werthe und $b = h = 1$ Zoll, dann $l = \frac{446}{12}$ Zoll substituirt, so ist $G : 40 = \frac{B \cdot H^3}{L^3} : \frac{1 \cdot 1^3 \cdot 12^3}{446^3}$, woraus $G = 40 \cdot 51341 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^3}$ folgt. In dieser Gleichung muss B, H und L in Zollen substituirt werden, wornach man nunmehr die Last G berechnen kann, welche ein Eichenstab von gleicher Materie, wie der versuchte zu tragen im Stande ist, wenn sich derselbe nur $\frac{65}{15} = 4\frac{1}{3}$ Linie in der Mitte biegen oder einsenken soll.

Für den praktischen Gebrauch ist es aber vortheilhafter, die obige Proportion so zu stellen, dass man für die angenommene Länge, Höhe und Breite des Stabes und das darauf gelegte Gewicht die Biegung bestimmen, oder wenn man diese lieber annehmen will, die Last G berechnen kann.

Da wir voraussetzen müssen, dass die Balken der Sicherheit wegen nur mit solchen Gewichten beschwert werden, wobei sie vollkommen elastisch bleiben, so findet in diesem Falle bei dem versuchten Eichenstabe die S. 332 aufgestellte Gleichung $\frac{g}{A} = u = \frac{g}{0{,}633091}$ statt. Nehmen wir die Biegung zu ein Zoll an, so ist $u = 15 \cdot 12 = \frac{g}{0{,}633091}$, woraus das Gewicht $g = 114$ ℔ folgt. Wird nun in der obigen Proportion $\frac{l^3}{h^3} = 51341$ gesetzt, so ist $G : 114 = \frac{U \cdot B \cdot H^3}{L^3} : \frac{1 \text{ Zoll} \cdot 1}{51341}$, woraus $\frac{G \cdot L^3}{B \cdot H^3} = U \cdot 114 \cdot 51341 = U \cdot 5852874$ folgt. Bei dem Gebrauche dieser Gleichung muss L, B und H in Zollen, G aber in Pfunden substituirt werden, worauf man U in Zollen findet. Da der Coeffizient von U für die Rechnung zu gross ist, so kann man auch L in Klaftern subtituiren, zu welchem Behufe der Coeffizient 5852874 erst mit 72^3 dividirt werden muss. Diess gibt die Zahl 15,7.

Wir haben daher für unsern Fall die Gleichung für die Biegung $\frac{G \cdot L^3}{B \cdot H^3} = U \cdot 15{,}7$.

In dieser Gleichung kommen fünf Grössen G, L, B, H und U vor; wenn daher 4 hievon gegeben sind, so kann man die fünfte berechnen.

1tes Beispiel. Ein eichener Balken von 4 Klafter Länge, 1 Fuss Höhe, und 8 Zoll Breite ist in der Mitte mit einer Last von 30 Zentner beschwert, es frägt sich, wie viel seine grösste Biegung U betragen werde?

In diesem Falle haben wir $G = 3000$; die Dimensionen B, H des Balkens müssen in Zollen L aber in Klaftern bestimmt werden, es ist daher $L = 4$, $B = 8$, $H = 12$, und sonach $\frac{3000 \cdot 4^3}{8 \cdot 12^3} = U \cdot 15{,}7$, woraus die Biegung in der Mitte $U = 0{,}33$ Zoll folgt.

2tes Beispiel. Wollte man annehmen, dass die Biegung bei diesem Balken nur 0,5 Zoll betragen darf, so lässt sich die Höhe desselben bei Annahme einer gleichen Länge und Breite finden. Es ist nämlich: $\frac{3000 \cdot 4^3}{8 \cdot H^3} = 0{,}5 \cdot 15{,}7$ und $H = 14{,}5$ Zoll.

Uibrigens ist zu bemerken, dass die Biegungen in diesen zwei Fällen grösser werden, wenn ein Eichenholz von minderer Qualität, als der bei dem Versuche angewandte Stab gebraucht wird; hierüber können in jedem Falle nur eigene Versuche entscheiden, nach deren Resultaten der obige Coefficient (5852874) abzuändern seyn würde.

§. 321.

Wir haben bereits Seite 313 bemerkt, dass nach einer vieljährigen Erfahrung die Endsbäume bei einer 4 Klafter langen Brücke eine hinreichende Stärke besitzen, wenn sie 12 Zoll zur Höhe und eben so viel zur Breite erhalten. Unsere frühere Rechnung gründete sich auf den Bruch der Balken, wir wollen daher noch die Biegung dieser Endsbäume in der Mitte berechnen.

Der Annahme Seite 313 zu Folge, wo das Gewicht eines Kubikfusses weichen Holzes $g = \frac{1}{3}$ Zentner gesetzt ist, beträgt die ganze Belastung der Brücke mit 7 Endsbäumen von 4 Klafter Länge $(5600 + 9600 + 900 + 444 + 48000)\ \frac{1}{2} = 32272$ ℔, mithin ist ein Endsbaum in seiner Mitte mit 4610 ℔ beschwert. Sind die Endsbäume von Eichenholz, so beträgt die Belastung beinahe dasselbe, indem die zufällige Belastung (48000 ℔) dann das Gewicht der Brückenstreu, der Anzüge und der Geländer $(9600 + 900 + 444)$ dasselbe bleibt und bloss das Gewicht der Endsbäume (5600) um $\frac{1}{6}$tel grösser wird. Demnach erhalten wir die Belastung eines Endsbaumes in der Mitte $= 4677$ ℔.

Im Zustande der vollkommenen Elasticität, welche hier und bei allen ähnlichen Berechnungen vorausgesetzt wird, findet nach Seite 336 die Gleichung $g = 15 . A . u$ statt. Substituiren wir die Werthe für den versuchten Eichenstab, und jene von der angenommenen Brücke in die Proportion $U : u = \frac{G . L^3}{B . H^3} : \frac{g . l^3}{b . h^3}$, so erhalten wir

$U : u = \frac{4677 . 4^3 . 72^3}{12 . 12^3} : \frac{15 . 0{,}633091 . u . 446^3}{1 . 1 . 12^3}$, woraus die Biegung in der Mitte $= 11{,}05$ Linien, oder beinahe 1 Zoll folgt.

Zur Erleichterung der Rechnung können wir daher für den praktischen Gebrauch annehmen, dass ein Balken von 4 Klafter Länge sich durch seine Belastung in der Mitte nur um einen Zoll oder um den 288ten Theil seiner Länge senken dürfe, dass sonach die Senkung nur $\frac{1}{4}$ Zoll auf die Klafter Länge (zwischen beiden Auflagen gemessen) betragen darf.

Diess gibt überhaupt $\frac{u}{l} = \frac{1}{288}$ und für den versuchten Eichenstab $u = \frac{l}{288} = \frac{446}{288} = 1{,}549$ Linien. Für den Zustand der vollkommenen Elasticität ist $g = 15 . A . u = \frac{15 . 0{,}633091 . 446}{288} = 14{,}7069$ ℔.

Berechnen wir weiter den Fall, dass in der Ausübung bei allen Balken ein gleiches Verhältniss $\frac{u}{l} = \frac{U}{L} = \frac{1}{288}$ statt finden soll, so gibt diess die Proportion

$G : g = \frac{B \,.\, H^3}{L^2} : \frac{b \,.\, h^3}{l^2}$, und wenn für den versuchten Eichenstab die Werthe substituirt werden, so ist $G : 14{,}7062 = \frac{B \,.\, H^3}{L^2} : \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 12^2}{446^2}$, woraus $G = 20315 \,.\, \frac{B \,.\, H^3}{L^2} = \mu \,.\, \frac{B \,.\, H^3}{L^2}$ folgt, wo mit μ der obige Coefficient allgemein bezeichnet wird.

Dieser Coefficient ergibt sich nämlich für den bereits beschriebenen und mehrere nachfolgende Versuche, wobei die Länge l der Stäbe immer 446 Linien betrug, aus der Proportion $G : 15 \,.\, A \,.\, u = \frac{B \,.\, H^3}{L^2} : \frac{b \,.\, h^3 \,.\, 12^2}{446^2}$, oder $G : \frac{15 \,.\, A \,.\, 446}{288} = \frac{B \,.\, H^3}{L^2} : \frac{b \,.\, h^3 \,.\, 12^2}{446^2}$ und $G = \frac{15 \,.\, 446^3 \,.\, A}{288 \,.\, 12^2 \,.\, b \,.\, h^3} \cdot \frac{B \,.\, H^3}{L^2} \cdot = 32087{,}87 \cdot \frac{A}{b \,.\, h^3} \cdot \frac{B \,.\, H^3}{L^2} = \mu \cdot \frac{B \,.\, H^3}{L^2}$. In dieser Gleichung muss B, H und L in N. Oe. Zollen substituirt werden, worauf man G in N. Oe. Pfunden erhält.

Diese Substitution findet desshalb in Zollen statt, um einen ähnlichen Ausdruck wie bei der Berechnung der zum Bruche erforderlichen Gewichte (§. 288) zu erhalten.

Um übrigens zu erfahren, wie weit der obige Eichenstab vom Bruche entfernt ist, braucht man bloss das auf der vorigen Seite berechnete Gewicht (14,7062 ℔), welches die Biegung von $\frac{1}{288} = 1{,}549$ Linien in der Mitte des Eichenstabes bewirkt, mit dem, bei demselben Stabe zum wirklichen Bruche erforderlichen Gewichte (170 ℔) zu vergleichen, woraus man nun ersieht, dass derselbe bloss beiläufig mit dem zwölften Theile jenes Gewichtes beschwert wird, wovon sein Bruch erfolgen würde. Eine genauere Angabe, wie weit stärkere Balken, die nach dieser Formel berechnet werden, vom Bruche entfernt bleiben, folgt im §. 323.

Wollte man für einen besondern Fall eine noch geringere Biegung z. B. ein sechstel Zoll für die Klafter Länge annehmen, so ist statt $\frac{1}{288}$ nur $\frac{1}{432}$ zu setzen und man erhält $G = \frac{20315 \,.\, 288}{432} \cdot \frac{B \,.\, H^3}{L^2}$. Da jedoch die Biegung von ein viertel Zoll auf die Klafter dem praktischen Gebrauche angemessener ist, so wurde der Coeffizient μ bei allen Versuchen mit Hölzern hiernach berechnet.

§. 322.

Es war in dieser Hinsicht erwünschlich, für die bei dem Maschinen- und Bauwesen gebräuchlichsten Holzgattungen mehrere genaue Versuche über die Biegung zu besitzen, wesshalb nachstehende Versuche im November 1830 im technischen Institute zu Prag angestellt und auf gleiche Art, wie der bereits beschriebene Versuch Nro. 1 berechnet wurden. Wir wollen zur Vermeidung der Weitläufigkeit eben so, wie es bei den Versuchen über die Ausdehnung des Eisens S. 267 bis S. 271 geschah, bloss die letzten Zahlen der horizontalen Versuchsreihen anführen und die Resultate der Berechnung beisetzen. Der Versuch Nro. 1 ist der bereits beschriebene.

Versuch Nro. 1.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschied zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Eichenholz nahe vom Kerne. Breite 1 Z. Höhe 1 Z. Länge 37 Zoll 2 Linien. Der Stab enthielt 10 Jahrringe, welche beim Versuche fast horizontal lagen.	10	16	15,9	+ 0,1	15,8	+ 0,1
	20	32	32,1	— 0,1	31,6	+ 0,5
	30	48,5	48,5	+ 0,0	47,4	+ 1,1
	40	65	65,2	— 0,2	63,2	+ 2,0
	50	82	82,1	— 0,1	79,0	+ 3,1
	60	99	99,4	— 0,4	94,8	+ 4,6
	70	116,5	116,9	— 0,4	110,6	+ 6,3
	80	134,5	134,8	— 0,3	126,4	+ 8,4
	90	153,5	153,1	+ 0,4	142,2	+ 10,9
	100	173	171,7	+ 1,3	158,0	+ 13,7
	110	194	190,7	+ 3,3	173,8	+ 16,9
	120	216	210,1	+ 5,9	189,6	+ 20,5
	130	239	229,9	+ 9,1	205,3	+ 24,6
	140	263,5	250,3	+ 13,2	221,1	+ 29,2
	150	289	271,1	+ 17,9	236,9	+ 34,2
	160	314	292,6	+ 21,4	252,7	+ 39,9
	170	341	314,6	+ 26,4	268,5	+ 46,1

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1074 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{340}\right)}\right\}$ worin $A = 0{,}633091$ und $B = \frac{1}{3393}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1672{,}5$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Kl. ist $\mu = 20315$.

Der Stab brach unter der Belastung von 180 ℔ bei der Biegung $\frac{359}{15} = 23{,}93$ Linien plötzlich.

Versuch Nro. 2.

Eichenholz. Breite 1 Z. Höhe 1 Z. Länge 37 Zoll 2 Linien. Der Stab enthielt 15 Jahrringe, welche beim Versuche fast vertikal lagen.	10	19	18,9	+ 0,1	18,9	+ 0,0
	20	38	37,8	+ 0,2	37,7	+ 0,1
	30	58	57,5	+ 0,5	56,6	+ 0,9
	40	77	77,1	— 0,1	75,5	+ 1,6
	50	96	96,9	— 0,9	94,3	+ 2,6
	60	116	116,8	— 0,8	113,2	+ 3,6
	70	136	137,1	— 1,1	132,0	+ 5,1
	80	156	157,5	— 1,5	150,9	+ 6,6
	90	180	178,2	+ 1,8	169,8	+ 8,4
	100	202	199,2	+ 2,8	188,6	+ 10,6
	110	232	220,5	+ 11,5	207,5	+ 13,0
	120	262	242,0	+ 20,0	226,4	+ 15,6
	130	294	263,7	+ 30,3	245,2	+ 18,5

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1891 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{501}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}530111$ und $B = \frac{1}{7134}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1208$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Kl. ist $\mu = 17010$.

Der Stab brach unter der Belastung von 130 ℔ und bei der Biegung von $\frac{294}{15} = 19{,}6$ Linien plötzlich.

Versuch Nro. 3.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschied der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschied zwischen III und V.
	N Oe. Pf.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N. Oe. Lin.
Eichenholz.	10	21	20,9	+ 0,1	20,7	+ 0,2
Breite 1 Z. Hö-	20	42,5	42,3	+ 0,2	41,4	+ 0,9
he 1 Z. Länge 37	30	64	64,2	— 0,2	62,1	+ 2,1
Zoll 2 Linien.	40	86	86,5	— 0,5	82,8	+ 3,7
Der Stab ent-	50	109	109,4	— 0,4	103,5	+ 5,9
hielt 18 Jahr-	60	131	132,9	— 1,9	124,2	+ 8,7
ringe, welche	70	155	157,0	— 2,0	144,9	+ 12,1
beim Versuche	80	181	181,8	— 0,8	165,6	+ 16,2
fast horizontal	90	209	207,3	+ 1,7	186,4	+ 20,9
lagen.	100	239	233,8	+ 5,2	207,1	+ 26,7
	110	271	260,9	+ 10,1	227,8	+ 33,1
	120	309	289,2	+ 19,8	248,5	+ 40,7
	130	447	318,6	+ 128,4	269,2	+ 49,4

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1032\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{249}\right)}\right\}$, worin $A = 0,482958$ und $B = \frac{1}{4275}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1208$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klft. ist $\mu = 15497$.

Bei 130 ℔ und der Biegung $\frac{447}{15} = 29,8$ Linien brach der Stab plötzlich.

Versuch Nro. 4.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Buchenholz	10	21	20,7	+ 0,3	20,5	+ 0,2
Breite 11,5 Li-	20	42	41,7	+ 0,3	41,0	+ 0,7
nien, Höhe 11,8	30	63	63,2	— 0,2	61,4	+ 1,8
Linien, Länge	40	84	85,0	— 1,0	81,9	+ 3,1
37 Zoll 2 Linien.	50	105,5	107,8	— 2,3	102,4	+ 5,4
Der Stab ent-	60	128,5	130,0	— 1,5	122,9	+ 7,1
hielt 35 Jahrrin-	70	153	152,7	+ 0,3	143,4	+ 9,3
ge, welche beim	80	177	176,8	+ 0,2	163,8	+ 13,0
Versuche fast	90	201,5	201,1	+ 0,4	184,3	+ 16,8
horizontal la-	100	226	225,9	+ 0,1	204,8	+ 21,1
gen.	110	256	251,3	+ 4,7	225,3	+ 26,0
	120	289	277,5	+ 11,5	245,8	+ 31,7
	130	325	304,3	+ 20,7	266,3	+ 38,0
	140	367	332,0	+ 35,0	286,7	+ 45,3
	150	411	360,5	+ 50,5	307,2	+ 53,8
	160	469	390,0	+ 79,0	327,7	+ 62,3

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1231\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{300}\right)}\right\}$, worin $A = 0,488259$ und $B = \frac{1}{5041}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1604$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Kl. ist $\mu = 17194$.

Bei 160 ℔ und der Biegung von $\frac{469}{15} = 31,27$ Linien erfolgte der plötzliche Bruch.

Versuch Nro. 5.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N. Oe. Lin.
Buchenholz. Breite 11,5 Linien, Höhe 11,3 Linien, Länge 37 Zoll 2 Linien. Der Stab enthielt 26 Jahrringe, welche beim Versuche vertikal lagen.	10	19,5	19,4	+ 0,1	19,2	+ 0,2
	20	39	39,1	— 0,1	38,5	+ 0,6
	30	59	59,1	— 0,1	57,7	+ 1,4
	40	79,5	79,6	— 0,1	76,9	+ 2,7
	50	100	100,4	— 0,4	96,1	+ 4,3
	60	121	121,5	— 0,5	115,4	+ 6,1
	70	143	143,9	— 0,9	134,6	+ 9,3
	80	167	165,3	+ 1,7	153,8	+ 11,5
	90	192	187,8	+ 4,2	173,1	+ 14,7
	100	239	210,9	+ 28,1	192,3	+ 18,6
	110	275	234,6	+ 40,4	211,5	+ 23,1
	120	344	258,8	+ 85,2	230,7	+ 28,1

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1192\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{310}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}520059$, und $B = \frac{1}{4585}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1312$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klft. ist $\mu = 20853$.

Bei der Belastung von 120 ℔ bekam der Stab bei der Biegung $\frac{344}{15} = 22{,}93$ Linien einen Sprung, nach den Biegungen $\frac{352}{15} = 23{,}47$ und $\frac{357}{15} = 23{,}8$ Linien erfolgten wiederholte Sprünge und bei $\frac{373}{15} = 24{,}87$ Linien Biegung der gänzliche Bruch.

Versuch Nro. 6.

Fichtenholz. Breite 1 Z. Höhe 1 Z. Länge 37 Zoll 2 Linien. Die Jahrringe lagen beim Versuche fast vertikal.	10	13	12,8	+ 0,2	12,8	+ 0,0
	20	26	25,8	+ 0,2	25,5	+ 0,3
	30	39	38,9	+ 0,1	38,3	+ 0,6
	40	52	52,1	— 0,1	51,1	+ 1,0
	50	64,5	65,5	— 1,0	63,9	+ 1,6
	60	78	79,1	— 1,1	76,6	+ 2,5
	70	92,5	92,7	— 0,2	89,4	+ 3,3
	80	108	106,6	+ 1,4	102,2	+ 4,4
	90	121,5	120,7	+ 0,8	115,0	+ 5,7
	100	135,5	134,9	+ 0,6	127,8	+ 7,1
	110	150	149,3	+ 0,7	140,5	+ 8,8
	120	165	163,9	+ 1,1	153,4	+ 10,5
	130	185	178,7	+ 6,3	166,0	+ 12,7
	140	211	193,7	+ 17,3	178,9	+ 14,8
	150	234,5	208,9	+ 25,6	191,7	+ 17,2
	160	265	224,4	+ 40,6	204,4	+ 20,0
	170	308	240,0	+ 68,0	217,3	+ 22,7
	180	370	256,0	+ 114,0	230,1	+ 25,9
	185	447	264,4	+ 182,6	242,8	+ 21,6

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1251\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{490}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}782536$ und $B = \frac{1}{3198}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1719$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klft. ist $\mu = 25112$.

Bei der Belastung von 185 ℔ und der Biegung von $\frac{447}{15} = 29{,}8$ Linien erfolgte der plötzliche Bruch.

Versuch Nro. 7.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Fichtenholz.	10	14	14,1	— 0,1	14,1	+ 0,0
Breite 11,3 Li-	20	28	28,2	— 0,2	28,1	+ 0,1
nien, Höhe 11,3	30	43	42,5	+ 0,5	42,2	+ 0,3
Linien, Länge	40	57	56,8	+ 0,2	56,2	+ 0,6
37 Zoll 2 Linien.	50	71	71,1	— 0,1	70,3	+ 0,8
Der Stab ent-	60	85	85,5	— 0,5	84,4	+ 1,1
hielt 16 Jahrrin-	70	100	100,0	+ 0,0	98,4	+ 1,6
ge, welche beim	80	115	114,5	+ 0,5	112,5	+ 2,0
Versuche verti-	90	129	129,1	— 0,1	126,5	+ 2,6
kal lagen.	100	144	143,8	+ 0,2	140,6	+ 3,2
	110	159	158,5	+ 0,5	154,7	+ 3,8
	120	192	173,3	+ 18,7	168,7	+ 4,6
	130	241	188,2	+ 52,8	182,8	+ 5,4
	140	406	203,1	+ 202,9	196,8	+ 6,3

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 3319\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{1180}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}711006$ und $B = \frac{1}{9333}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1558$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klafter ist $\mu = 29015$.

Der Bruch erfolgte bei der Belastung mit 140 ℔ und der Biegung von $\frac{406}{15} = 27{,}07$ Linien.

Versuch Nro. 8.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Fichtenholz.	10	12	12,3	— 0,3	12,2	+ 0,1
Breite 11,5 Li-	20	24,5	24,6	— 0,1	24,2	+ 0,4
nien, Höhe 11,5	30	37	37,1	— 0,1	36,5	+ 0,6
Linien, Länge	40	50	49,8	+ 0,2	48,7	+ 1,1
37 Zoll 2 Linien.	50	63	62,4	+ 0,6	60,8	+ 1,6
Der Stab ent-	60	76	75,3	+ 0,7	73,0	+ 2,3
hielt 19 Jahrrin-	70	89	88,4	+ 0,6	85,2	+ 3,2
ge, welche beim	80	102	101,5	+ 0,5	97,4	+ 4,1
Versuche verti-	90	115	114,8	+ 0,2	109,5	+ 5,3
kal lagen.	100	128	128,1	— 0,1	121,7	+ 6,4
	110	141	142,0	— 1,0	133,9	+ 8,1
	120	154,5	155,7	— 1,2	146,0	+ 9,7
	130	168,5	169,8	— 1,3	158,2	+ 11,6
	140	185	183,9	+ 1,1	170,4	+ 13,5
	150	203,5	198,3	+ 5,2	182,5	+ 15,8
	160	243,5	213,0	+ 30,5	194,7	+ 18,3
	170	273,5	227,7	+ 45,8	206,9	+ 20,8
	180	453,5	242,7	+ 210,8	219,0	+ 23,7

Die aus den ersten 12 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1241\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{510}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}821741$ und $B = \frac{1}{3070}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1900$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Kl. ist $\mu = 31262$.

Bei der Belastung mit 180 ℔ erhielt der Stab bei der Biegung $\frac{405}{15} = 27$ Linien einen kleinen Sprung, bei der weiter erfolgten Biegung wiederholten sich fortwährend neue Sprünge, bis endlich bei der Biegung $\frac{453{,}5}{15} = 30{,}2$ Linien der gänzliche Bruch erfolgte.

Versuch Nro. 9.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N.Oe.Lin.
Tannenholz. Breite 1 Z., Höhe 11,7 Linien, Länge 37 Zoll, 2 Linien. Der Stab enthielt 11 Jahrringe, welche beim Versuche vertikal lagen.	10	15	14,9	+ 0,1	14,9	+ 0,0
	20	30	30,0	+ 0,0	29,9	+ 0,1
	30	45	45,0	+ 0,0	44,8	+ 0,2
	40	60	60,1	— 0,1	59,8	+ 0,3
	50	75	75,3	— 0,3	74,7	+ 0,6
	60	90	90,5	— 0,5	89,7	+ 0,8
	70	106	105,7	+ 0,3	104,6	+ 1,1
	80	122	121,1	+ 0,9	119,6	+ 1,5
	90	138	136,4	+ 1,6	134,5	+ 1,9
	100	155	151,8	+ 3,2	149,4	+ 2,4
	110	179	167,3	+ 11,7	164,4	+ 2,9
	120	207	182,8	+ 24,2	179,3	+ 3,5
	130	272	198,4	+ 73,6	194,3	+ 4,1
	140	{342 {446	214,0	+ {128,0 {232,0	209,2	+ 4,8

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 4723 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{1581}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}669324$ und $B = \frac{1}{14112}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 1368$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klft. ist $\mu = 23172$.

Bei der Belastung von 140 ℔ und der Biegung $\frac{342}{15} = 22{,}8'''$ erfolgte ein Sprung, bei der weiter fortschreitenden Biegung wiederholten sich mehrere kleine Sprünge, bis endlich bei der Biegung $\frac{446}{15} = 29{,}73'''$ der gänzliche Bruch erfolgte.

Versuch Nro. 10.

Tannenholz. Breite 11,7 Linien, Höhe 11,6 Linien, Länge 37 Zoll 2 Linien. Der Stab enthielt 11 Jahrringe, welche beim Versuche vertikal lagen.	10	20,5	20,4	+ 0,1	20,2	+ 0,2
	20	41	41,0	+ 0,0	40,3	+ 0,7
	30	61,5	61,9	— 0,4	60,6	+ 1,3
	40	82,5	83,0	— 0,5	80,8	+ 2,2
	50	104	104,5	— 0,5	101,0	+ 3,5
	60	125,5	126,4	— 0,9	121,2	+ 5,2
	70	148	148,5	— 0,5	141,4	+ 7,1
	80	173	171,0	+ 2,0	161,6	+ 9,4
	90	200	193,8	+ 6,2	181,7	+ 12,1
	100	240	217,1	+ 22,9	202,0	+ 15,1
	110	283	240,7	+ 42,3	222,2	+ 18,5
	120	{347 {419	264,8	+ {82,2 {154,2	242,4	+ 22,4

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 1581 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{391}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}495109$ und $B = \frac{1}{6388}$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Kl. ist $\mu = 18039$.

Bei diesem Stabe wurden die Versuche nicht bis zum Bruche fortgesetzt, weil man gefunden hat, dass er nicht in dem Grade trocken war, wie man es bei den Bauhölzern verlangt. Bei der Belastung von 120 ℔ vermehrte sich die Biegung von $\frac{347}{15} = 23{,}13'''$ nach einigen Stunden bis auf $\frac{419}{15} = 27{,}93'''$.

Versuch Nro. 11.

Benennung der Holzgattung und Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 15fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 15fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 15fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Tannenholz. Breite 1 Z., Höhe 1 Zoll, Länge 37 Zoll 2 Linien. Der Stab enthielt 28 Jahrringe, welche beim Versuche vertikal lagen.	10	9	9,0	+ 0,0	9,0	+ 0,0
	20	18	18,0	+ 0,0	17,9	+ 0,1
	30	27	27,0	+ 0,0	26,9	+ 0,1
	40	36	36,1	— 0,1	35,8	+ 0,3
	50	45,5	45,2	+ 0,3	44,8	+ 0,4
	60	54,5	54,4	+ 0,1	53,7	+ 0,7
	70	63,5	63,5	+ 0,0	62,7	+ 0,8
	80	72,5	72,8	— 0,3	71,6	+ 1,2
	90	82	82,0	+ 0,0	80,6	+ 1,4
	100	91	91,3	— 0,3	89,5	+ 1,8
	110	100,5	100,7	— 0,2	98,5	+ 2,2
	120	110	110,1	— 0,1	107,4	+ 2,7
	130	119,5	119,5	+ 0,0	116,4	+ 3,1
	140	129	129,0	+ 0,0	125,4	+ 3,6
	150	138,5	138,5	+ 0,0	134,3	+ 4,2
	160	148	148,0	+ 0,0	143,3	+ 4,7
	170	157,5	157,6	— 0,1	152,2	+ 5,4
	180	167	167,3	— 0,3	161,2	+ 6,1
	190	177	176,9	+ 0,1	170,1	+ 6,8
	200	188	186,7	+ 1,3	179,1	+ 7,6
	210	200	196,4	+ 3,6	188,0	+ 8,4
	220	215,5	206,5	+ 9,0	197,0	+ 9,5
	230	228	216,1	+ 11,9	205,9	+ 10,2
	240	253,5	226,0	+ 27,5	214,9	+ 11,1
	250	269	236,0	+ 33,0	223,9	+ 12,1
	260	303	246,0	+ 57,0	232,8	+ 13,2
	270	357	256,1	+ 100,9	241,8	+ 14,3
	280	433	266,2	+ 166,8	250,7	+ 15,5
	290	{469 {497	276,4	+ {192,6 {220,6	259,7	+ 16,7

Die aus den ersten 20 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $15\,u = 2279\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{1273}\right)}\right\}$, worin $A = 1{,}116877$ und $B = \frac{1}{4081}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 2695$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme von ¼ Zoll Senkung per Klft. ist $\mu = 35838$.

Bei 290 ℔ Belastung erfolgte bei $\frac{469}{15} = 31{,}27'''$ Biegung ein Sprung, bei fernerer Biegung erfolgten hierauf noch mehrere Sprünge und bei $\frac{497}{15} = 33{,}13'''$ fand endlich der gänzliche Bruch statt. Dieser Stab wurde aus einem wohl ausgetrockneten bohlenähnlich abgezimmerten Holzstücke vom Wurzelende eines beiläufig 60jährigen Tannenbaumes zwischen Splint und Kern sorgfältig geschnitten.

§. 323.

Bei den vorstehenden 11 Versuchen haben wir aus den §. 321 angeführten Gründen den Coefficienten μ durchaus für eine Senkung von ¼ Zoll auf jede Klafter Länge (zwischen beiden Auflagen gemessen) berechnet. Diese Rechnung gründete sich auf die angegebene Erfahrung, dass ein Endsbaum von 12 Zoll Quadratseite und 4 Klafter Länge sich durch seine grösste Belastung in der Mitte nur um einen Zoll senken solle. Nehmen wir an, dass die Endsbäume von gleicher Beschaffenheit, wie die versuchten 11 Stäbe sind, und substituiren die entsprechenden Werthe in die für diesen Fall S. 337 abgeleitete Proportion, so ist

$$U : u = \frac{4677 . 4^3 . 72^3}{12 . 12^3} : \frac{15 . A . u . 446^3}{b . h^3 . 12^3}$$ für Eichen- und Buchenholz, und

$$U : u = \frac{4610 . 4^3 . 72^3}{12 . 12^3} : \frac{15 . A . u . 446^3}{b . h^3 . 12^3}$$ für Fichten- und Tannenholz, demnach erhalten wir

nach Nro. 1	für den Endsbaum von Eichenholz die Senkung in der Mitte	= 11,05	Linien
— Nro. 2	— — — — — — — —	= 13,20	—
— Nro. 3	— — — — — — — —	= 14,49	—
— Nro. 4	— — — Buchenholz — — —	= 13,06	—
— Nro. 5	— — — — — — — —	= 10,77	—
— Nro. 6	— — — Fichtenholz — — —	= 8,81	—
— Nro. 7	— — — — — — — —	= 7,63	—
— Nro. 8	— — — — — — — —	= 7,08	—
— Nro. 9	— — — Tannenholz — — —	= 9,55	—
— Nro. 10	— — — — — — — —	= 12,43	—
— Nro. 11	— — — — — — — —	= 6,17	—

Wir ersehen hieraus, dass die verschiedenen Holzgattungen mehr und minder biegsam sind, und dass selbst bei derselben Holzgattung Ungleichheiten in ihrer Biegung statt finden. Das Mittel aus den berechneten 11 Biegungen gibt 10,39 N. Oe. Linien oder beinahe einen N. Oe. Zoll, wie wir es S. 337 angenommen haben.

Es fragt sich nun, wie weit die oben angeführten Endsbäume vom Bruche entfernt sind, oder von welcher Last der Bruch derselben erfolgen würde. Diess ergibt sich aus der Vergleichung des Gewichtes $G = \mu . \frac{B . H^3}{L^2}$, welches ein Endsbaum bei der angenommenen Senkung von 1 : 288 trägt, und jenes Gewichtes $Q = 4 . m . \frac{B . H^2}{L}$, wovon der Bruch dieses Endsbaumes erfolgen würde. Wird in beiden Formeln B = H = 12 Zoll, und L = 4 . 72 Zoll substituirt, dann das Gewicht von einem Kubikfusse Eichen- und Buchenholz zu ½ Zentner und von einem Kubikfusse der weichen Hölzer zu ⅓ Zentner angenommen, so ergibt sich die wirkliche Belastung (nach Abschlag des halben Gewichtes der Balken)

bei dem eichenen Endsbaume Nro. 1	mit G = 4479 ℔,	Q = 39540 ℔,	demnach G : Q = 1 : 8,8
— — — Nro. 2	— G = 3653 —	Q = 28392 —	— G : Q = 1 : 7,8
— — — Nro. 3	— G = 3274 —	Q = 28392 —	— G : Q = 1 : 8,7

bei dem buchenen Endsbaume	Nro. 4	ist G = 3699 ℔,	Q = 37896 ℔,	demnach	G : Q = 1 : 10,2		
— —	—	Nro. 5	— G = 4613	— Q = 30888	—	G : Q = 1 : 6,7	
— fichtenen	—	Nro. 6	— G = 5878	— Q = 40856	—	G : G = 1 : 7,0	
— —	—	Nro. 7	— G = 6854	— Q = 36992	—	G : Q = 1 : 5,4	
— —	—	Nro. 8	— G = 7416	— Q = 45200	—	G : Q = 1 : 6,1	
— tannenen	—	Nro. 9	— G = 5393	— Q = 32432	—	G : Q = 1 : 6,0	
— —	—	Nro. 11	— G = 8560	— Q = 64280	—	G : Q = 1 : 7,5	

Wir ersehen hieraus, dass bei der angenommenen Biegung von 1 : 288 unsere Balken noch eine 6 bis 8fache Belastung zu ertragen im Stande sind, bevor der Bruch derselben erfolgt. Da überhaupt gleichartige Hölzer, wenn sie nur wenig gebogen werden, weit mehr Uibereinstimmung zeigen, als dieses bei ihrem Bruche der Fall ist, so wird auch die Berechnung der Dimensionen hölzerner Balken weit verlässiger nach den für die Biegung aufgestellten Formeln, als nach jenen für den Zustand des Bruches bestimmt werden.

§. 324.

Das Verhältniss der Gewichte, welche bei grössern Balken sowohl für den Zustand des Bruches, als auch für die angenommene Biegung (1 : 288) berechnet werden, ergibt sich aus der Vergleichung der aufgestellten Proportionen:

Für den Zustand des Bruches $Q : q = \frac{4\,B\,.\,H^2}{L} : \frac{4\,b\,.\,h^2}{l}$ (I) und für die Biegung $G : g = \frac{B\,.\,H^3\,.\,U}{L^3} : \frac{b\,.\,h^3\,.\,u}{l^3}$ (II). Aus I folgt $Q = \frac{B\,.\,H^2}{L} \cdot \frac{q\,.\,l}{b\,.\,h^2}$ und aus II ergibt sich $G = \frac{B\,.\,H^3\,.\,U}{L^3} \cdot \frac{g\,.\,l^3}{b\,.\,h^3\,.\,u}$. Nehmen wir $\frac{U}{L} = \frac{1}{288}$ und bemerken, dass u in Linien $= \frac{g}{15\,A}$, demnach u in Zollen $= \frac{g}{180\,A}$ ist, so haben wir, wenn obige zwei Gleichungen in eine Proportion verwandelt werden:

$$Q : G = \frac{B\,.\,H^2}{L} \cdot \frac{q\,.\,l}{b\,.\,h^2} : \frac{B\,.\,H^3}{288\,L^2} \cdot \frac{180\,A\,.\,l^3}{b\,.\,h^3} = 1 : \frac{H}{288\,.\,L} \cdot \frac{180\,A\,.\,l^2}{q\,.\,h}.$$

In dieser Formel werden nun alle Werthe in Zollen substituirt und wir erhalten für den eichenen Endsbaum Nro. 1; $Q : G = 1 : \frac{12}{288\,.\,4\,.\,72} \cdot \frac{180\,.\,0{,}633091\,.\,446^2}{180\,.\,1\,.\,12^2} = 7{,}9 : 1$ wie es sich aus dem vorigen §. ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht ergibt.

Aus der vorigen Proportion folgt die Gleichung $\frac{G}{Q} = \frac{H}{288\,L} \cdot \frac{180\,A\,.\,l^2}{q\,.\,h}$. Wenn wir daher von einem bestimmten Versuche ausgehen, wobei also A, l, q und h dieselben Werthe haben, so ist wenn die Höhe H der Länge L proportional ist, das Verhältniss G : Q immer dasselbe. Ist z. B. die Höhe H der 24te Theil der Länge L, so wird bei allen von demselben Holze erzeugten Balken auch dasselbe Uibermaass über den Bruch vorhanden seyn.

Wenn aber die Länge L dieselbe bleibt und bloss die Höhe H grösser wird, z. B. wenn mehrere Balken auf einander gebunden werden, so steigt dieses Uibermaas nach Verhältniss der Zunahme der Höhe. Z. B. wenn drei eichene Endsbäume von der Beschaffen-

heit Nro. 1 auf einander gebunden werden, so ist $G : Q = 1 : 7{,}8 . 3 = 1 : 23{,}4$, d. h. es wird die 23fache Last für den Bruch erfordert.

§. 325.

Nehmen wir aus den §. 322 berechneten Werthen für μ das Mittel bei jeder Holzgattung, so ergeben sich folgende Gleichungen für die angenommene Biegung von 1 : 288

für Balken von Eichenholz $G = 17607 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, für Balken von Buchenholz $G = 19024 \frac{B \cdot H^3}{L^2}$,

— — — Fichtenholz $G = 28463 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, — — — Tannenholz $G = 25683 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$.

Es verhält sich also das Tragungsvermögen dieser vier Holzgattungen bei gleichen Dimensionen B, H und L wie $1 : 1{,}08 : 1{,}62 : 1{,}46$. Wir ersehen, hieraus dass Eichen- und Buchenholz ein geringeres Tragungsvermögen als Fichten- und Tannenholz habe. Wo es daher bloss auf das Tragungsvermögen und nicht auch auf die lange Dauer der Hölzer ankommt, sind die genannten weichen Hölzer den harten vorzuziehen.

Nach den Erfahrungen, welche Herr *Tredgold* in seinem Werke „*A practical essay on the strength of cast iron*,“ über diese Holzgattungen anführt, ergeben sich bei gleicher Biegung von 1 : 288 und wenn B und H in englischen Zollen, L aber in englischen Fussen substituirt wird, folgende Gleichungen:

Für Balken v. engl. Eichenh. $G = 164 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, für Balken von Buchenholz $G = 130 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$,

— — — Fichtenh. (*Fir*) $G = 194 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, — — — Tannenholz $G = 177 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$.

Um die Reduktion auf N. Oe. Maass und Gewicht zu machen, und B, H und L in Zollen zu substituiren, müssen diese Gleichungen mit dem Quadrate des Verhältnisses des englischen Fusses zum N. Oestreicher $(0{,}9642)^2$, dann mit dem Verhältnisse des englischen Pfundes zum N. Oestreicher $(0{,}8099)$, endlich mit 144 multiplicirt werden, und wir erhalten:

für Balken v. eng. Eichenh. $G = 17782 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, für Balken v. Buchenholz $G = 14095 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$,

— — — Fichtenh. $G = 21034 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$, — — — Tannenholz $G = 19191 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$.

Diese Gleichungen stimmen so genau überein, als es nur bei solchen Versuchen erwartet werden kann.

§. 326.

Bei Metallen z. B. bei Guss- oder Schmiedeeisen, welches bei dem Bau- und Maschinenwesen gebraucht wird, darf die Biegung nicht so gross, als jene bei Bauhölzern angenommen werden. *Tredgold* nimmt die Biegung gusseisener Stangen oder Barren, welche zum Tragen von Mauern oder andern Lasten verwendet werden, nur mit ein vierzigstel Zoll auf einen Fuss Länge, sonach mit 1 Zoll auf 480 Zoll Länge (zwischen beiden Auflagen gemessen) an, und berechnet hiernach eine weitläufige Tabelle über die Stärke, welche quadratförmige Gusseisenstangen bei Annahme der Biegung 1 : 480 erhalten müssen. Wir glauben, dass diese Biegung dem praktischen Gebrauche ange-

messen sey, wesshalb auch der Coefficient μ bei nachfolgenden mit Guss- und Stabeisen angestellten Versuchen hiernach berechnet wurde.

Zu den Versuchen über Gusseisen wurden Schienen von mehreren böhmischen Eisenwerken verwendet, welche unmittelbar aus der ersten Schmelzung vom Hochofen in Sandformen gegossen wurden. Wir fügen hier den ersten Versuch im Detail mit der Bemerkung bei, dass in den sieben horizontalen Versuchsreihen die obern Zahlen die Biegungen bei der successiven Entlastung, die untern Zahlen aber die Biegungen bei der abermaligen Belastung ausdrücken, welche beide hier um etwas abweichen.

Versuchsreihe.	Bleibende Biegung der Gusseisenschiene.	Angehängte Gewichte = g in N. Oe. Pfunden									
		100	200	300	400	500	600	700	800	900	925
		30fache Biegung der Schiene in N. Oe. Linien.									
1	0	18 18	36 36								
2	2	20 20	37 37	54,5 54							
3	3	22 21	39 39	57 56	74 74						
4	6	24 23	42 41	60 58	77 77	96 95					
5	9	27,5 26	45 44	64 62	82 80	100 99	118 118				
6	11	30 29	48,5 46,5	68 64,5	87,5 83,5	106 103	124 122,5	143 143			
7	17,5	38 36	60 57	80 77	99,5 96	117 114	135 133	153 152	171 171		

Nachdem die Schiene mit 8 Zentner durch 16 Stunden beschwert blieb, senkte sie sich bis 196 und ging entlastet sogleich auf 82 zurück; 24 Stunden nach der Entlastung zeigte sie die bleibende Biegung von beiläufig 17. Hierauf wurde der folgende Versuch gemacht, wobei die Biegung im unbelasteten Zustande = 0 gesetzt ist:

8	0	19	38	57	76	95	114	134	154	176	182

Bei der zuletzt eingetretenen Biegung von 182 brach die Schiene.

Die Unterschiede dieser Zahlen zeigen, dass die Biegung der gusseisernen Schiene bis zur Belastung von sieben Zentner der aufgelegten Last proportional blieb, woraus zu schliessen ist, dass auch das Gusseisen, so wie wir es bereits bei der Ausdehnung der Drähte bemerkten, nach einer erhaltenen grössern bleibenden Biegung vollkommen elastisch bis zu dem aufgelegten Gewichte blieb, wovon diese Biegung bewirkt wurde. Als hierauf diess Gewicht überschritten worden ist, traten abermals grössere Biegungen ein. Die Zusammenstellung dieser beiden Versuchsreihen gibt nachstehende 2 Tabellen:

Versuch Nro. 1.

Beschreibung der geprüften Gusseisenschiene.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung der Schiene nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung der Schiene nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N.Oe.Lin.
Gusschiene	100	18	17,8	+ 0,2	17,5	+ 0,3
von *Darowa* im	200	36	36,1	— 0,1	35,0	+ 1,1
Pilsner Kreise.	300	54,5	55,1	— 0,6	52,5	+ 2,6
Höhe 11,7 Lin.	400	74	74,9	— 0,9	69,9	+ 5,0
Breite 21,65 Li-	500	95,5	95,4	+ 0,1	87,4	+ 8,0
nien. Länge 34	600	118	116,9	+ 1,1	104,9	+ 12,0
Zoll. Spezifi-	700	143	139,4	+ 3,6	122,4	+ 17,0
sche Schwere	800	171	163,1	+ 7,9	139,9	+ 23,2
7,153.						

Die aus den ersten 6 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 575 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{1643}\right)}\right\}$ worin A = 5,718600 und $B = \frac{1}{201}$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von $\frac{1}{40}$ Zoll per Fuss oder 1 : 480 ist μ = 100809.

Nachdem die Schiene mit 8 Zentner durch 16 Stunden beschwert blieb, vergrösserte sich die Biegung von $\frac{171}{30}$ = 5,7 Linien auf $\frac{199}{30}$ = 6,6 Linien, und die Schiene ging entlastet sogleich auf $\frac{85}{30}$ = $2\frac{5}{6}$ Linien zurück; 24 Stunden nach der Entlastung zeigte sich die bleibende Biegung mit $\frac{15}{30}$ = 0,5 Linien. Die Zusammenstellung des auf der vorigen Seite angeführten zweiten Versuches, welcher mit dieser Schiene vorgenommen wurde, gibt nachstehende Tabelle:

Versuch Nro. 2.

	100	19	19,0	+ 0,0	18,9	+ 0,1
Die obige	200	38	38,0	+ 0,0	37,9	+ 0,1
Schiene.	300	57	57,1	— 0,1	56,8	+ 0,3
	400	76	76,1	— 0,1	75,8	+ 0,3
	500	95	95,3	— 0,3	94,7	+ 0,6
	600	114	114,5	— 0,5	113,6	+ 0,9
	700	134	133,8	+ 0,2	132,6	+ 1,2
	800	154	153,1	+ 0,9	151,5	+ 1,6
	900	176	172,5	+ 3,5	170,5	+ 2,0
	925	182	177,3	+ 4,7	175,2	+ 2,1

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 7529 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{19876}\right)}\right\}$ worin A = 5,279815 und $B = \frac{1}{2852}$. Der Coefficient für den Bruch ist m = 4584. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist μ = 93074.

Versuch Nro. 3.

Beschreibung der geprüften Gusseisenschiene.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung der Schiene nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung der Schiene nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N.Oe.Lin.
Gusschiene	100	17	17,0	+ 0,0	16,9	+ 0,1
von *Darowa* im	200	35	34,7	+ 0,3	33,8	+ 0,9
Pilsner Kreise.	300	53	53,2	— 0,2	50,7	+ 2,5
Höhe 11,92 Lin.	400	72	72,5	— 0,5	67,5	+ 5,0
Breite 22,2 Lin.	500	92	92,7	— 0,7	84,4	+ 8,3
Länge zwischen	600	114	114,1	— 0,1	101,3	+ 12,8
den Auflagen	700	137	136,8	+ 0,2	118,2	+ 18,6
34 Zoll. Spezi-	800	162	161,2	+ 0,8	135,0	+ 26,2
fische Schwere	900	191	187,6	+ 3,4	152,0	+ 35,6
7,104.	1000	220	216,7	+ 3,3	168,9	+ 47,8
	1025	225	224,5	+ 0,5	173,1	+ 51,4

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 476\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{1422}\right)}\right\}$ worin $A = 5{,}980948$ und $B = \frac{1}{159}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 4773$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 97232$.

Der Bruch der Schiene erfolgte bei der Belastung von 1025 ℔.

Versuch Nro. 4.

Beschreibung	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Gusschiene	100	22	22,0	+ 0,0	21,7	+ 0,3
von Karlshüt-	200	44	44,2	— 0,2	43,4	+ 0,8
te, Herrschaft	300	67	66,9	+ 0,1	65,1	+ 1,8
Königshof. Hö-	400	90	90,0	+ 0,0	86,8	+ 3,2
he 11,23 Linien,	500	115	113,7	+ 1,3	108,5	+ 5,2
Breite 22,75 Li-	600	143	137,8	+ 5,2	130,2	+ 7,6
nien, Länge 34	700	173	162,5	+ 10,5	151,9	+ 10,6
Zoll. Spezifi-	800	205	187,8	+ 17,2	173,6	+ 14,2
sche Schwere 7,154.						

Die aus den ersten 4 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 1241\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{2860}\right)}\right\}$ worin $A = 4{,}606674$ und $B = \frac{1}{539}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 4096$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 87396$.

Der Bruch der Schiene erfolgte bei der Belastung von 8 Zentner.

Versuch Nro. 5.

Beschreibung der geprüften Gusseisenschiene.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung der Schiene nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung der Schiene nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Gusschiene von Karlshütte, Herrschaft Königshof. Höhe 11,8 Linien, Breite 22,7 Lin., Länge 34 Zoll. Spez. Schwere 7,231.	100	18	17,8	+ 0,2	17,5	+ 0,3
	200	36	36,2	— 0,2	34,9	+ 1,3
	300	55	55,4	— 0,4	52,4	+ 3,0
	400	75	75,4	— 0,4	69,9	+ 5,5
	500	96,5	96,4	+ 0,1	87,4	+ 9,0
	600	119	118,4	+ 0,6	104,8	+ 13,6
	700	141	141,8	— 0,8	122,3	+ 19,5
	800	165	166,8	— 1,8	139,8	+ 27,0
	900	191	193,6	— 2,6	157,2	+ 36,4

Die aus den ersten 6 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 515\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{1474}\right)}\right\}$, worin $A = 5{,}723633$ und $B = \frac{1}{180}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 5228$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 93804$.

Die weitern Biegungen waren sehr unregelmässig, und der Bruch der Schiene erfolgte bei 1125 ℔, bei einer Biegung von beiläufig $\frac{250}{30} = 8{,}3$ Linien.

Versuch Nro. 6.

Gusschiene von Neu-Joachimsthal. Höhe 13,1 Linie, Breite 21,4 Lin. Länge zwischen den Auflagen 34 Zoll. Länge der ganzen Schiene 35¾ Zoll. Spez. Schwere 7,175.	100	13	12,8	+ 0,2	12,6	+ 0,2
	200	26	25,9	+ 0,1	25,3	+ 0,6
	300	39	39,3	— 0,3	37,8	+ 1,4
	400	52	53,0	— 1,0	50,5	+ 2,5
	500	66	67,1	— 1,1	63,2	+ 3,9
	600	81	81,6	— 0,6	75,8	+ 5,8
	700	97	96,5	+ 0,5	88,5	+ 8,0
	800	114	111,9	+ 2,1	101,1	+ 10,8
	900	131	127,9	+ 3,1	113,7	+ 14,2
	1000	148	144,4	+ 3,6	126,4	+ 18,0
	1100	166	161,5	+ 4,5	139,0	+ 22,5
	1200	185	179,4	+ 5,6	151,6	+ 27,8
	1300	206	198,1	+ 7,9	164,3	+ 33,8

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 582\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{2301}\right)}\right\}$, worin $A = 7{,}913271$ und $B = \frac{1}{147}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 5199$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 100543$.

Der Bruch dieser Schiene erfolgte von 13 Zentner.

Versuch Nro. 7.

Beschreibung der geprüften Gusseisenschiene.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung der Schiene nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung der Schiene nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N. Oe. Pf.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N. Oe. Lin.
Gussschiene	100	13	12,8	+ 0,2	12,7	+ 0,1
von Neu-Jo-	200	26	25,9	+ 0,1	25,3	+ 0,6
achimsthal.	300	39	39,2	— 0,2	38,0	+ 1,2
Höhe 13,43 Lin.	400	52	52,8	— 0,8	50,7	+ 2,1
Breite 22,05 Lin.	500	66	66,8	— 0,8	63,3	+ 3,5
Länge zwischen	600	81	81,1	— 0,1	76,0	+ 5,1
den Auflagen 34	700	96,5	95,8	+ 0,7	88,7	+ 7,1
Zoll. Länge der	800	112	110,9	+ 1,1	101,4	+ 9,5
ganzen Schiene	900	128	126,5	+ 1,5	114,0	+ 12,5
36½ Zoll, spez.	925	131	130,5	+ 0,5	117,2	+ 13,3
Schwere 7,151.						

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 639 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{2523}\right)}\right\}$, worin $A = 7{,}893257$ und $B = \frac{1}{162}$. Der Coefficient für den Bruch ist $m = 3416$. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1:480 ist $\mu = 90332$.

Der Bruch erfolgte bei 925 ℔, und man fand in der Schiene an der untern Fläche, womit sie auflag, eine kugelförmige von aussen nicht sichtbare Luftblase von 4¾ Linien Durchmesser. Diese Luftblase war 11 Linien von der Mitte der Schiene entfernt; die letztere brach desshalb nicht in der Mitte, sondern bei dieser Luftblase, woraus sich auch das geringere Tragungsvermögen erklärt.

§. 327.

Aus diesen sieben Versuchen ersieht man, dass der Coefficient μ einen sehr nahe übereinstimmenden Werth hat; derselbe beträgt nämlich im Mittel der 7 Versuche 94685, wornach die Gleichung $G = 94741 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$ folgt.

Tredgold leitet in dem bereits angeführten Werke auf einem andern Wege die Gleichung $G = 1065 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$ ab, wobei dieselbe Biegung von $\frac{1}{40}$ Zoll per Fuss angenommen wurde, jedoch die Länge L in Fussen zu substituiren ist. Wird hier die Redukzion auf N. Oe. Maass und Gewicht gemacht und L in Zollen angenommen, so folgt $G = 1065 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2} \cdot (0{,}9642)^2 \cdot 144 \cdot 0{,}8099 = 115472 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$; diess Gewicht beträgt beiläufig um $\frac{2}{9}$tel mehr, allein wir haben bloss gewöhnliches Gusseisen versucht, wogegen in England alle derlei Barren erst bei der zweiten Schmelzung des Eisens, demnach aus einem vollkommenern Materiale erzeugt werden.

§. 328.

Zu Versuchen über die **Biegung des Schmiedeeisens** wurden ordinäre Stäbe von dem Eisenwerke zu Neujoachimsthal in Böhmen aus der Ursache verwendet, um die Beschaffenheit des gemeinen, im Handel vorkommenden Schmiedeeisens kennen zu lernen.

Versuch Nro. 1.

Benennung der Schienengattung u. Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Gittereisen.	25	7,5	7,5	+ 0,0	7,5	+ 0,0
Höhe 10,35 Li-	50	15	14,9	+ 0,1	14,9	+ 0,0
nien, Breite 9,75	75	22,5	22,4	+ 0,1	22,4	+ 0,0
Lin. Länge zwi-	100	30	29,8	+ 0,2	29,8	+ 0,0
schen den Un-	125	37,5	37,3	+ 0,2	37,3	+ 0,0
terlagen 34 Zoll.	150	44,5	44,7	— 0,2	44,7	+ 0,0
	175	51,5	52,2	— 0,7	52,2	+ 0,0
	200	59,0	59,6	— 0,6	59,6	+ 0,0
	225	67	67,1	— 0,1	67,1	+ 0,0
	250	74,5	74,6	— 0,1	74,5	+ 0,1
	275	82	82,0	+ 0,0	82,0	+ 0,0
	300	89,5	89,5	+ 0,0	89,4	+ 0,1
	325	97	97,0	+ 0,0	96,9	+ 0,1
	350	104	104,4	— 0,4	104,4	+ 0,0
	375	111,5	111,8	— 0,3	111,8	+ 0,0
	400	119	119,3	— 0,3	119,2	+ 0,1
	425	126,5	126,7	— 0,2	126,7	+ 0,0
	450	134	134,2	— 0,2	134,2	+ 0,0
	475	141,5	141,7	— 0,2	141,6	+ 0,1
	500	149	149,1	— 0,1	149,1	+ 0,0
	525	157	156,6	+ 0,4	156,5	+ 0,1
	550	165,5	164,0	+ 1,5	164,0	+ 0,0
	575	174,5	171,5	+ 3,0	171,4	+ 0,1
	600	184,5	178,9	+ 5,6	178,9	+ 0,0
	625	195,5	186,4	+ 9,1	186,3	+ 0,1
	650	207,5	193,8	+ 13,7	193,8	+ 0,0
	675	220,5	201,3	+ 19,2	201,2	+ 0,1
	700	233	208,8	+ 24,2	208,7	+ 0,1

Die aus den ersten 22 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist: $30\,u = 544054 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{912389}\right)}\right\}$, worin $A = 3{,}354039$ und $B = \frac{1}{324417}$.

Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 189656$.

Mit diesem Versuche wurde geschlossen, weil kein vollständiger Bruch bei diesem Stabe zu erwarten war und die Gränze der vollkommenen Elasticität sich bereits überschritten fand. Uiberdiess war auch aus der ungleichförmigen Biegung an verschiedenen Stellen die ungleiche Beschaffenheit des verwendeten Eisens deutlich zu erkennen, folglich konnte sich kein Gesetz für die weitern Biegungen mehr ergeben.

Versuch Nro. 2.

Benennung der Schienengattung u. Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N. Oe. Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Gittereisen. Höhe 9,7 Linien, Breite 9,4 Linien, Länge zwischen den Unterlagen 34 Zoll.	25	10	10,0	+ 0,0	10,0	+ 0,0
	50	20	20,0	+ 0,0	19,9	+ 0,1
	75	30	30,0	+ 0,0	29,9	+ 0,1
	100	40	40,0	+ 0,0	39,9	+ 0,1
	125	50	50,0	+ 0,0	49,8	+ 0,2
	150	60	60,1	— 0,1	59,8	+ 0,3
	175	70	70,1	— 0,1	69,8	+ 0,3
	200	80	80,2	— 0,2	79,8	+ 0,4
	225	90	90,3	— 0,3	89,7	+ 0,6
	250	100	100,4	— 0,4	99,7	+ 0,7
	275	110	110,4	— 0,4	109,7	+ 0,7
	300	120	120,6	— 0,6	119,6	+ 1,0
	325	130	130,8	— 0,8	129,6	+ 1,2
	350	140,5	140,9	— 0,4	139,6	+ 1,3
	375	152	151,1	+ 0,9	149,5	+ 1,6
	400	164,5	161,3	+ 3,2	159,5	+ 1,8
	425	178	171,5	+ 6,5	169,5	+ 2,0
	450	193	181,7	+ 11,3	179,4	+ 2,3
	475	210	192,0	+ 18,0	189,4	+ 2,6
	500	234	202,3	+ 31,7	199,4	+ 2,9
	525	321	212,5	+ 108,5	209,4	+ 3,1

Die aus den ersten 16 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist: $30\,u = 7363\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{9231}\right)}\right\}$, worin $A = 2{,}507664$ und $B = \frac{1}{5872}$.

Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 178669$.

Dieser Stab erhielt unter der Belastung mit $4\frac{3}{4}$ Zentner eine Einbiegung in der Mitte von $\frac{210'''}{30} = 7'''$ und zeigte nach der Entlastung die bleibende Biegung von $\frac{24'''}{30}$ oder $0{,}8'''$; bei der Belastung mit 6 Zentner vergrösserte sich die Einbiegung bis auf $\frac{495'''}{30} = 16\frac{1}{2}'''$ und nach der Entlastung betrug die bleibende Biegung $\frac{265'''}{30} = 8\frac{5}{6}'''$.

Versuch Nro. 3.

Gittereisen. Höhe 7,6 Linien, Breite 7,8 Linien, Länge zwischen den Unterlagen 34 Zoll.	25	23	22,8	+ 0,2	22,7	+ 0,1
	50	46	46,0	+ 0,0	45,3	+ 0,7
	75	69	69,5	— 0,5	68,0	+ 1,5
	100	93	93,4	— 0,4	90,7	+ 2,7
	125	117	117,5	— 0,5	113,3	+ 4,2
	150	141,5	142,0	— 0,5	136,0	+ 6,0
	175	166	167,2	— 1,2	158,6	+ 8,6
	200	195	192,4	+ 2,6	181,3	+ 11,1
	225	228	218,3	+ 9,7	204,0	+ 14,3
	250	266	244,6	— 21,4	226,6	+ 18,0
	275	340	271,4	+ 68,6	249,3	+ 22,1

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 1676\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{924}\right)}\right\}$, worin $A = 1{,}103038$ und $B = \frac{1}{3039}$. Für die oben angeführte Senkung ist $\mu = 196915$.

Bei der Belastung mit 2¾ Zentner zeigte der Stab augenblicklich eine Einbiegung in der Mitte von $\frac{335'''}{30} = 11\frac{1}{6}'''$, die Biegung vermehrte sich jedoch fortwährend, und erreichte nach 15 Stunden eine Grösse von $\frac{470'''}{30} = 15\frac{2}{3}'''$ ohne sich weiters noch zu vermehren; nach der Entlastung behielt der Stab eine bleibende Biegung von $\frac{210'''}{30} = 7'''$.

Versuch Nro. 4.

Benennung der Schienengattung u. Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II 30fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschied zwischen III und V.
	N.Oe. Pf.	N.Oe. Lin.	N.Oe. Lin.	N. Oe. Lin.	N. Oe. Linien	N.Oe. Lin.
Ordinäres Radreifeisen. Höhe 3,73 Linien Breite 2 Zoll 4,7 Linien, Entfernung der Unterlagen 34 Zoll.	5	12	12,0	+ 0,0	12,0	+ 0,0
	10	24	24,1	— 0,1	24,0	+ 0,1
	15	36	36,2	— 0,2	36,0	+ 0,2
	20	48	48,3	— 0,3	48,0	+ 0,3
	25	60,5	60,5	+ 0,0	60,0	+ 0,5
	30	72,5	72,7	— 0,2	72,0	+ 0,7
	35	85	85,0	+ 0,0	84,0	+ 1,0
	40	97,5	97,2	+ 0,3	96,1	+ 1,1
	45	110	109,5	+ 0,5	108,1	+ 1,4
	50	122,5	121,9	+ 0,6	120,1	+ 1,8
	55	135	134,3	+ 0,7	132,1	+ 2,2
	60	147,5	146,7	+ 0,8	144,1	+ 2,6
	65	160	159,2	+ 0,8	156,1	+ 3,1
	70	172,5	171,8	+ 0,7	168,1	+ 3,7
	75	185	184,3	+ 0,7	180,1	+ 4,2
	80	197	197,0	+ 0,0	192,1	+ 4,9
	85	209,5	209,6	— 0,1	204,1	+ 5,5
	90	222	222,3	— 0,3	216,1	+ 6,2
	95	234,5	235,0	— 0,5	228,1	+ 6,9
	100	247	247,8	— 0,8	240,1	+ 7,7
	105	260	260,6	— 0,6	252,1	+ 8,5
	110	273	273,5	— 0,5	264,2	+ 9,3
	115	286,5	286,4	+ 0,1	276,2	+ 10,2
	120	300	299,4	+ 0,6	288,2	+ 11,2
	125	313,5	312,4	+ 1,1	300,2	+ 12,2
	130	327,5	325,4	+ 2,1	312,2	+ 13,2
	135	346	338,5	+ 7,5	324,2	+ 14,3
	140	366	351,7	+ 14,3	336,2	+ 15,5
	150	387,5	364,9	+ 22,6	348,2	+ 16,7
	160	449,5	378,1	+ 71,4	360,2	+ 17,9

Aus den ersten 24 Beobachtungen ergibt sich für die Biegung die Gleichung $30\,u = 3966\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{826}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}416421$ und $B = \frac{1}{19046}$ ist.

Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 170902$.

Diese Schiene bog sich mit 160 ℔ belastet in der Mitte um $\frac{449{,}5'''}{30} = 14{,}98$ Linien ein, und die Biegung vermehrte sich selbst nach 24 Stunden nicht; entlastet behielt sie eine bleibende Biegung von $\frac{49'''}{30} = 1{,}63$ Linien

Versuch Nro. 5.

Benennung der Schienengattung u. Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Gewalztes Eisen. Höhe 3,51 Lin. Breite 2 Z. 2,6 Lin. Entfernung der Unterlagen 34 Zoll.	3	8	7,9	+ 0,1	7,9	+ 0,0
	6	16	15,9	+ 0,1	15,9	+ 0,0
	9	24	23,9	+ 0,1	23,8	+ 0,1
	12	32	32,1	— 0,1	31,7	+ 0,4
	15	40	40,3	— 0,3	39,7	+ 0,6
	18	48,5	48,5	+ 0,0	47,6	+ 0,9
	21	57	56,7	+ 0,3	55,5	+ 1,2
	24	65,5	65,1	+ 0,4	63,5	+ 1,6
	27	74	73,5	+ 0,5	71,4	+ 2,1
	30	82,5	81,9	+ 0,6	79,3	+ 2,6
	33	91	90,5	+ 0,5	87,3	+ 3,2
	36	99,5	99,0	+ 0,5	95,2	+ 3,8
	39	108	107,7	+ 0,3	103,2	+ 4,5
	42	116,5	116,4	+ 0,1	111,1	+ 5,3
	45	125	125,2	— 0,2	119,0	+ 6,2
	48	134	134,1	— 0,1	127,0	+ 7,1
	51	143	143,0	+ 0,0	134,9	+ 8,1

Die aus allen 17 Beobachtungen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 1214\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{230}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}378072$ und $B = \frac{1}{6424}$ ist. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung von 1 : 480 ist $\mu = 200907$.

Da diese Schiene noch ihre vollkommene Elasticität zeigte, wurde nachstehender Versuch vorgenommen.

Versuch Nro. 6.

Dieselbe Schiene.	10	27	27,1	— 0,1	27,0	+ 0,1
	20	54,5	54,6	— 0,1	54,1	+ 0,5
	30	82,5	82,4	+ 0,1	81,1	+ 1,3
	40	111	110,4	+ 0,6	108,1	+ 2,3
	50	139,5	138,8	+ 0,7	135,2	+ 3,6
	60	168	167,6	+ 0,4	162,2	+ 5,4
	70	197	196,6	+ 0,4	189,2	+ 7,4
	80	226	226,0	+ 0,0	216,3	+ 9,7
	90	255,5	255,8	— 0,3	243,3	+ 12,5
	100	286	286,0	+ 0,0	270,4	+ 15,6
	110	318,5	316,6	+ 1,9	297,4	+ 19,2
	120	353	347,6	+ 5,4	324,4	+ 23,2
	130	388	379,1	+ 8,9	351,5	+ 27,6
	140	425	411,0	+ 14,0	378,5	+ 32,5
	150	465	443,3	+ 21,7	405,5	+ 37,8
	160	514	476,2	+ 37,8	432,6	+ 43,6
	170	556 / 603	509,6	+ 46,4 / + 93,4	459,6	+ 50,0

Die aus den ersten 10 Beobachtungen abgeleitete Gleichung für die Biegung ist $30\,u = 2583\left\{1-\sqrt{\left(1-\frac{g}{478}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}369888$ und $B = \frac{1}{13967}$ ist. Der Coefficient für die Biegung bei vollkommener Elasticität und der Annahme einer Senkung 1 : 480 ist $\mu = 196558$.

Bei der Belastung mit 170 ℔ betrug die augenblickliche Biegung $\frac{556}{30} = 18{,}53'''$, die Biegung vermehrte sich aber nach einigen Stunden bis auf $\frac{603}{30} = 20{,}1'''$. Entlastet ging die Schiene nicht mehr ganz zurück, sondern behielt die bleibende Biegung von $\frac{96}{30} = 3{,}2'''$. In diesem gebogenen Zustande wurde mit derselben Schiene ein neuer Versuch vorgenommen, bei welchem sich ohne Rücksicht auf die bereits vorhandene Biegung nachstehende Resultate ergaben:

Versuch Nro. 7.

Benennung der Schienengattung u. Beschreibung des Stabes.	I. Werth für g.	II. 30fache Biegung des Stabes nach der Beobachtung.	III. 30fache Biegung des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende 30fache Biegung $u = \frac{g}{A}$	VI. Unterschiede zwischen III und V.
	N.Oe.Pf.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Lin.	N.Oe.Linien	N.Oe.Lin.
Die vorige Schiene.	10	27	27,1	— 0,1	27,0	+ 0,1
	20	55	54,6	+ 0,4	54,1	+ 0,5
	30	83	82,4	+ 0,6	81,1	+ 1,3
	40	111,5	110,4	+ 1,1	108,1	+ 2,3
	50	140	138,8	+ 1,2	135,2	+ 3,6
	60	169	167,6	+ 1,4	162,2	+ 5,4
	70	198	196,6	+ 1,4	189,2	+ 7,4
	80	227	226,0	+ 1,0	216,3	+ 9,7
	90	256	255,8	+ 0,2	243,3	+ 12,5
	100	285,5	286,0	— 0,5	270,4	+ 15,6
	110	315	316,6	— 1,6	297,4	+ 19,2
	120	344,5	347,6	— 3,1	324,4	+ 23,2
	130	374	379,1	— 5,1	351,5	+ 27,6
	140	405	411,0	— 6,0	378,5	+ 32,5
	150	437	443,3	— 6,3	405,5	+ 37,8
	160	472	476,2	— 4,2	432,6	+ 43,6

Der Vergleich der Beobachtungsresultate in diesem Versuche mit jenen des nächst vorhergehenden zeigt offenbar bis zur Belastung von 100 ℔ dieselben Zahlen, denn die kleinen statt findenden Abweichungen können nur als unvermeidliche Beobachtungsfehler angesehen werden: es kann daher auch hier für die Biegung die eben angegebene Gleichung $30 . u = 2583 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{g}{478}\right)}\right\}$, beibehalten werden.

Eben so ist hier auch der Coeffizient μ derselbe und = 196558.

Bei der Belastung von 180 ℔ bog sich die Schiene in der Mitte um $\frac{550}{30} = 18{,}33'''$, und mit Rücksicht auf ihre anfängliche Biegung $\frac{96}{30} = 3{,}2'''$ im Ganzen um $\frac{646}{30} = 21{,}53'''$ unter die Horizontale. Entlastet zeigte sie im Ganzen die bleibende Biegung $\frac{106}{30} = 3{,}53'''$.

§. 329.

Aus den Versuchen über das Stab- oder Schmiedeeisen ergibt sich, dass der Coefficient μ bei den ordinären Gattungen des gewöhnlichen, im Handel vorkommenden Eisens im Mittel der Versuche Nro. 1, 2, 3 und 4 die Zahl 184036 beträgt, demnach die Gleichung $G = 184036 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$ statt findet.

Das gewalzte Eisen Nro. 5, 6 und 7 bog sich beinahe so viel als ordinäres Stabeisen und es findet hiefür als Mittelwerth dieser 3 Versuche die Gleichung $G = 198008 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$ statt.

Tredgold stellt für Schmiedeeisen die Gleichung $G = 1442 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$ auf, wobei die Länge L in Fussen angenommen ist; macht man daher die Reduktion auf N. Oe. Maass und Gewicht und für den Fall, dass B, H und L in Zollen gesetzt werden, so folgt $G = 1442 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2} \cdot 144 \cdot (0{,}9642)^2 \cdot 0{,}8099 = 156348 \cdot \frac{B \cdot H^3}{L^2}$; dieser Werth stimmt mit unserer Angabe nahe überein, wenn man berücksichtigt, dass in England beinahe alles Eisen gewalzt wird, demnach schwächer als unser gehämmertes Stabeisen ist.]

Nehmen wir 6 Balken von gleichen Dimensionen, B, H und L, jedoch von ungleicher Materie und zwar von Eichen-, Buchen-, Fichten- und Tannenholz, dann von Gusseisen und von Schmiedeeisen an, so verhalten sich die Gewichte, welche diese Balken bei gleicher Biegung (ohne Rücksicht auf ihr eigenes Gewicht) zu tragen vermögen, wie die Zahlen $17607 : 19024 : 28463 : 25683 : 94771 \cdot \frac{480}{288} : 184036 \cdot \frac{480}{288}$ oder wie $1 : 1{,}08 : 1{,}62 : 1{,}46 : 8{,}97 : 17{,}42$; d. h. bei gleichen Dimensionen und derselben Biegung tragen schmiedeiserne Balken beinahe zweimal so viel als gusseiserne und hölzerne beiläufig nur den siebenten Theil wie jene von Gusseisen; unter den obigen vier Hölzern hat aber das Fichtenholz das grösste Tragungsvermögen.

Aus der vorstehenden Proportion lässt sich nun auch beurtheilen, in welchen Fällen das Eisen oder Holz den Vorzug verdiene. Wo ein Kubikfuss Gusseisen wohlfeiler zu stehen kommt als sieben Kubikfuss Holz, dort ist es, ohne Rücksicht auf die grössere Dauer des Eisens, vortheilhafter sich des letztern zu bedienen. Im verflossenen Jahre wurde in England in den Häfen von *Wales* eine Tonne Roheisen (*pig iron*) um 3 Liv. st. und eine Tonne einmal umgeschmolzenes Eisen (*refined Iron*) um 4 Liv. st. verkauft, wogegen ein Kubikfuss Bauholz auf $2{,}5$ sh. an denselben Orten zu stehen kam. Da nun $4\frac{1}{2}$ Kubikfuss Gusseisen beiläufig eine Tonne wiegen, so kam ein Kubikfuss Roheisen auf $13\frac{1}{3}$ sh. oder 6 fl. 40 kr., d. h. $5\frac{1}{3}$ mal theurer als das Holz zu stehen, allein das Tragungsvermögen des Eisens ist 7mal grösser; bei diesem Preise ist es daher weit vortheilhafter sich des Gusseisens zu bedienen, da es noch den Vortheil der längern Dauer gewährt.

Dagegen kostet in Böhmen ein Kubikfuss oder 4 Zentner gemeines Roheisen beiläufig 12 fl. C. M., ein Kubikfuss Bauholz beiläufig $\frac{1}{5}$ fl. C. M.; es ist daher weit vortheilhafter, sich der Hölzer zu bedienen, wenn sie auch nur den 7ten Theil des Tragungsvermögens von Gusseisen haben.

§. 330.

Mit Hülfe der vorigen Versuche und der aus denselben abgeleiteten Gleichungen können alle Aufgaben, die Dimensionen der Balken, Stäbe oder Barren nach Maassgabe ihrer Biegung zu bestimmen, aufgelöst werden.

1tes Beispiel. Man soll die Seiten eines quadratischen Stabes von Gusseisen finden, der 12 Fuss lang ist, in der Mitte eine Belastung von 25 Zentner zu tragen hat und sich dabei nur um $\frac{1}{40}$ Zoll auf den Fuss Länge biegen darf.

Da in diesem Falle B = H ist, so gibt die Substitution in die §. 327 aufgestellte Gleichung $2500 = 94741 \frac{H^4}{12^2 . 12^2}$ den Werth für H = 4,8 Zoll, hiebei ist jedoch das eigene Gewicht des Stabes nicht in Anschlag genommen. Nimmt man einen Kubikzoll Gusseisen zu $\frac{1}{4}$ ℔ an, so ist $2500 = \frac{94741 . H^4}{12^2 . 12^2} - \frac{12 . 12 . H^2}{2 . 4}$, woraus H = 5,0 Zoll folgt.

Wollte man bei der obigen Belastung einen Balken von Eichenholz verwenden, so haben wir nach §. 325 die Gleichung $G = 17607 . \frac{B . H^3}{L^2}$, wobei aber eine Biegung von 1 : 288 zum Grunde liegt; da aber unser Balken sich nur um den 480ten Theil seiner Länge biegen darf, so ist $G = \frac{17607 . 288}{480} . \frac{B . H^3}{L^2}$ und wenn die Werthe für unsern Fall substituirt werden, $2500 = \frac{17607 . 288 . H^4}{480 . 12^2 . 12^2}$, woraus H = 8,4 Zoll folgt. Mit Berücksichtigung des eigenen Gewichtes wäre, wenn der Kubikfuss Eichenholz zu 50 ℔ angenommen wird, $2500 = \frac{17607 . 288 . H^4}{480 . 12^2 . 12^2} - \frac{12 . 12 . 50 . H^2}{2 . 1728}$, woraus H = 8,5 Zoll; der eichene Balken müsste daher beinahe 2mal stärker seyn als der gusseiserne.

Berechnet man noch die Stärke für einen Balken von Tannenholz und nimmt das Gewicht eines Kubikfusses zu $\frac{1}{3}$ Zentner an, so ist $2500 = \frac{25683 . 288 . H^4}{480 . 12^2 . 12^2} - \frac{12 . 12 . 100 . H^2}{2 . 3 . 1728}$; hieraus ergibt sich H = 7,7 Zoll und man sieht, dass der Balken von Tannenholz um 1,5tel stärker als jener von Gusseisen, dagegen um 0,1tel schwächer, als jener von Eichenholz seyn muss.

2tes Beispiel Eine Mauer von 24 Fuss Höhe und 18 Zoll Stärke soll oberhalb einem Thore in einer Länge von 10 Fuss von 2 nebeneinander liegenden Barren von Gusseisen getragen werden, die sich bloss um $\frac{1}{3}$ Zoll in der Mitte senken dürfen; es fragt sich, die Dimensionen dieser Barren zu bestimmen.

Nach Seite 140 beträgt das Gewicht einer kubischen Klafter Mauerwerk 240 Zentner; in unserm Falle ist das Gewicht des Mauerwerks als eine gleichförmig über die ganze Länge verbreitete Last anzusehen, demnach beträgt die Belastung eines Barrens in der Mitte, $G = \frac{24 . 10 . 1{,}5 . 24000}{216 . 2 . 2} = 10000$ ℔, das Verhältniss der Biegung zur Länge beträgt $\frac{1}{3}$ Zoll : 120 Zoll = 1 : 360; nehmen wir nun H = B, so gibt diess die Gleichung $10000 = \frac{94741 . 480 . H^4}{360 . 120^2}$, woraus H = 5,81 Zoll folgt.

3tes Beispiel. Ein Maschinenschaft von Gusseisen hat in der Mitte einen Druck von 40 Zentner zu erhalten; derselbe ist massiv, cylindrisch und liegt 18 Fuss frei auf; er darf sich nur um $\frac{1}{30}$ Zoll auf den Fuss Länge biegen; es fragt sich seinen Durchmesser zu bestimmen.

Nach §. 307 beträgt das Tragungsvermögen eines Cylinders $\frac{33}{56}$tel von jenem eines Parallelopipeds, in welches der erstere eingeschrieben wird. Demnach wird das Tragungsvermögen eines gusseisernen Cylinders bei der Biegung von 1 : 480 durch die Gleichung $G = \frac{33}{56} \cdot 94741 \cdot \frac{D^4}{L^2}$ bestimmt. In unserm Falle, wo die Biegung bloss die Hälfte betragen darf, ist $4000 = \frac{33 \,.\, 94741 \,.\, 480 \,.\, D^4}{56 \,.\, 360 \,.\, 18^2 \,.\, 12^2}$, woraus $D = 7{,}1$ Zoll folgt.

§. 331.

Aus den berechneten Biegungen der Hölzer und des Eisens können wir die Ausdehnung derselben (in der Richtung ihrer Länge) bestimmen. Wir haben nämlich in der Note Seite 326 gezeigt, dass sich bei einem jeden vollkommen elastischen Körper die Biegung zur Ausdehnung, welche derselbe Körper nach seiner Länge von einem gleichen Gewichte erfährt, wie das Quadrat der halben Länge zum Quadrate der Höhe (oder der gebogenen Seite) des Körpers verhält, oder dass $U : \alpha' = \frac{l^2}{4} : h^2$ sey; man kann demnach in jedem Falle aus der Biegung die Ausdehnung berechnen.

Beispiel. Bei dem schmiedeeisernen Stabe, Versuch Nro. 4, war die Länge zwischen den Auflagspunkten $L = 34$ Zoll $= 408$ Linien und die Höhe $h = 3{,}73$ Linien; folglich ist $U : \alpha' = 204^2 : 3{,}73^2 = 2991 : 1$. Bei dem Gewichte von 100 ℔ ist die Biegung bei vollkommener Elasticität der Tabelle zu Folge $U = \frac{240{,}1}{30} = 8{,}0033$ Linien, demnach ist bei derselben Belastung von 100 ℔ die Längenausdehnung des Stabes oder $\alpha = \frac{8{,}0033}{2991} = \frac{1}{374}$ Linie; die Fläche dieses Stabes betrug $F = 3{,}73 \,.\, 28{,}7 = 107{,}05$ Quadrat Linien.

Vergleichen wir diesen Stab z. B. mit dem gemeinen Drahte S. 270, Versuch Nro. 7, so finden wir, dass bei der Belastung von 44 ℔ $= q$ die Ausdehnung $\alpha = \frac{20{,}3}{54}$ Linie betrug; der Querschnitt dieses Drahtes war $f = 3{,}14159 \left(\frac{107}{127}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}5575$ Quadrat Linie und die Länge desselben $l = 696$ Linien.

Wir haben also nach der §. 238 aufgestellten allgemeinen Proportion $Q : q = \frac{F \,.\, \alpha'}{L} : \frac{f \,.\, \alpha}{l}$, wenn die Werthe für den schmiedeisernen Stab und den gemeinen Draht substituirt werden $100 : 44 = \frac{107{,}05}{374 \,.\, 408} : \frac{0{,}5575 \,.\, 20{,}3}{54 \,.\, 696} = 100 : 42{,}92$.

Die Gleichheit dieser zwei Verhältnisse zeigt, dass die Rechnung S. 326 mit der Erfahrung übereinstimmt, und dass sich demnach aus der Biegung eines Stabes seine Ausdehnung, und umgekehrt bestimmen lasse. Diess gewährt den Vortheil, dass man vor-

züglich bei sehr starken und langen schmiedeeisernen Stäben, deren Ausdehnung zu messen sehr unbequem, schwierig und ungenau wäre, weit leichter die viel grössere Biegung messen, und hiernach die Ausdehnung berechnen kann. Dasselbe findet auch bei allen hölzernen Balken statt, deren Ausdehnung zu messen äusserst beschwerlich wäre.

Da übrigens die Proportion $U : \alpha' = \frac{l^2}{4} : h^2$ sich nur auf den Fall der vollkommenen Elasticität gründet, folglich nur statt findet, so lange die Biegungen sehr klein sind, so kann auch die richtige Berechnung der Längenausdehnung durch die Biegung nicht über das Maass der vollkommenen Elasticität erstreckt werden; es können daher grössere Ausdehnungen, bei welchen eine bleibende Verlängerung eintritt, nach dieser Proportion nicht berechnet werden.

§. 332.

Wir haben §. 302 aus der für den Bruch aufgestellten Gleichung $Q = m \cdot \frac{B . H^2}{L}$ das beste Verhältniss der Höhe zur Breite eines Balkens bestimmt, welcher aus einem runden Stamme gezimmert werden kann. Da es aber vortheilhafter ist, bei diesem Gegenstande zugleich auch die Biegung zu berücksichtigen, so wollen wir noch dasselbe Verhältniss aus der Gleichung $G = \mu . \frac{B . H^3}{L^2}$ ableiten. Die höhere Analysis lehrt uns *), dass das Produkt $B . H^3$ bei einem gegebenen Halbmesser r des runden Stammes in dem Falle am grössten wird, wenn die Breite $GD = B = r$ und die Höhe $AF = H = \frac{7}{4} r$, also $B : H = 4 : 7$ sich verhält. Demnach muss der Durchmesser des Stammes K L in 4 gleiche Theile getheilt, in G und D die Perpendikeln F A und E B errichtet und A mit B, dann F mit E verbunden werden. Die hiedurch erhaltene Figur A B E F gibt dem Balken das grösste Tragungsvermögen mit Rücksicht auf seine Biegung. Fig. 5. Tab. 16.

Man findet in dieser Hinsicht in England bei den meisten wichtigern Bauten dieses Verhältniss bereits angewendet.

*) Es sey Fig. 5 der Durchschnitt eines runden Stammes, woraus der Balken A B E F gezimmert wird, dessen Höhe $AF = H = 2y$ und Breite $GD = B = 2x$ ist. Da das Produkt $B . H^3 = 2x . 8y^3$ ein Maximum werden muss, so muss das Differenziale $y^3 . dx + 3x . y^2 . dy$ oder $y . dx + 3x . dy = 0$ werden; demnach ist $\frac{dx}{dy} = - \frac{3x}{y}$. Fig. 5.

Die Gleichung für den Kreis gibt $y^2 + x^2 = r^2$, demnach $y . dy + x . dx = 0$, oder $\frac{dx}{dy} = - \frac{y}{x}$.

Es ist daher auch $- \frac{3x}{y} = - \frac{y}{x}$ oder $y^2 = 3x^2$, demnach $y : x = H : B = \sqrt{3} : 1 = 7 : 4$ beinahe. Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung $y^2 + x^2 = r^2$, so ist $3x^2 + x^2 = r^2$ und $x = \frac{r}{2}$, welches den weitern Werth $y = \frac{7}{4} . \frac{r}{2} = \frac{7}{8} r$ gibt.

§. 333.

Da in der Ausübung sehr viele Fälle vorkommen, dass Balken durch ihre ganze Länge gleichförmig belastet werden, und da auch das eigene Gewicht der Balken als eine gleichförmig vertheilte Last angesehen werden muss, so ist es noch wichtig, die Biegung kennen zu lernen, welche durch eine gleichförmig vertheilte Last in der Mitte der Balken bewirkt wird. *) Die höhere Analysis lehrt, dass ein auf

Fig. 6. Tab. 16. *) Es sey P die ganze Last, welche auf dem Balken A B C gleichförmig vertheilt ist, A N M D C sey die krumme Linie, welche der Balken A B C unter dem Drucke der Last P angenommen hat, die Coordinaten des Punktes M seyen R M = u, R D = y, dann M O = d y und O N = d u, endlich $AB = E = \frac{l}{2}$; demnach ist die Last, welche auf A M ruht $= \frac{AJ \,.\, P}{AC} = P\left(\frac{E - y}{2E}\right)$ und die Last, welche auf M D C ruht $= \frac{JC \,.\, P}{AC} = \left(\frac{E + y}{2E}\right) P$.

Von der Last $\frac{AJ \,.\, P}{AC}$ drückt nach §. 300 die Hälfte auf A und die andere Hälfte auf M, und eben so drückt von der Last $\frac{JC \,.\, P}{AC}$ die eine Hälfte auf C und die andere auf M. Wir haben also den gesammten senkrechten Druck auf $M = \left(\frac{AJ + JC}{2}\right)\frac{P}{AC} = \frac{P}{2}$. Diese Last muss nun von der Elasticität des Querschnittes in M aufgewogen werden. Wir haben bereits S. 325 gezeigt, dass die Elasticität der Biegung des Balkens in dem Punkte M mit dem statischen Momente $\frac{Q \,.\, L}{B \,.\, H \,.\, \alpha'} \cdot \frac{b \,.\, h^3}{12 r}$ entgegenwirkt; wir müssen daher itzt auch das Moment von der Last $\frac{P}{2}$, welches die Biegung in M hervorbringt, bestimmen.

Bei der Lehre vom Hebel wurde gezeigt, dass von der Last $\frac{P}{2}$, welche in J auf dem Hebel A C liegt, der Theil $\frac{P \,.\, JC}{2AC}$ auf A und $\frac{P \,.\, AJ}{2AC}$ auf C drückt. Da nun der Punkt A von dieser Last $\frac{P \,.\, JC}{2AC}$ herabgedrückt wird, so müssen wir annehmen, dass er eben so stark entgegendrückt, es wird also das Moment dieser senkrecht aufwärts wirkenden Kraft um den Punkt M erhalten, wenn wir $\frac{P \,.\, JC}{2AC}$ mit dem Hebelsarme A J multipliciren, welches $\frac{P \,.\, JC \,.\, AJ}{2AC}$ gibt. Eben so wirkt die zweite Last bei C mit dem Hebelsarme J C, es ist demnach ihr Moment ebenfalls $= \frac{P \,.\, AJ \,.\, JC}{2AC} = \frac{Q \,.\, L}{B \,.\, H \,.\, \alpha'} \cdot \frac{b \,.\, h^3}{12 r}$. Diese Momente sind daher nicht nur unter einander, sondern auch dem Elasticitätsmomente gleich, welches übrigens für jeden Punkt der krummen Linie statt findet.

Da nun $AJ = E - y$ und $CJ = E + y$, so ist $AJ \,.\, JC = E^2 - y^2$, demnach $P\left(\frac{E^2 - y^2}{4E}\right) = \frac{Q \,.\, L}{B \,.\, H \,.\, \alpha'} \cdot \frac{b \,.\, h^3}{12 r}$, welches die allgemeine Gleichung für die krumme Linie A N M D C des gleichförmig beschwerten Balkens ist.

Setzen wir nun den Winkel $NMO = w$, so ist $\text{Sin}\, NMO = \frac{du}{ds}$; $\text{Cos}\, NMO = \frac{dy}{ds}$ und der Krümmungshalbmesser $r = \frac{ds}{dw} = \frac{ds \,.\, \text{Cos}\, w}{dw \,.\, \text{Cos}\, w} = \frac{dy}{d\, \text{Sin}\, w}$. Wird nun dieser Werth in die obige Gleichung substituirt, so ist $P\left(\frac{E^2 - y^2}{4E}\right) dy = \frac{Q \,.\, L}{B \,.\, H \,.\, \alpha'} \cdot \frac{b \,.\, h^3 \,.\, d\, \text{Sin}\, w}{12}$ und integrirt

seiner ganzen Länge gleichförmig beschwerter Balken sich in der Mitte eben so viel biegt, als wenn bloss fünf Achtel derselben Last auf die Mitte gelegt werden.

$\frac{P}{4E}\left(E^2 . y - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . \sin w}{12}$, wo keine beständige Grösse beizusetzen ist, weil y und w zugleich verschwinden. Fig. 6. Tab. 16.

Nun ist $\sin w = \frac{d u}{d s}$; weil aber die Biegung sehr klein, folglich $s = y$ angenommen wird, so ist auch $d s = d y$ und $\sin w = \frac{d u}{d y}$. Wird dieser Werth in vorstehende Gleichung gesetzt, so ist $\frac{P}{4E}\left(E^2 . y - \frac{y^3}{3}\right) d y = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . d u}{12}$ und integrirt

$\frac{P}{4E}\left(\frac{E^2 . y^2}{2} - \frac{y^4}{3 . 4}\right) = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . u}{12}$, wo abermals keine beständige Grösse beizusetzen ist, weil u und y auch mit einander verschwinden. Da in dieser Gleichung die erste Potenz von u durch die vierte Potenz von y ausgedrückt ist, so folgt, dass zwischen u und y eine **parabolische Gleichung des vierten Grades** statt findet.

Setzen wir in der vorigen Gleichung $y = A B = E$ und die Biegung des Balkens in der Mitte $u = B D = U$, so haben wir $\frac{P}{4E}\left(\frac{E^4}{2} - \frac{E^4}{12}\right) = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . U}{12}$ oder

$\frac{5 P . E^3}{4} = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . b . h^3 . U$, und da $E = \frac{l}{2}$ ist, so folgt

$\frac{5 P . l^3}{32} = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . b . h^3 . U$ (I).

Nehmen wir im Gegentheile an, dass derselbe Balken bloss in seiner Mitte B mit der Last G beschwert wird, so drückt auf ein jedes Ende A und C die Last $\frac{G}{2}$; wir haben also

$\frac{G . A J}{2} = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3}{12 r}$. Nun ist $A J = E - y$ und $r = \frac{d y}{d \sin w}$, folglich

$\frac{G}{2}\left(E - y\right) d y = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . d \sin w}{12}$ und integrirt

$\frac{G}{2}\left(E . y - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . \sin w}{12}$. Setzen wir wieder $\sin w = \frac{d u'}{d y}$ und integriren, so ist $\frac{G}{2}\left(\frac{E . y^2}{2} - \frac{y^3}{2 . 3}\right) = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . u'}{12}$. Da hier u' in der ersten und y in der dritten Potenz vorkommt, so wird die krumme Linie des Balkens durch eine **parabolische Gleichung des dritten Grades** ausgedrückt.

Wird $y = E = \frac{l}{2}$ und $u' = U'$ gesetzt, so ist $\frac{G . l^3}{4} = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . b . h^3 . U'$ (II).

Werden die Gleichungen I und II durch einander dividirt, so ist $\frac{5 P}{8 G} = \frac{U}{U'}$. Sollen nun die Biegungen der Balken in der Mitte einander gleich, oder $U = U'$ seyn, so muss $G = \frac{5}{8} P$ seyn; wäre aber $G = P$, so ist $U = \frac{5}{8} U'$, d. h. **wenn ein Balken mit der Last P gleichförmig auf seiner ganzen Länge beschwert wird, so ist seine Biegung in der Mitte eben so gross, als wenn nur fünf Achtel derselben Last P auf die Mitte gelegt werden.**

Bei dem Bruche der Balken wurde §. 291 erwiesen, dass in der Mitte eines gleichförmig mit P beschwerten Balkens eigentlich nur die Belastung $\frac{P}{2}$ vorhanden sey, dem gemäss auch die Dimensionen berechnet wurden, mit welchen der Balken dieser Last gegen den Bruch widerstehen kann. Nach dem vorangeführten Lehrsatze sehen wir aber, dass mit Rücksicht auf die Biegung die Senkung in der Mitte bei einem gleichförmig mit P belasteten Balken um ein Achtel grösser ist, als diejenige Senkung, welche durch $\frac{P}{2}$ bewirkt wurde. Nimmt man daher zugleich auf diese Biegung Rücksicht, so muss in den Formeln, wo das Tragungsvermögen der Balken nach Verhältniss einer bestimmten Biegung in Anschlag genommen wird, bei einer gleichförmigen Belastung fünf Achtel hievon in der Mitte als wirkend angenommen werden, wenn man nicht über den Unterschied von $\frac{5}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$ hinausgehen will. Diess Letztere kann übrigens um so mehr geschehen, weil wir nur die geringe Biegung von $U = \frac{L}{288}$ bei Hölzern, und $U = \frac{L}{480}$ bei Metallen angenommen haben, demnach der Unterschied von $\frac{U}{8}$ ganz unbedeutend wird.

Beispiel. Wir haben S. 359 im 2ten Beispiele berechnet, dass die Stärke zweier neben einander liegender gusseiserner Barren, die eine Mauer von 24 Fuss Höhe, 18 Zoll Stärke und 10 Fuss Länge zu tragen haben, bei der bestimmten Biegung von $\frac{1}{30}$ Zoll auf den Fuss Länge, $H = B = 5{,}81$ Zoll betragen müsse.

Berechnen wir dasselbe Beispiel für die Annahme, dass fünf Achtel der gleichförmig vertheilten Last in der Mitte wirken, so ist $\frac{20000 \,.\, 5}{8} = \frac{94741 \,.\, 480 \,.\, H^4}{360 \,.\, 120^2}$, woraus $H = 6{,}14$ folgt. Der Unterschied beträgt hier offenbar sehr wenig.

C. Rückwirkende Festigkeit der Körper.

§. 334.

Wenn eine Kraft auf einen Körper in der Art einwirkt, dass sie denselben zusammendrückt oder seine Theile aneinander schiebt, dass sonach eine Verkürzung der Länge des Körpers entsteht, so wird die rückwirkende Festigkeit desselben in Anspruch genommen. Hiebei findet dieselbe allgemeine Proportion statt, welche wir §. 238 über die Ausdehnung vollkommen elastischer Körper aufgestellt haben, d. h. es verhält sich $q : Q = \frac{f.\alpha}{l} : \frac{F.\alpha'}{L}$. Die rückwirkende Festigkeit zweier gleichartiger und vollkommen elastischer Körper, d. h. die Anzahl Pfunde, welche dieselben ohne bleibende Aenderung zu ertragen im Stande sind, verhält sich nämlich zuerst wie die Querschnittsflächen f : F, indem bei einer grössern Fläche die Anzahl der Theile, welche zurückwirken, eben so vergrössert wird, wie es bei der absoluten Festigkeit der Fall ist. Da ferner der Eindruck bei einem Körper um so tiefer erfolgen muss, je grösser die Länge (oder das in der Richtung des Druckes liegende Maass) des Körpers ist, so muss sich auch die rückwirkende Festigkeit zweier Körper verkehrt wie ihre Längen verhalten; endlich ist die rückwirkende Kraft der Tiefe des Eindruckes (α, α') proportional, denn je tiefer dieser Eindruck ist, um so grösser muss auch das Gewicht seyn, wodurch derselbe bewirkt wurde.

Eine Anwendung der aufgestellten Proportion findet vorzüglich bei Sprengwerken von Holz oder Bogenbrücken von Gusseisen statt, wenn das Einsinken und Schwingen der Bögen, welches durch Belastungen derselben entsteht, bestimmt werden soll. Es sey z. B. bei einer gusseisernen, aus einem Bogen ausgeführten Brücke, eben so wie bei der *Menai*-Kettenbrücke (§. 272) die grösste Belastung Q = 32000 Zentner und die Länge des Bogens L = 90.72 Zoll.

Das Gusseisen, aus welchem der Bogen ausgeführt wird, sey von gleicher Beschaffenheit, wie jenes, Versuch Nro. 1, S. 349. Bei diesem Stabe betrug bei Annahme einer vollkommenen Elasticität die Biegung in der Mitte $u = \frac{17{,}5}{30}$ Linien für eine Belastung q = 100 ℔. Nach der Proportion S. 326 ergibt sich für dieselbe Belastung die Ausdehnung bei diesem Stabe, $\frac{17{,}5}{30} : \alpha = 17^2 : \left(\frac{11{,}7}{12}\right)^2$, woraus $\alpha = 0{,}001919$ Linien; also $\frac{\alpha}{l}$ in Zollen $= \frac{0{,}001919}{34.12}$; der Querschnitt f des versuchten Stabes betrug $\frac{11{,}7 \,.\, 21{,}65}{144}$ Quadrat-Zoll.

Werden diese Werthe in die oben für die rückwirkende Festigkeit vollkommen elastischer Körper aufgestellte Proportion substituirt, so ist

$100 : 3200000 = \frac{11{,}7 \,.\, 21{,}65}{144} \cdot \frac{0{,}001919}{34.12} : \frac{F.\alpha'}{90.72}$, hieraus erhält man $F.\alpha' = 1716$. Nimmt man nun, wie bei der *Menai*-Kettenbrücke F = 320 Quad. Zoll an, so ist $\alpha' = 5{,}4$ Zoll, d. h. der gusseiserne Bogen wird sich um 5,4 Zoll zusammendrücken, während die Ketten sich um 6 Zoll ausdehnen; demnach wird auch das Einsinken beider Brücken

in der Mitte beinahe gleichviel betragen. Wenn also gusseiserne Brückenbögen nicht so viel schwingen, so ist diess nur ihrer grössern Masse zuzuschreiben.

§. 335.

Wir haben bei der absoluten Festigkeit gesehen, dass die Kraft, welche einen Körper zerreisst $p = A . e - B . e^2$ sey. Wird in dieser Gleichung, wie es bei dem Zusammendrücken der Körper der Fall ist, e negativ gesetzt, so ist auch p negativ oder wirkt in entgegengesetzter Richtung, und wir haben (da e^2 sein Zeichen behält) $- p = - A . e - B . e^2$ oder die rückwirkende Kraft $p = A . e + B . e^2$. Wenn wir in dieser Gleichung $\frac{\alpha}{l}$ an die Stelle von e setzen, so ist $p = A \cdot \frac{\alpha}{l} + B \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2$, oder $q : Q = f . \left\{\frac{A . \alpha}{l} + B \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right\} : F \left\{\frac{A . \alpha'}{L} + B \left(\frac{\alpha'}{L}\right)^2\right\}$. Sind die Körper vollkommen elastisch oder ist $\frac{\alpha}{l}$ sehr klein, so bleibt die erste Proportion $q : Q = \frac{f . \alpha}{l} : \frac{F . \alpha'}{L}$. Sind aber die Körper unvollkommen elastisch, so dass $B \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2$ gegen $A \cdot \frac{\alpha}{l}$ nicht vernachlässigt werden kann, so muss auf dieselbe Art, wie es bei der Ausdehnung der Fall war, auch hier die Berechnung gemacht werden.

Hieraus ergibt sich nunmehr, dass man in dieser Hinsicht aus denselben Gleichungen, welche wir über die absolute Festigkeit des Holzes, Eisens etc. aufstellten, auch die rückwirkende Festigkeit ableiten könne. Die letztere ist in jedem Falle grösser, als die absolute Festigkeit, indem die Grösse $B . \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 = B . e^2$ hier positiv erscheint, wogegen sie bei der absoluten Festigkeit abgezogen wurde. Weil ferner die zwei Grössen $A . e$ und $B . e^2$ einander nicht entgegen gehen, so kann die rückwirkende Kraft in keinem Falle zu Null werden, wie es bei der absoluten Festigkeit der Fall war. Auch zeigt die Erfahrung, dass die Tiefe der Eindrücke bei gleichen Gewichtszunahmen immer kleiner, dagegen aber bei der absoluten Festigkeit die Ausdehnung immer grösser wird.

Uibrigens ist zu bemerken, dass bei sehr tiefen Eindrücken oder bei sehr grossen Lasten dieselben Irregularitäten statt finden, welche bei der Ausdehnung in der Nähe des Zerreissens beobachtet wurden. Bei der Ausdehnung war die ungleiche Cohaesion der Theile die Ursache, dass einige früher zerrissen wurden, als andere; bei der rückwirkenden Festigkeit aber tritt ein anderer Umstand ein, es werden nämlich die obern Theile zwischen die untern gleichsam keilartig hineingeschoben, wobei nebst der eigenen Gestalt der Elemente der Körper noch die Festigkeit des Zusammenhanges in der Quere in Anspruch genommen wird. In dieser Hinsicht werden die Hölzer leichter zerdrückt als die Metalle, weil bei Hölzern der Zusammenhang der Jahresringe geringer ist, als jener nach der Länge der Fasern.

§. 336.

Uiber das Zerdrücken der Körper hat *Rennie* in England folgende Versuche gemacht:

Fortlaufendes Nro.	Beschreibung des versuchten Körpers.	Specifische Schwere	Querschnittsfläche Länge	Querschnittsfläche Breite	Höhe	Gewicht, wovon der Körper zerdrückt wurde.
			engl. Z.	engl. Z.	engl. Z.	Englische Pfunde.
1	Gusseisen, Würfel von einem grossen Klumpen . . .	—	¼	¼	¼	Mittel aus 4 Versuchen 9774 ℔.
2	Gusseisen, horizontal gegossene Würfel	7,113	¼	¼	¼	Mittel aus 4 Versuchen 10114 ℔.
3	Gusseisen, vertikal gegossene Würfel	7,074	¼	¼	¼	Mittel aus 4 Versuchen 11111 ℔.
4	Gegossenes Kupfer . . .	—	¼	¼	¼	7318 ℔.
5	Messing, schön gelbes . .	—	¼	¼	¼	10304 ℔.
6	Gehämmertes Kupfer . .	—	¼	¼	¼	6440 ℔.
7	Gegossenes Zinn . . .	—	¼	¼	¼	966 ℔.
8	Gegossenes Blei . . .	—	¼	¼	¼	483 ℔.
9	Ulmenholz	—	1	1	1	1284 ℔.
10	Amerikanisches Fichtenholz .	—	1	1	1	1606 ℔.
11	Weisstannenholz . . .	—	1	1	1	1928 ℔.
12	Englische Eiche . . .	—	1	1	1	3860 ℔.
13	Kreide	—	1,5	1,5	1,5	1127 ℔.
14	Blassrother Ziegelstein . .	2,085	1,5	1,5	1,5	1265 ℔.
15	Rother Backstein . . .	2,168	1,5	1,5	1,5	1817 ℔.
16	Gebrannter Ziegel, Mittel aus 2 Versuchen	—	1,5	1,5	1,5	3243 ℔.
17	Ziegel von *Stourbridge* . .	—	1,5	1,5	1,5	3864 ℔.
18	Rother zerreiblicher Sandstein .	2,316	1,5	1,5	1,5	7070 ℔.
19	Derselbe aus einem andern Steinbruche	2,428	1,5	1,5	1,5	9776 ℔.
20	Stein von der Insel *Portland* .	2,428	1,5	1,5	1,5	10284 ℔.
21	Pflasterstein von *Yorkshire* .	2,507	1,5	1,5	1,5	12856 ℔.
22	Sandstein (*Breccia*) von *Dundee*	2,530	1,5	1,5	1,5	14918 ℔.
23	Compakter Kalkstein . . .	2,584	1,5	1,5	1,5	17354 ℔.
24	Feinkörniger Granit von *Peterhead*	—	1,5	1,5	1,5	18636 ℔.
25	Schwarzer fester Kalkstein von *Limerick*	2,598	1,5	1,5	1,5	19924 ℔.
26	Schwarzer Brabanter Marmor .	2,697	1,5	1,5	1,5	20742 ℔.
27	Weisser italienischer geaderter Marmor	2,726	1,5	1,5	1,5	21783 ℔.
28	*Aberdeen*'scher Granit von der blauen Art	2,625	1,5	1,5	1,5	24556 ℔.

Da die in vorstehenden Versuchen angehängten Gewichte diejenigen sind, von welchen das Zerdrücken der Körper wirklich erfolgte, so versteht es sich von selbst, dass die Körper eben so, wie wir bereits bei dem Bruche bemerkten, nicht mit so grossen Lasten, sondern nur mit dem 5^{ten} oder 6^{ten} Theile derselben beschwert werden dürfen. Eine Berechnung hierüber kann nur auf der Grundlage genauer Versuche auf dieselbe Art geführt werden, wie wir es bei der Ausdehnung und Biegung der Körper gezeigt haben.

§. 337.

Wenn schwere Lasten von längern Säulen unterstützt werden, so dürfen nicht nur die Theile der letztern nicht zerdrückt, sondern auch die Säulen nicht gebogen werden. Weil aber in allen bekannten Körpern keine vollkommene Gleichförmigkeit der Theile vorhanden ist, so ist es unmöglich zu verhüthen, dass nicht in den horizontalen Querschnitten die Theile auf einer Seite um etwas mehr nachgeben, als auf der andern; es ist demnach begreiflich, dass durch diese grössere Nachgiebigkeit die Theile auf der einen Seite mehr eingedrückt werden als auf den andern, sonach eine Biegung erfolgen könne. Um diess zu verhüthen, ist es von Wichtigkeit, das Gesetz zu kennen, nach welchem die Last bestimmt wird, die ein elastisches Prisma ohne Biegung tragen kann.

Werden zwei gleichartige und vollkommen elastische Parallelopipede mit einander verglichen, und ihre Querschnittsflächen mit b . h und B . H, die Längen mit l, L und die Abmessungen, welche der Biegung unterliegen mit b, B bezeichnet, so verhalten sich nach der Lehre der höhern Analysis *) die Gewichte p, P, welche diese

Fig. 7. Tab. 16. *) Es sey A B C die Mittellinie einer aufrechtstehenden vollkommen elastischen Säule, welche durch das auf A′ A″ gelegte Gewicht genöthiget worden, die krumme Linie A M N B C anzunehmen.

Wir haben bereits oben (in der Anmerkung zu §. 313) gefunden, dass zur Biegung des Elementes M′N′M″N″, dessen Krümmungshalbmesser M R = r ist, das statische Moment $\frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{3.4r}$ erforderlich sey.

Da hier die aufgelegte Last p nach der senkrechten Richtung A E C herabdrückt, so ist das statische Moment, welches die Biegung dieses Elementes bewirkt = p . M K.

Wir wollen nun die Coordinaten der elastischen Linie für den Punkt M, nämlich M K = y, A K = z, den Winkel, den die elastische Linie A M mit der senkrechten A K bei A bildet, nämlich M A K = v und den Winkel N M O = w setzen, so geben die obengenannten statischen Momente die Gleichung $\frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{12r} = p.y$ und wenn wir die Grösse $\frac{Q.L}{B.H.\alpha'} \cdot \frac{b.h^3}{12p} = a^2$ setzen, so ergibt sich für alle Punkte der elastischen Linie A, M, N, B, C die allgemeine Gleichung $a^2 = r.y$.

Die Länge des Krümmungshalbmessers r folgt aus der S. 325 angeführten Proportion $\mu\varrho : R\mu = MN : MR$ oder $dw : 1 = ds : r$ folglich $r = \frac{ds}{dw}$ und wenn Zähler und Nenner mit Sin w multiplicirt wird, so ist $r = \frac{ds . \text{Sin}\,w}{dw . \text{Sin}\,w} = \frac{dy}{d\,\text{Cos}\,w}$. Wird nun dieser Werth statt r in die Gleichung $a^2 = r.y$ gesetzt, so erhalten wir $a^2 . d\,\text{Cos}\,w = y . dy$.

Wird diese Gleichung integrirt, so ist $a^2 . \text{Cos}\,w + \text{Const.} = \frac{y^2}{2}$. Weil aber oben im Punkte A die Linie $y = 0$ und der Winkel $w = v$ seyn muss, so ist $\text{Const.} = -a^2 . \text{Cos}\,v$, demnach

Parallelopipede, ohne sich zu biegen, erhalten können, wie die Querschnittsflächen, multiplicirt mit den Quadraten der schwächern Seite und dividirt mit den Quadraten der Länge, oder

$$p : P = b.h\left(\frac{h}{l}\right)^2 : B.H\left(\frac{H}{L}\right)^2.$$

$a^2\left(\text{Cos } w - \text{Cos } v\right) = \frac{y^2}{2}$. Die Ordinate y ist offenbar am grössten in B, wo $\text{Sin } w = 0$ und $\text{Cos } w = 1$ ist. Setzen wir demnach die grösste Abweichung der elastischen Linie von der senkrechten oder $BE = e$, so erhalten wir für den Punkt B die Gleichung $a^2\left(1 - \text{Cos } v\right) = \frac{e^2}{2}$; folglich, wenn die vorige Gleichung $a^2\left(\text{Cos } w - \text{Cos } v\right) = \frac{y^2}{2}$ mit $a^2\left(1 - \text{Cos } v\right) = \frac{e^2}{2}$ dividirt wird, ergibt sich Fig. 7. Tab. 16.

$\frac{\text{Cos } w - \text{Cos } v}{1 - \text{Cos } v} = \frac{y^2}{e^2}$. Hieraus folgt $\text{Cos } w = \text{Cos } v + \frac{y^2}{e^2}\left(1 - \text{Cos } v\right)$.

Um hieraus noch eine Gleichung zwischen den Coordinaten z und y abzuleiten, ist zu bemerken, dass in dem Dreiecke NMO sich verhalte $MO : ON = dz : dy = \text{Cos } w : \text{Sin } w$; hieraus folgt $\frac{dz}{dy} = \frac{\text{Cos } w}{\text{Sin } w}$, sonach $\frac{dz^2}{dy^2} = \frac{\text{Cos}^2 w}{\text{Sin}^2 w} = \frac{\text{Cos}^2 w}{1 - \text{Cos}^2 w} = \frac{\text{Cos}^2 w}{(1 - \text{Cos } w)(1 + \text{Cos } w)}$.

Setzen wir nun im Nenner statt Cos w den oben gefundenen Werth $\text{Cos } v + \frac{y^2}{e^2}\left(1 - \text{Cos } v\right)$, so erhalten wir

$$\frac{dz^2}{dy^2} = \frac{\text{Cos}^2 w}{\left\{1 - \text{Cos } v - \frac{y^2}{e^2}\left(1 - \text{Cos } v\right)\right\}\left\{1 + \text{Cos } v + \frac{y^2}{e^2}\left(1 - \text{Cos } v\right)\right\}}$$

$$= \frac{\text{Cos}^2 w}{\left(1 - \text{Cos } v\right)\left(1 + \text{Cos } v\right)\left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right)\left\{1 + \frac{y^2}{e^2}\left(\frac{1 - \text{Cos } v}{1 + \text{Cos } v}\right)\right\}}; \text{ demnach ist}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\text{Cos } w}{\text{Sin } v . \sqrt{\left\{1 - \frac{y^2}{e^2}\right\}\left\{1 + \frac{y^2}{e^2}\left(\frac{1 - \text{Cos } v}{1 + \text{Cos } v}\right)\right\}}}, \text{ folglich}$$

$$dz = \frac{\text{Cos } v . dy \left\{1 + \frac{y^2}{e^2}\left(\frac{1 - \text{Cos } v}{\text{Cos } v}\right)\right\}}{\text{Sin } v . \sqrt{\left\{1 - \frac{y^2}{e^2}\right\}\left\{1 + \frac{y^2}{e^2}\left(\frac{1 - \text{Cos } v}{1 + \text{Cos } v}\right)\right\}}}.$$

In dieser Gleichung können wir die Glieder, in welchen $\frac{y^2}{e^2}$ mit $1 - \text{Cos } v$ multiplicirt ist, aus dem Grunde weglassen, weil hier eine Gleichung für die möglichst gerade Säule gesucht wird, folglich nicht nur y sehr klein seyn, sondern auch der Winkel $MAK = v = 0$, folglich $\text{Cos } v = 1$ gesetzt werden muss, hiernach ergibt sich $dz = \frac{\text{Cos } v . dy}{\text{Sin } v . \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right)}}$.

Setzen wir nun $\frac{y}{e} = \text{Sin } \lambda$, so ist $dy = e . d\lambda . \text{Cos } \lambda$ und $\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{e^2}\right)} = \text{Cos } \lambda$, demnach $dz = \frac{e . \text{Cos } v . d\lambda . \text{Cos } \lambda}{\text{Sin } v . \text{Cos } \lambda}$. Das Integral dieser Gleichung ist offenbar $z = \frac{e . \lambda . \text{Cos } v}{\text{Sin } v}$. Oben war $a^2\left(1 - \text{Cos } v\right) = \frac{e^2}{2}$, demnach ist $e^2 = 4 a^2 . \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2} v$, folglich $e = 2 a . \text{Sin } \tfrac{1}{2} v$, und da $\frac{\text{Sin } v}{\text{Cos } v} = \frac{2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} v . \text{Cos } \tfrac{1}{2} v}{\text{Cos } v}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe

Diess Verhältniss findet auch bei runden Säulen statt. Nimmt man nun Erfahrungen von solchen Säulen an, die durch viele Jahre bedeutende Lasten ohne Aenderung getragen haben, so kann man aus dieser Proportion auch für jede andere Säule, deren Maasse gegeben sind, das Gewicht finden, welches man derselben auflegen kann.

Fig. 7. Tab. 16. $z = \frac{a \cdot \text{Cos}\, v \cdot \lambda}{\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, v}$; folglich, weil für die gerade Säule $v = 0$ gesetzt werden muss, so ist $z = a \cdot \lambda = a \cdot \text{Arc}\cdot\text{Sin}\, \frac{y}{e}$. Setzen wir nun die Höhe oder die Länge der ganzen Säule $AC = l$, so ist für den Punkt B die Grösse $z = AE = \frac{l}{2}$ und $y = BE = e$, demnach $\text{Sin}\, \lambda = \frac{y}{e} = 1$; folglich $\lambda = \frac{\pi}{2}$, und wenn in die Gleichung $z = a \cdot \lambda$ diese Werthe gesetzt werden, so ist $\frac{l}{2} = a \cdot \frac{\pi}{2}$ oder $l = a \cdot \pi$. Dieselbe Gleichung erhalten wir für den Punkt C, wo $y = 0$, $\lambda = \pi$ demnach, wegen $z = a \cdot \lambda$, auch $l = a \cdot \pi$ oder $a = \frac{l}{\pi}$ wird.

Oben haben wir die Grösse $\frac{Q \cdot L}{B \cdot H \cdot \alpha'} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12\, p} = a^2$ gesetzt, demnach ist $\frac{Q \cdot L}{B \cdot H \cdot \alpha'} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12\, p} = \frac{l^2}{\pi^2}$, folglich ist die Last, welche die Säule ohne Biegung tragen kann

$$p = \frac{Q \cdot L}{B \cdot H \cdot \alpha'} \cdot \frac{b \cdot h^3 \cdot \pi^2}{12\, l^2}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Last bestimmen, die eine Säule zu tragen vermag, wenn für einen Stab von derselben Materie die Querschnittsfläche $B \cdot H$ und das Verhältniss der Ausdehnung zur Länge $\frac{\alpha'}{L}$, welche durch das Gewicht Q bewirkt worden, gegeben ist.

Auch sehen wir, dass in jedem Falle die Last, welche eine Säule trägt, der Fläche $b \cdot h$ proportional ist, ingleichem, dass sie mit dem Verhältnisse $\left(\frac{h}{l}\right)^2$ wächst, folglich eine Säule um so weniger tragen kann, je kleiner das Verhältniss $\frac{h}{l}$ ist; endlich ist diese Last auch dem Verhältnisse $\frac{Q}{\alpha'}$ proportional. Wenn also Körper durch eine geringe Kraft stark ausgedehnt werden, so können sie nur sehr wenig tragen und sind zu Säulen nicht zu brauchen, wie diess z. B. bei elastischen Uhrfedern der Fall wäre.

Beispiel. Bei dem versuchten Stabe von Tannenholz Nro. 11, war $B = H = 1$ Zoll, $L = 37\frac{1}{6}$ Zoll und bei dem Gewichte von 100 ℔ betrug der Tabelle zu Folge die Biegung bei vollkommener Elasticität $\frac{89{,}5}{15}$ Linien. Demnach ergibt sich die Längenausdehnung α', welche durch ein gleiches Gewicht von 100 ℔ bewirkt wird, durch Substitution in die Proportion S. 326, $U : \alpha' = \frac{L^2}{4} : H^2$, oder $\frac{89{,}5}{15} : \alpha' = \left(\frac{446}{2}\right)^2 : 12^2$, woraus $\alpha' = \frac{89{,}5}{5180}$ Linien folgt.

Substituiren wir diese Werthe, so ist das Gewicht, welches eine prismatische Säule von gleichem Tannenholze mit der Querschnittsfläche $b \cdot h$, Breite h und Höhe l tragen kann

$$p = \frac{100 \cdot 37\frac{1}{6} \cdot 5180 \cdot 12}{1 \cdot 1 \cdot 89{,}5} \cdot b \cdot h \cdot \frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{(3{,}14159)^2}{12} = 2123046 \cdot b \cdot h \cdot \frac{h^2}{l^2},$$

wo b, h und l in Zollen substituirt werden müssen, um p in Pfunden zu erhalten.

Bezeichne $b \cdot h$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}$ die Querschnittsflächen, h, $\mathfrak{H}$ die Dimensionen, welche der Biegung unterliegen, und l, $\mathfrak{L}$ die Längen, dann p, $\mathfrak{P}$ die aufgelegten Gewichte, so folgt aus der gefundenen Gleichung für die Last, welche Säulen ohne Biegung tragen können, die Proportion $p : \mathfrak{P} = b \cdot h \left(\frac{h}{l}\right)^2 : \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{L}}\right)^2$. Da bei der Berechnung der Tragungsfähigkeit runder Säulen in der obigen Gleichung nur der Coefficient 12 im Nenner geändert wird, so findet diese Proportion auch bei runden Säulen statt.

§. 338.

Die meisten Mauern werden in der Absicht gebaut, bestimmte Lasten zu tragen; da sie nun den aufgelegten Lasten nur durch ihre rückwirkende Festigkeit widerstehen, so folgt, dass bei einem 2, 3, 4 n^{mal} grössern Drucke auch eine 2, 3, 4 . . . n^{mal} so grosse Grundfläche der Mauer erfordert wird, wenn die Last von jeder Mauer mit gleicher Sicherheit getragen werden soll. Wenn daher bei hohen Mauern oder bei einem Gebäude mit mehreren Stockwerken die Widerstandsfähigkeit der Mauern in allen Höhen gleich seyn soll, so können die Breiten oder Dicken dieser Mauern nach der ganzen Höhe nicht gleich genommen werden und es muss die obere Mauer, welche eine kleinere Last zu tragen hat, offenbar eine kleinere Dicke erhalten, als die untere, welche gewöhnlich nebst der obern Last sammt der Mauer noch eine besondere Last zu tragen hat.

Man hat bisher als praktische Regeln angenommen, dass die Stärke einer Hauptmauer von Quadern unmittelbar unter dem Dachstuhle, also im obersten Stockwerke, um jeder zufälligen oder beständigen Belastung (D) mit Sicherheit zu widerstehen, wenigstens 1 Fuss $=$ d dick seyn muss. Für eine Hauptmauer von Ziegeln ist die geringste Dicke in diesem Falle 1,5 Fuss $=$ d; ist aber eine Hauptmauer bloss von guten Bruchsteinen, so wird ihre Dicke auf gleiche Art wenigstens 2 Fuss $=$ d angenommen. Aus diesen Erfahrungen lässt sich nunmehr die zunehmende Stärke der Mauern in den einzelnen Stockwerken nach dem Grundsatze berechnen, dass alle diese übereinanderstehenden Mauern gegen das Zerdrücken gleich gesichert seyn sollen.

Es sey der Druck des Dachstuhles sammt Gesperren, Ziegeln und allen andern Belastungen, die auf der obersten Mauer ab ruhen $=$ D, die obere Dicke dieser Mauer Fig. 8. ab $=$ d, die Höhe eines Stockwerkes ac $=$ cf $=$ h, die Länge der ganzen Tab. 16. Mauer $=$ l und das Gewicht ihrer kubischen Einheit $=$ g, so ist das Gewicht der Mauer im obersten Stockwerke $= g.d.h.l$. Wir wollen nun annehmen, dass ein jedes Stockwerk nebst den darüber befindlichen Mauern und dem Drucke D noch eine besondere Belastung Q zu tragen habe, so wird der gesammte Druck auf die Mauer des nächst untern Stockwerkes $D + g.d.h.l + Q$ seyn. Für diesen Druck muss die Mauer die Dicke ce $= d'$ erhalten, während sie oben bei dem Drucke D bloss die Dicke ab $=$ d hat. Die Dicke d' bestimmt sich demnach aus der Proportion $D : d = D + g.d.h.l + Q : d'$, woraus

$$\frac{d'}{d} = \frac{D + g.d.h.l}{D} + \frac{Q}{D} \text{ folgt (I).}$$

Auf die Mauer fk drückt nebst der Last auf ce, welche $D + g.d.h.l + Q$ beträgt, noch das Gewicht der Mauer cefk und die besondere Belastung in fk, welche wir eben so, wie in ce, $=$ Q annehmen wollen. Wir haben daher zur Bestimmung der Dicke der Mauer im zweiten Geschosse von oben herab die Proportion:

$$D : d = D + g.d.h.l + Q + g.d'.h.l + Q : d'' \text{ oder substituirt}$$

$$D : d = D + g.d.h.l + Q + \frac{g.d.h.l}{D}\left(D + g.d.h.l\right) + \frac{g.d.h.l.Q}{D} + Q : d'',$$

demnach ist

$$\frac{d''}{d} = \frac{D + g.d.h.l}{D} + \frac{g.d.h.l}{D}\left(\frac{D + g.d.h.l}{D}\right) + \frac{1}{D}\left(Q + \frac{g.d.h.l.Q}{D}\right) + \frac{Q}{D},$$

oder $\frac{d''}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)\left(1+\frac{g.d.h.l}{D}\right)+\frac{Q}{D}\left(1+\frac{g.d.h.l}{D}\right)+\frac{Q}{D}$,

oder $\frac{d''}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^2+\frac{Q}{D}\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)+\frac{Q}{D}$ (II).

Auf gleiche Art findet man für die Stärke der Mauer m n den Ausdruck:

$$\frac{d'''}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^3+\frac{Q}{D}\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^2+\frac{Q}{D}\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)+\frac{Q}{D} \text{ (III).}$$

Hieraus ersieht man bereits das Gesetz, nach welchem die Dicken der Mauern von oben herab zunehmen; es wird nämlich die Dicke der Mauer im letzten oder n^{ten} Geschosse aus folgendem Ausdrucke bestimmt: $\frac{d^n}{d} =$

$$\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^n+\frac{Q}{D}\left\{1+\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^1+\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^2 \cdots +\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^{n-1}\right\}$$

und wenn diese Reihe summirt wird, erhalten wir:

$\frac{d^n}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^n+\frac{Q}{g.d.h.l}\left\{\left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^n-1\right\}$, demnach ist

$$\frac{d^n}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^n \cdot \left(1+\frac{Q}{g.d.h.l}\right)-\frac{Q}{g.d.h.l} \text{ (IV).}$$

Nimmt man den Fall an, dass das Gewicht g.d.h.l der Mauer viel grösser als die Belastung Q ist, so kann der Bruch $\frac{Q}{g.d.h.l}$ sowohl in der Addition zu 1, als in der Subtraktion weggelassen werden, und es bleibt der einfache Ausdruck

$\frac{d^n}{d} = \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^n$ übrig; es verhalten sich also die Dicken der Mauer in den einzelnen Stockwerken von oben herab,

$$d : d' : d'' : d''' : \ldots = 1 : \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^1 : \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^2 : \left(\frac{D+g.d.h.l}{D}\right)^3 : \ldots$$

hieraus ersieht man, **dass die Dicken der Mauer von oben herab in einer geometrischen Progression zunehmen müssen, wenn die Zahl der Stockwerke nach der arithmetischen Reihe 0, 1, 2, 3, 4 ... n wächst.**

Beispiel. Es ist für ein aus mehreren Stockwerken bestehendes Getreidemagazin die Stärke der Hauptmauern für die einzelnen Stockwerke zu bestimmen.

Nehmen wir die obere Dicke d = 2 Fuss, die Höhe eines Geschosses h = 9 Fuss, das Gewicht eines Kubikfusses Mauerwerk g = 125 ℔ an, so ist

$$\frac{d^n}{d} = \left(\frac{D+125.2.9.l}{D}\right)^n \cdot \left(1+\frac{Q}{125.2.9.l}\right)-\frac{Q}{125.2.9.l}.$$

Zur Bestimmung von Q wollen wir die Breite des Magazines mit 30 Fuss, und die Getreideschüttung mit 2,5 Fuss annehmen, so ist, da ein Kubikfuss Getreide 42 ℔ wiegt, das halbe Gewicht des Getreides $= \frac{30.2{,}5.42.l}{2} = 1575.l$ ℔. Schlagen wir das halbe Gewicht der Balken und des Bretterbodens auf 225 . l ℔ an, so gibt diess zusammen 1800 . l ℔ = Q. Den Druck des Daches, der Gesperre etc. nehmen wir auf den Fuss Länge mit 150 Zentner, demnach D = 15000 . l ℔ an, so gibt diess alles substituirt, die Glei-

chung $\frac{d^n}{d} = \left(\frac{15000.1 + 2250.1}{15000.1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1800.1}{2250.1}\right) - \frac{1800.1}{2250.1} = \left(1{,}15\right)^n \cdot 1{,}8 - 0{,}8.$

Für n = 0 ist die Stärke der Mauer	d = 24 Zoll	
— n = 1 — — — —	d' = 30,48 —	also die Zunahme = 6,48 Zoll
— n = 2 — — — —	d'' = 37,93 —	— — = 7,45 —
— n = 3 — — — —	d''' = 46,50 —	— — = 8,57 —
— n = 4 — — — —	d'''' = 56,36 —	— — = 9,86 —.

Aus dieser Rechnung ersieht man, dass die gewöhnliche Regel der Baumeister, in jedem Geschosse gleich viel zuzulegen, unrichtig ist. Diese Regel kann nur in dem Falle statt finden, wenn der Druck oben auf die Mauer ausserordentlich gross ist, wenn also D weit mehr als $g.d.h.l + Q$ beträgt; denn nach IV ist $\frac{d^n}{d} =$

$$\left\{1 + \frac{n.g.d.h.l}{D} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{g.d.h.l}{D}\right)^2 \ldots\ldots\right\}\left\{1 + \frac{Q}{g.d.h.l}\right\} - \frac{Q}{g.d.h.l}.$$

Ist in diesem Ausdrucke $\frac{g.d.h.l}{D}$ ein sehr kleiner Bruch, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so bleibt

$\frac{d^n}{d} = \left\{1 + \frac{n.g.d.h.l}{D}\right\}\left\{1 + \frac{Q}{g.d.h.l}\right\} - \frac{Q}{g.d.h.l}$, woraus

$d^n = d + n.d\left(\frac{g.d.h.l + Q}{D}\right)$ folgt, d. h. die Dicke der Mauer nimmt nunmehr gleichförmig mit den Geschossen zu.

Da jedoch die zweite Potenz in der obigen Reihe nie ganz vernachlässigt werden kann, so sieht man, dass es zweckmässig sey, die Zulagen der Mauern von oben herab in einem grössern Verhältnisse, als nach einer arithmetischen Reihe zu bestimmen.

D. Widerstand der Körper gegen Drehung.

§. 339.

Wenn die Bewegung eines grössern Rades, z. B. eines Wasserrades einem andern Rade mitgetheilt werden soll, so geschieht diess mittelst einer Welle oder eines Schaftes, welche gewöhnlich von Holz, in neuern Zeiten aber auch von Guss- oder Schmiedeeisen verfertigt werden. Sind diese Wellen nicht hinreichend stark, so drehen sie sich ab und brechen, sind sie aber zu stark, so verursachen sie unnütze Kosten und ihre Last ist der Bewegung der Maschine nachtheilig. Es fragt sich daher um die Regeln, nach welchen die Stärke solcher Wellen bemessen werden soll.

Fig. 9. Tab. 16. Es sey M N O S ein Cylinder, welcher an dem Ende M N festgehalten, an dem andern Ende O S aber mittelst eines an der Welle angebrachten Rades J T durch die Kraft P gedreht wird. Die höhere Analysis lehrt uns *) dass das Moment des Gewichtes an der Peripherie des

Fig. 9. *) Wir können uns offenbar den Cylinder aus sehr vielen geraden Fäden oder Fasern zusammengesetzt denken, die in ihrem natürlichen Zustande parallel zur Achse H C liegen. Wenn diese Fäden nicht starr, sondern nachgiebig sind, so wird der Punkt a durch die Kraft P nach b versetzt, während der andere Endpunkt E des Fadens a E fest bleibt; dadurch wird der Faden gestreckt, demnach die Länge des Fadens b E grösser als a E seyn. Setzen wir die Höhe a b, wie weit nämlich der Punkt a von seinem Orte verrückt wird $=$ a, die Länge des Cylinders a E $=$ l und C J $=$ B, so ist $bE = \sqrt{\left(l^2 + a^2\right)} = l + \frac{a^2}{2l}$ beinahe, wenn nämlich $\frac{a}{l}$ oder der Drehungswinkel sehr klein angenommen wird; demnach ist die Ausdehnung der Faser $bE - aE = bd = \frac{a^2}{2l} = \alpha$. Die Querschnittsfläche dieser Faser sey $=$ f, so haben wir nach der §. 238 aufgestellten Proportion $Q : q = \frac{F.\alpha'}{L} : \frac{f.\alpha}{l} = \frac{F.\alpha'}{L} : \frac{f.a^2}{2l^2}$; demnach ist die Spannkraft der Faser $q = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{f.a^2}{2l^2}$.

Die an der Oberfläche des Cylinders bei a, nach der Richtung a b der Peripherie wirkende Kraft sey $=$ K, so gibt die schiefe Richtung dieser Kraft zur Kraft q, welche den Faden nach der Richtung d b spannt, die Proportion $K : q = ab : bd = a : \frac{a}{2l}$; folglich ist

$$q = K \cdot \frac{a}{2l} = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{f.a^2}{2l^2}, \text{ demnach } K = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{f.a}{l}.$$

Diese Spannkraft ist auf der ganzen Oberfläche in allen Punkten der Peripherie O b a S des Cylinders dieselbe, und wir können hieraus eine allgemeine Gleichung für alle Fasern an der Oberfläche des Cylinders ableiten. Wenn wir aber von der Oberfläche gegen den Mittelpunkt gehen, so erleiden die innern Kreise eine kleinere Spannkraft; es ist nämlich $a'b' : ab = Ca' : Ca$, also $a'b' = \frac{ab.Ca'}{Ca} = \frac{a.r}{A}$; folglich ist die Ausdehnung des innern Fadens oder $b'd' = \frac{a^2.r^2}{2A^2.l}$ und die hiezu nöthige Spannkraft $K' = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{f.a.r}{l.A}$. Weil dieselbe Spannkraft allen Punkten des konzentrischen Kreises a′ b′ g′ a′ zukommt, so können wir statt f die Fläche des Kreises, oder das Produkt der Kreislinie $2\pi.r$ in die Höhe d r setzen; dadurch erhalten wir die Gleichung für die Spannkraft dieses Kreiselementes $dK' = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{2\pi.r.dr.a.r}{l.A}$. Weil aber die drehende Kraft P an der Peripherie des äussern Rades J T sich befindet, so sey d P derjenige Theil dieser Kraft, welcher mit d K′ im Gleichgewichte ist, oder $dP.B = r.dK'$, folglich ist auch $B.dP = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{2\pi.r^3.dr.a}{A.l}$. Das Integrale dieser Gleichung gibt $B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \frac{2\pi.r^4.a}{4A.l}$, wo keine beständige Grösse beizufügen ist, weil das Moment r . d K′ mit r verschwindet. Wenn

äussern Rades J T mit der dritten Potenz des Halbmessers A des Cylinders und mit dem bei der Drehung beschriebenen Bogen a im geraden, mit der Länge l des Cylinders aber im um-

wir nun für den ganzen Cylinder r = A setzen, so ergibt sich die Gleichung für die drehende Kraft P unn Spannkraft aller Fasern des Cylinders $B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \pi . A^2 . \frac{A}{2} . \frac{a}{l}$. Diese Gleichung enthält blos das Moment der Ausdehnung der Fasern des Cylinders. Weil aber die Ausdehnung auch eine Zusammendrückung der innern Theile der Welle veranlasst und so, wie wir bei der Biegung der Balken gesehen haben, sich auf ein gleiches Rückwirkungsmoment stützt, und auch von der am Rade der Welle angebrachten Kraft gewältigt werden muss, so ist in dieser Hinsicht $B.P = 2 \cdot \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \pi . A^2 . \frac{A}{2} . \frac{a}{l} = \frac{Q.L}{F.\alpha'} \cdot \pi . A^2 . A . \frac{a}{l}$. Vergleichen wir daher diesen Cylinder mit einem andern von derselben Materie, so fällt der gemeinschaftliche Faktor $\frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi$ weg, und es verhalten sich die Momente der drehenden Kräfte $B.P : B'.P'$, wie die Produkte aus den Würfeln der Halbmesser A der Cylinder in die Räume a, um welche das eine Ende des Cylinders mehr als das andere gedreht worden, und umgekehrt in die Längen dieser Cylinder. Fig. 9. Tab. 16.

Wenn das Drehungsmoment für einen hohlen Cylinder oder eine Röhre gesucht wird, so sey der Halbmesser des äussern Umfangs der Röhre = R, des innern Umfanges = r, so ist nach der vorigen Gleichung $B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi \frac{(R^4 - r^4)a}{A.l} = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)a}{A.l}$. In diesem Ausdrucke ist $\pi (R^2 - r^2)$ die Querschnittsfläche der Röhre. Wollten wir diese dem obigen $\pi . r^2$ gleich setzen, so wird $R^2 = 2r^2$, und wir erhalten für die Röhre, deren äusserer Halbmesser $R = r\sqrt{2}$ ist, das Moment $B.P' = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi . \frac{r^2 . 3r^2 . a}{A.l}$; da diess dreimal so gross ist, als das vorige Moment, so ergibt sich, dass eine hohle Röhre, die eben so viel Masse (kubischen Inhalt), wie ein solider Cylinder hat, einen dreimal so grossen Widerstand gegen Drehung leiste. Fig. 10. Tab. 16.

Bei dieser hohlen Röhre muss aber r = A seyn, d. h. der Halbmesser r im Lichten der hohlen Röhre muss eben so gross, als der äussere Halbmesser A des soliden Cylinders seyn.

Die obige Gleichung $B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi . A^2 . A . \frac{a}{l}$ lässt sich noch in folgende Proportion auflösen $Q : \frac{F.\alpha'}{L} = B.P : \pi . A^2 . A . \frac{a}{l} = \frac{B.P}{A} : \pi . A^2 . \frac{a}{l}$. Hierin ist $\frac{B.P}{A}$ die drehende Kraft auf den Halbmesser des Cylinders reduzirt; es verhält sich also die Kraft Q zu dem Produkte der zugehörigen Querschnittsfläche in das Verhältniss der Ausdehnung zur ausgedehnten Länge, wie die reduzirte Kraft $\frac{B.P}{A}$ zur Querschnittsfläche des Cylinders $\pi . A^2$, multiplizirt mit dem Verhältnisse der Ausdehnung a zur zugehörigen Länge l. Diese Proportion ist der §. 238 aufgestellten vollkommen ähnlich und hätte selbst ohne die vorangeführte Berechnung angenommen werden können.

Da die Verdrehung der Wellen gewöhnlich durch Grade gemessen wird, so wollen wir die obige Gleichung $B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi . A^4 . \frac{a}{A.l}$ zu diesem Gebrauche einrichten. Die Peripherie der Welle ist offenbar $= 2\pi . A$; wenn diese in 360 Grade eingetheilt wird und G die Anzahl Grade vorstellt, welche der Bogenlänge a entsprechen, so haben wir die Proportion $2\pi . A : 360 = a : G$, woraus $\frac{a}{A} = \frac{\pi . G}{180}$. Wird dieser Werth in die obige Gleichung gesetzt, so ist

$B.P = \frac{Q.L}{F.\alpha'} . \pi . A^4 . \frac{\pi . G}{180 . l}$. Wenn wir demnach zwei Wellen mit einander vergleichen, und statt des Halbmessers A den Durchmesser D einführen, und eben so den Durchmesser der zweiten Welle d nennen, so ist $B.P : b.p = \frac{G.D^4}{L} : \frac{g.d^4}{l}$.

gekehrten Verhältnisse steht. Gebraucht man aber **hohle Röhren**, die eben so viel Masse (kubischen Inhalt) wie ein solider Cylinder haben, so ist der Widerstand, welchen sie gegen die Drehung leisten, dreimal so gross.

Bezeichnen wir die Kräfte, welche die Drehung zweier Wellen an den Peripherien der Räder bewirken mit P, p (z. B. der Stoss des Wassers an dem Umfange eines Mühlrades), die Halbmesser dieser Räder mit B und b, die Durchmesser der Wellen mit D und d, die Längen derselben mit L und l, endlich die Anzahl Grade, um welche die Wellen der Länge nach gedreht werden, mit G und g, so ist den unten angeführten Berechnungen zu Folge $B \cdot P : b \cdot p = \frac{G \cdot D^4}{L} : \frac{g \cdot d^4}{l}$. Diese Proportion findet jedoch nur bei vollkommener Elasticität der Wellen, wobei also keine bleibende Drehung derselben eintritt, statt.

§. 340.

Quadratförmige Schafte, deren man sich auch häufig in der Ausübung bedient, unterliegen gleichen Gesetzen, wie die cylindrischen *). Bezeichnen wir abermals die

Fig. 11. Tab. 16. *) Der Widerstand, den **quadratförmige Schafte** gegen Drehung leisten, ergibt sich aus der vorigen Berechnung. Nach derselben ist das Drehungsmoment für den, in ein Quadrat eingeschriebenen Cylinder $= \frac{Q \cdot L}{F \cdot \alpha'} \cdot \pi \cdot A^3 \cdot \frac{a}{l}$, wo A den Halbmesser des Cylinders, a die Grösse der Drehung in der Drehungsfläche der Kraft an der Oberfläche des Cylinders gemessen, und l die Länge des Cylinders bezeichnet. Zu diesem Momente kommen nun noch die Drehungsmomente der vier rechtwinkeligen Ansätze J E G zu addiren.

Um das Drehungsmoment eines solchen Ansatzes zu finden, ziehen wir auf der willkührlichen Entfernung CB den Bogen d B d' und hiezu die Tangente D B D'. Setzen wir die Linie $EB = x$, so ist $DBD' = 2\,x$. Setzen wir den Winkel $dCB = 2\,\lambda$, so sind in dem Dreiecke d C E die Winkel und eine Seite gegeben. Ist nun $CE = E$, so haben wir $Cd : CE = \text{Sin}\,45 : \text{Sin}\,(45 + 2\,\lambda)$ oder $E - x : E = \text{Sin}\,45 : \text{Sin}\,(45 + 2\,\lambda)$, woraus

$$\text{Sin}\,(45 + 2\,\lambda) = \frac{E \cdot \text{Sin}\,45}{E - x} = \text{Sin}\,45 \cdot \text{Cos}\,2\,\lambda + \text{Sin}\,2\,\lambda \cdot \text{Cos}\,45, \text{ oder}$$

$$\frac{E}{E - x} = \text{Sin}\,2\,\lambda + \text{Cos}\,2\,\lambda = 2\,\text{Sin}\,\lambda \cdot \text{Cos}\,\lambda + 1 - 2\,\text{Sin}^2\,\lambda, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2\,(E - x)} = \text{Sin}\,\lambda \cdot \text{Cos}\,\lambda - \text{Sin}^2\,\lambda = \text{Sin}\,\lambda - \text{Sin}^2\,\lambda - \frac{\text{Sin}^3\,\lambda}{2}.$$

Da $2\,\lambda$ kleiner als 45 Grad ist, demnach λ in jedem Falle kleiner als 22,5 Grad seyn muss, so ist Sin λ ein so kleiner Bruch, dass die höhern Potenzen, welche die dritte übersteigen, ohne Anstand vernachlässigt werden können. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung gibt die bekannte Umkehrung der Reihen $\lambda = \frac{x}{2\,(E - x)} + \frac{x^2}{4\,(E - x)^2} + \frac{x^3}{12\,(E - x)^3}$. Es ist daher die Länge des Bogens

$$Bd = (E - x)\,2\,\lambda = x + \frac{x^2}{2\,(E - x)} + \frac{x^3}{6\,(E - x)^2} \text{ und der ganze Bogen}$$

$$dBd' = 2\,x + \frac{x^2}{E - x} + \frac{x^3}{3\,(E - x)^2}.$$

Wir haben im vorigen §. für das Drehungsmoment die Differenzialgleichung $B \cdot dP = \frac{Q \cdot L}{F \cdot \alpha'} \cdot 2\,\pi \cdot r \cdot dr \cdot \frac{r^2 \cdot a}{A \cdot l}$ gefunden; wird diese Gleichung hier angewendet, so ist $2\,\pi \cdot r =$ der Länge des Bogens d B d', ferner $dr = dx$ und $r^2 = CB^2 = (E - x)^2$. Werden

drehenden Kräfte an dem Umfange der Räder mit P und p, die Halbmesser dieser Räder mit B und b, die Quadratseiten der Schäfte mit D und d, die Längen derselben mit L und l, endlich die Winkel in Graden, um welche diese Schäfte ihrer Länge nach gedreht werden, mit G und g, so ist bei sehr kleinen Drehungswinkeln der unten angeführten Rechnung zu Folge $B . P : b . p = \frac{G . D^4}{L} : \frac{g . d^4}{l}$.

§. 341.

Da die Anwendung der vorigen Proportionen nothwendig einige **Versuche über die Drehung des Holzes und Eisens** voraussetzt, so wurden am technischen Institute zu Prag im Jänner 1831 folgende Versuche hierüber angestellt.

Zu diesen Versuchen hat man sich der gewöhnlichen Drehbank bedient. An dem einen Ruckstocke M wurde die in Grade eingetheilte Scheibe RST, bei welcher der Halbmesser der Theilung 18 Zoll betrug, befestigt. Der Cylinder oder das Prisma Fig. 12 u. 13. Tab. 16.

diese Werthe substituirt, so ist $B . dP = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \left\{ 2x + \frac{x^2}{E - x} + \frac{x^3}{3 (E - x)^2} \right\} dx (E - x)^2$ Fig. 11.
$= \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \left(2 E^2 . x - 3 E . x^2 + \frac{4}{3} x^3 \right) dx$. Wird diess integrirt, so ist
$B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \left(E^2 - E . x + \frac{x^2}{3} \right) x^2$. Hiezu kommt keine constante Grösse beizusetzen, weil das Drehungsmoment mit x verschwindet.

Setzen wir $x = E - A$, wo A der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises oder $A = CG$ ist, und bemerken, dass $E^2 = 2 A^2$, so ist $x = A \sqrt{2} - A = 0{,}414214\ A$, und demnach substituirt $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 0{,}252454\ A^4$.

Diess Drehungsmoment muss für die vier Ecken 4mal genommen werden, es ist daher $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 1{,}0098\ A^4$. Wird hiezu das im vorigen §. für die Ausdehnung gefundene Moment des Cylinders $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot A^4 = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 1{,}5703\ A^4$ addirt, so erhalten wir das gesammte Drehungsmoment für den quadratförmigen Schaft $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 2{,}5806\ A^4$. Dasselbe verhält sich demnach zu dem Drehungsmomente des Cylinders, welcher in das Quadrat eingezeichnet wird, wie $2{,}5806 : 1{,}5708 = 5 : 3$ beinahe. Wenn aber hiebei zugleich die Rückwirkung, die aus dem Zusammendrücken der Masse entstehet, berücksichtiget werden soll, so haben wir Gleichung $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 5{,}1612\ .\ A^4$.

Auf gleiche Art ist das **Widerstandsmoment eines viereckigen hohlen Schaftes**, wenn er A zur halben Dicke im Lichten und R zur äussern Dicke hat
$= \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 5{,}1612\ (R^4 - A^4) = \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 5{,}1612\ (R^2 + A^2)(R^2 - A^2)$. Soll nun die Querschnittsfläche des hohlen Schaftes $(R^2 - A^2)$ so gross seyn, als die Querschnittsfläche des massiven Schaftes A^2, oder $R^2 = 2 A^2$, so haben wir $(R^2 + A^2)(R^2 - A^2) = 3 A^4$ und somit das Drehungsmoment $= \frac{Q . L}{F . \alpha'} \cdot \frac{a}{A . l} \cdot 5{,}1612\ .\ 3 A^4$; dieses Moment ist daher abermals **dreimal grösser**, als jenes eines soliden Schaftes, und es findet hier dasselbe Verhältniss, wie bei den hohlen Röhren statt.

Fig. 12 u. 13. Tab. 16. a b, welches versucht werden sollte, wurde an dem einen Ende a mit einer kreisrunden Scheibe m o n von 12¼ Zoll im Durchmesser versehen, an deren Peripherie die Gewichte p angehängt wurden, welche zur Drehung bestimmt waren. In dem Mittelpunkte dieser Scheibe und in der Achse des Cylinders war eine Oeffnung für den Kern angebracht, um welchen die Scheibe durch die angehängten Gewichte gedreht werden konnte. Das andere Ende b des Cylinders wurde in ein Brettstück befestigt, welches mit dem andern Ruckstocke N unverrückbar verbunden wurde. An der Scheibe m o n befand sich zugleich der Zeiger k l, welcher die Grade anzeigte, um welche der Cylinder von den angehängten Gewichten verdreht wurde.

§. 342.

Der erste Versuch wurde mit einem Cylinder von Tannenholz gemacht, welcher aus dem obern Ende eines 20 bis 24 Jahr alten Stammes genommen und so abgedreht wurde, dass der Kern desselben genau in der Achse des Cylinders lag. Die Zahl der Jahrringe dieses Cylinders war 6, der Durchmesser desselben = ⅘ Zoll und seine Länge = 32 Zoll. Nachstehende Tabelle enthält für die verschiedenen angehängten Gewichte die Grösse der Drehung, wie sie an der Scheibe m o n in Graden (den Kreis in 360 Theile getheilt) beobachtet, nach der unten angeführten Formel berechnet, und sodann noch für den vollkommen elastischen Zustand des Cylinders auf gleiche Weise bestimmt wurde, wie es bei den Versuchen über die Biegung der Fall war.

Versuch Nro. 1.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Angehängte Gewichte p.	Drehung g des Stabes nach der		Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	Berechnete gleichförmig zunehmende Drehung $g = \frac{p}{A}$.	Unterschiede zwischen III und V.
	Beobachtung.	Rechnung.			
N Oe. Pf.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.
0,5	1,3	1,31	— 0,01	1,30	+ 0,01
1	2,6	2,64	— 0,04	2,60	+ 0,04
1,5	4,0	3,98	+ 0,02	3,90	+ 0,08
2	5,4	5,35	+ 0,05	5,20	+ 0,15
2,5	6,8	6,74	+ 0,06	6,50	+ 0,24
3	8,2	8,15	+ 0,05	7,80	+ 0,35
3,5	9,6	9,59	+ 0,01	9,10	+ 0,49
4	11,05	11,05	+ 0,00	10,40	+ 0,64
4,5	12,5	12,54	— 0,04	11,70	+ 0,84
5	14,0	14,05	— 0,05	13,00	+ 1,05
5,5	15,5	15,60	— 0,10	14,30	+ 1,30
6	17,0	17,17	— 0,17	15,59	+ 1,58
6,5	18,55	18,78	— 0,23	16,89	+ 1,89
7	20,2	20,43	— 0,23	18,19	+ 2,24

Die aus den ersten 10 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Drehung ist $g = 93{,}3 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{17{,}95}\right)}\right\}$, worin $A = 0{,}384739$ und $B = \frac{1}{485}$ ist, folglich das Verhältniss der angebrachten Kraft zum Drehungswinkel $\frac{p}{g} = A = 0{,}384739$.

Dieser Versuch wurde nicht weiter fortgeführt, weil die angeführten Beobachtungen schon vollkommen hinreichend waren, um die Grösse des elastischen Widerstandes gegen Drehung abzuleiten; die weitere Fortsetzung derselben würde nur die Irregularitäten des Holzes gezeigt haben, welche ausser dem Gebiethe der Elasticität und unserer Rechnungen liegen; dasselbe ist bei den folgenden Versuchen zu bemerken.

Versuch Nro. 2.

Mit einem geschmiedeten Eisenstabe, dessen Länge 18 Zoll und jede Seite seines quadratförmigen Durchschnittes $\frac{9}{13}$ Zoll war.

I. Angehängte Gewichte p.	II. Drehung g des Stabes nach der Beobachtung.	III. Drehung g des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende Drehung $g = \frac{p}{A}$.	VI. Unterschiede zwischen III und V.
N Oe. Pf.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.
2	1,15	1,15	+ 0,00	1,14	+ 0,01
4	2,3	2,31	— 0,01	2,28	+ 0,03
6	3,5	3,49	+ 0,01	3,42	+ 0,07
8	4,7	4,69	+ 0,01	4,56	+ 0,13
10	5,9	5,91	— 0,01	5,70	+ 0,21
12	7,15	7,14	+ 0,01	6,85	+ 0,29
14	8,4	8,39	+ 0,01	7,99	+ 0,40
16	9,65	9,67	— 0,02	9,13	+ 0,54
18	10,9	10,96	— 0,06	10,27	+ 0,69
20	12,2	12,28	— 0,08	11,41	+ 0,87
22	13,45	13,62	— 0,17	12,55	+ 1,07
24	14,7	14,99	— 0,29	13,69	+ 1,30
26	16,0	16,38	— 0,38	14,83	+ 1,55
28	17,45	17,80	— 0,35	15,97	+ 1,83
30	18,9	19,25	— 0,35	17,11	+ 2,14
40	26,5	27,03	— 0,53	22,82	+ 4,21

Die aus den ersten 8 Versuchen abgeleitete Gleichung für die Drehung ist $g = 86{,}8 \left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{76{,}96}\right)}\right\}$, worin $A = 1{,}753053$ und $B = \frac{1}{99}$ ist, folglich das Verhältniss der angebrachten Kraft zum Drehungswinkel $\frac{p}{g} = A = 1{,}753053$.

Dieser Versuch wurde bis zur Belastung mit 40 ℔ fortgesetzt, wobei der Eisenstab eine bleibende Drehung von 36,25 Graden angenommen hatte. Um zu sehen, wie sich der Stab bei seiner rückwärtigen Bewegung verhalten würde, hat man die Gewichte an der entgegengesetzten Seite angehängt, und auf diese Art versucht, ihn wieder in seine anfängliche gerade Richtung zurückzudrehen. Hiebei ergaben sich folgende Resultate:

Versuch Nro. 3.

I. Angehängte Gewichte p	II. Drehung g des Stabes nach der Beobachtung.	III. Drehung g des Stabes nach der Rechnung.	IV. Unterschiede der Rechnung von der Beobachtung.	V. Berechnete gleichförmig zunehmende Drehung $g = \frac{p}{A}$.	VI. Unterschiede zwischen III und V.
NOe.Pf.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.	in Graden.
2	1,2	1,19	+ 0,01	1,18	+ 0,01
4	2,4	2,40	+ 0,00	2,37	+ 0,03
6	3,6	3,62	— 0,02	3,55	+ 0,07
8	4,85	4,86	— 0,01	4,74	+ 0,12
10	6,1	6,12	— 0,02	5,92	+ 0,20
12	7,4	7,39	+ 0,01	7,10	+ 0,29
14	8,7	8,69	+ 0,01	8,29	+ 0,40
16	10,0	10,00	+ 0,00	9,47	+ 0,53
18	11,3	11,33	— 0,03	10,65	+ 0,68
20	12,7	12,69	+ 0,01	11,84	+ 0,85
22	14,1	14,07	+ 0,03	13,02	+ 1,05
24	15,6	15,47	+ 0,13	14,21	+ 1,26
26	17,1	16,90	+ 0,20	15,39	+ 1,51
28	18,7	18,35	+ 0,35	16,57	+ 1,78
30	20,3	19,84	+ 0,46	17,76	+ 2,08
40	53,8	27,75	+ 26,05	23,68	+ 4,07

Aus den ersten 8 Beobachtungen ergibt sich für die Drehung die Gleichung

$$g = 94{,}6 \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{79{,}91}\right)} \right\},$$

worin $A = 1{,}689342$ und $B = \frac{1}{112}$, folglich das Verhältniss der angebrachten Kraft zum Drehungswinkel

$$\frac{p}{g} = A = 1{,}689342.$$

§. 343.

Aus der Vergleichung der Versuche Nro. 2 und Nro. 3, welche mit demselben Stabe bei dem Hin- und Zurückdrehen gemacht wurden, ergibt sich, dass der Widerstand bei dem Zurückdrehen abermals denselben Gesetzen folgt, wie vorhin bei der ersten Drehung, so wie auch die Grösse des Widerstandes in beiden Fällen beinahe gleich ist. Diess zeigt der Unterschied der Gleichungen für die vollkommene Elasticität. Im Versuche Nro. 2 war nämlich $p = 1{,}753053 \,.\, g$, oder $p = \frac{7}{4} g = \frac{28}{16} g$, und im Versuche Nro. 3 bei dem Zurückdrehen war $p = 1{,}689342\, g$, oder $p = \frac{27}{16} \cdot g$.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Kraft, welche den Stab auf dieselbe Anzahl von Graden zurückzudrehen vermag, bei unserem Stabe $\frac{1}{28}$tel geringer ist, als für die erste Drehung nothwendig war. Auch erklärt sich hieraus, dass durch wiederholtes Vor- und Rückwärtsdrehen eine ähnliche Schwächung der Festigkeit eintritt, wie es bei dem mehrmaligen Hin- und Herbiegen eines Stabes der Fall ist. Obwohl dieser Unterschied sehr gering ist, so sieht man doch, dass das Widerstandsvermögen bei der mehrmaligen Wiederholung in dem geometrischen Verhältnisse $1 : \frac{27}{28} : \left(\frac{27}{28}\right)^2 \ldots.$ sich vermindere, folglich der Stab nach 10maligen Hin- und Herdrehen mehr als die Hälfte von seiner Kraft verlieren müsse. Dieses findet bei vollkommener Elasticität, folglich bei kleinen Drehungen statt,

bei grössern Drehungen ist aber die Abnahme des Widerstandsvermögens viel grösser, denn eine Kraft von 40 ℔ hat den Stab bei der ersten Drehung um 26,5 Grad, dagegen bei der rückwärtigen Drehung schon um 53,8 Grad, also mehr als doppelt so viel zurückgedreht, demnach war das Widerstandsvermögen nach einer Drehung bereits um die Hälfte kleiner. Bei der Belastung mit 40 ℔, welche die Drehung von 53,8 Grad bewirkt hatte, ging der Stab nach der Entlastung auf 30 Grad zurück, so dass also der Stab von seiner bleibenden Verdrehung mit 36,25 Grad noch 6,25 Grad behielt. Bei der Belastung mit 42 ℔ nahm er aber eine bleibende Verdrehung von 12,75 Grad nach der entgegengesetzten Richtung an.

Uibrigens bewähren alle drei Versuche hinreichend, dass auch das Widerstandsvermögen der Wellen und Schäfte gegen Drehung denselben Gesetzen folge, die bereits bei der absoluten und relativen Festigkeit aufgestellt wurden. Wir haben dort zugleich gezeigt, dass man bei solchen Rechnungen nur die vollkommene Elasticität zum Grunde legen dürfe, demnach muss auch bei den Berechnungen über den Widerstand gegen die Drehung nothwendig nur die vollkommene Elasticität berücksichtigt werden; die Uiberschreitung derselben würde nämlich hier eben so, wie es bei der Ausdehnung, und Biegung der Fall war, eine bleibende Verdrehung zur Folge haben, die sich mit der Zeit fortwährend vermehren und nothwendig mit dem Bruche enden müsste.

§. 344.

Zur vollkommenen Begründung eines Antrages über die Stärke der Wellen, werden nun wieder Erfahrungen im Grossen benöthigt, um dieselben in die Proportion $b \cdot p : B \cdot P = \frac{g \cdot d^4}{l} : \frac{G \cdot D^4}{L}$ aufnehmen zu können.

Bei den Kehrrädern in Schemnitz und andern ungarischen Bergwerken ist der mittlere Halbmesser des Treibkorbes B = 72 Zoll, die Last P besteht

aus dem Gewichte des Treibsackes sammt der Ladung	1000 ℔
— — — — Seiles für 80 Lachter Tiefe im Durchschnitte . .	800 ℔
— der Reibung an den Zapfen	200 ℔
Zusammen	P = 2000 ℔.

Der Durchmesser der Welle ist D = 30 Zoll und die Länge derselben von der Mitte des Treibkorbes bis zur Mitte des Wasserrades L = 4⅓ Klafter = 312 Zoll.

Dagegen war bei unserm Versuche Nro. 1 mit Tannenholz $b = 6\frac{1}{8} = \frac{49}{8}$ Zoll, der Durchmesser $d = \frac{8}{10}$ Zoll, die Länge $l = 32$ Zoll und die Anzahl Grade, um welche der Stab verdreht wurde $g = \frac{p}{A} = \frac{p}{0{,}384739}$. Werden alle diese Werthe in die vorangeführte Proportion gesetzt, so ist $\frac{49}{8} \cdot p : 72 \cdot 2000 = \frac{p}{0{,}384739}\left(\frac{8}{10}\right)^4 \cdot \frac{1}{32} : \frac{(30)^4}{312} \cdot G$. Hieraus ergibt sich $G = 0{,}3$ Grade. Die Drehung der Welle, welche durch die Uibertragung dieses grossen statischen Momentes $B \cdot P = 72 \cdot 2000 = 144000$ bewirkt wird, beträgt demnach beinahe den dritten Theil eines Grades.

Eine zweite Erfahrung dieser Art liefern uns die Wellen in den Stabeisenhämmern. Das Gewicht eines solchen Hammers beträgt gewöhnlich 300 ℔, das Verhältniss der Hebelsarme der Kraft zur Last am Hammerstiele ist 1 : 2, mithin die Last für die Daumenwelle P = 600 ℔. Der Halbmesser der Daumenwelle von der Achse derselben bis zum Angriffspunkte ist B = 24 Zoll; der Durchmesser der Welle selbst ist D = 20 Zoll und die Länge vom Wasserrade bis zur Kreisfläche des Daumenkranzes L = 20 Fuss = 240 Zoll. Werden diese Werthe abermals in die obige Proportion gesetzt, so ist $\frac{49}{8} \cdot p : 24 \,.\, 600 = \frac{p}{0{,}354739} \left(\frac{8}{10}\right)^4 \frac{1}{32} : \frac{20^4 . G}{240}$, woraus sich G = 0,117 Grade ergibt.

Da diese Verdrehung nur ein Drittel von der vorigen ist, so wollen wir der grössern Sicherheit wegen die letztere Erfahrung bei der Berechnung unserer Mühl- und Hammerwellen zum Maasstabe nehmen. Wenn wir demnach in der Proportion $b \,.\, p : B \,.\, P = \frac{g \,.\, d^4}{l} : \frac{G \,.\, D^4}{L}$ nach der oben angeführten zweiten Erfahrung b = 24 Zoll, p = 600 ℔, d = 20 Zoll und l = 240 Zoll setzen und die Anzahl Grade der Drehung g = G annehmen, so ist $24 . 600 : B P = \frac{20^4}{240} : \frac{D^4}{L}$, woraus $D = 0{,}46 \sqrt[4]{(B . P . L)}$ folgt. In diesem Ausdrucke ist P das Gewicht in Pfunden, welches z.B. die Daumen zu heben haben, B ist der Hebelsarm desselben, L die Länge der Welle von einem Angriffspunkte zum andern und D der Durchmesser der Welle, alles in Zollen verstanden.

Beispiel. Es sey das Gewicht eines Zainhammers = 50 ℔, das Verhältniss der Hebelsarme der Kraft zur Last am Hammerstiele wie 1 : 2, demnach die Kraft an den Hebedaumen P = 100 ℔, der Halbmesser der Hebedaumen B = 12 Zoll, die Länge der Welle L = 15 Fuss = 180 Zoll, so ist der nöthige Durchmesser der Welle $D = 0{,}46 \sqrt[4]{(12 . 100 . 180)} = 0{,}46 . 21{,}56 = 9{,}9$ Zoll; man würde daher mit einer 10 Zoll starken Welle auslangen.

§. 345.

Auf gleiche Art können wir nun auch die nöthige Stärke der eisernen Wellen und Schäfte berechnen.

Wir wollen für denselben Zainhammer zuerst die Stärke einer schmiedeisernen Welle bestimmen. Hiezu dient uns abermals die Proportion $b \,.\, p : B \,.\, P = \frac{g \,.\, a^4}{l} : \frac{G \,.\, A^4}{L}$.

In unserm Versuche mit dem viereckigen Eisenstabe war $a = \frac{4}{13}$ Zoll, $b = \frac{49}{8}$ Zoll, l = 18 Zoll und für p = 2 Pfund war g = 1,15 Grade. Setzen wir diese Werthe in die angeführte Proportion, so erhalten wir $\frac{49}{8} \cdot 2 : 12 \,.\, 600 = \frac{1{,}15}{18} \cdot \left(\frac{4}{13}\right)^4 : \frac{0{,}117}{180} \cdot A^4$, woraus A = 4,77 Zoll folgt. Diese 4,77 Zoll starke viereckige Welle von Schmiedeeisen besitzt demnach dieselbe Festigkeit, wie eine 10 Zoll starke runde Welle von Tannenholz.

Wenn wir auf gleiche Art die Stärke einer gusseisernen Welle berechnen wollen, so müssen wir, da keine Versuche über die Drehung solcher grössern Wellen vor-

liegen, auf die Gleichung $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} . \pi . A^2 . \frac{\pi . A^2 . G}{180 . l}$ zurückgehen. Aus der Seite 384 angeführten Tabelle erhellet, dass $\frac{Q . L}{F . \alpha'}$ für Gusseisen beiläufig $= 10000000$ sey. Das statische Moment, welches von der Welle gewältigt werden soll, sey wie zuvor bei dem Stabhammer $B . P = 24 . 600$, die Länge der Welle sey wie dort $l = 20$ Fuss $= 240$ Zoll und $G = 0{,}1$ Grad, so haben wir $24 . 600 = 10000000 . (3{,}14159)^2 \frac{A^4 . 0{,}1}{180 . 240}$, woraus der Halbmesser der gusseisernen Welle $A = 2{,}82$ und sonach der Durchmesser dieser Welle $= 5{,}64$ Zoll folgt. Wir ersehen demnach, dass in diesem Falle eine gusseiserne Welle von 5,64 Zoll im Durchmesser dieselbe Stärke besitzen werde, als eine hölzerne von 10 Zoll Durchmesser.

§. 346.

Am Schlusse dieses Kapitels über die Festigkeit der Körper glauben wir auf folgende Zusammenstellung der gefundenen vorzüglichsten Resultate aufmerksam zu machen.

I. Zur Bestimmung der absoluten Festigkeit wurde S. 243 die allgemeine Proportion $q : Q = f . \frac{\alpha}{l} : F . \frac{\alpha'}{L}$ aufgestellt. Wenn also das Verhältniss $Q : F . \frac{\alpha'}{L}$ für irgend eine Materie bekannt ist, so kann man in allen andern Fällen, wo von den 4 Grössen q, f, α, l drei gegeben sind, die vierte finden.

II. Für die Biegung der Körper ist S. 326 die Gleichung $\frac{G}{Q} = \frac{4 b . h^3 . U}{l^3} . \frac{L}{B . H . \alpha'}$ aufgestellt worden. Hieraus folgt die Proportion $G : b h . \frac{4 h^2}{l^2} . \frac{U}{l} = Q : B . H . \frac{\alpha'}{L}$. Da hier abermals das dritte und vierte Glied (worin $B . H = F$), aus einem Versuche bekannt ist, so können wir wieder, wenn von den 5 Grössen G, b, h, l und U vier gegeben sind, die fünfte finden.

III. Die Last, welche eine Säule ohne Biegung tragen kann, wird nach S. 370 durch die Gleichung $p = \frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b . h^3 . \pi^2}{12 l^2}$ ausgedrückt. Hieraus folgt wieder die Proportion $p : \frac{b . h^3 . \pi^2}{12 l^2} = Q : B . H . \frac{\alpha'}{L}$. Sind die letzten 2 Glieder durch einen Versuch bekannt, so lässt sich von den 4 Grössen p, b, h und l, wenn drei angenommen werden, die vierte finden.

IV. Für den Widerstand, welchen cylindrische Körper gegen Drehung leisten, haben wir S. 375 die Gleichung $B . P = \frac{Q . L}{F . \alpha'} . \pi . A^4 . \frac{\pi . G}{180 . l}$ gefunden. Wird diese abermals in eine Proportion aufgelösst, so ist $B . P : \frac{\pi^2 . A^4 . G}{180 . l} = Q : F . \frac{\alpha'}{L}$. Sind nun wieder die letzten zwei Glieder aus einem Versuche bekannt, und von den 5 Grössen B, P, A, G und l vier gegeben, so kann man die fünfte finden.

Aus dieser Zusammenstellung ersehen wir, dass es in allen Fällen, wo die Festigkeit der Körper in Anspruch genommen wird, auf das Verhältniss $Q : F . \frac{\alpha'}{L}$ oder $\frac{Q . L}{F . \alpha'} : 1$,

demnach auf die Grösse $\frac{Q \, . \, L}{F \, . \, \alpha'}$, welche man das elastische Kraftverhältniss (nach *Tredgold: „Modulus of elasticity)“* nennen dürfte, vorzüglich ankömmt. Die folgende Tabelle enthält demnach die Berechnung dieser Grösse in runden Zahlen für die versuchten Körper.

Pag.	Nro. des Versuchs.	Materie.	Querschnittsfläche F in □″	Elastisches Kraftverhältniss $\frac{Q \, . \, L}{F \, . \, \alpha'}$
339	1	Eichenholz.	1	1 463000
do.	2	do.	1	1 225000
340	3	do.	1	1 116000
do.	4	Buchenholz.	0,9424	1 228000
341	5	do.	0,9024	1 503000
do.	6	Fichtenholz.	1	1 808000
342	7	do.	0,8728	2 089000
do.	8	do.	0,9184	2 250000
343	9	Tannenholz.	0,9750	1 668000
do.	10	do.	0,9425	1 299000
344	11	do.	1	2 574000
349	1	Gusseisen.	1,7590	12 100000
do.	2	do.	1,7590	11 171000
350	3	do.	1,8338	11 658000
do.	4	do.	1,7736	10 488000
351	5	do.	1,8601	11 257000
do.	6	do.	1,9468	12 065000
352	7	do.	2,0565	11 092000
353	1	Schmiedeeisen.	0,7007	22 759000
354	2	do.	0,6332	21 440000
do.	3	do.	0,4117	23 630000
355	4	do.	0,6717	20 508000
356	5	Gewalztes Eisen.	0,6484	24 109000
266	1	Clavierdraht.	1/2037	22 620000
267	2	do.	1/4382	23 581000
268	3	do.	1/3099	25 170000
do.	4	do.	1/1046	18 618000
269	5	do.	1/598	19 981000
do.	6	Gemeiner Draht.	1/412,5	16 454000
270	7	do.	1/258,3	21 999000
do.	8	Stählerne Uhrfeder.	1/747,5	21 172000
271	9	do.	1/480	16 236000

IV. Kapitel.

Statische Baukunst.

§. 347.

Die statische Baukunst hat diejenigen Regeln zum Gegenstande, wodurch die Festigkeit der Gebäude in Hinsicht auf die Stärke der einzelnen Theile und ihre Zusammenstellung begründet wird. In dem vorigen Kapitel haben wir bereits die Gesetze für die Festigkeit der einzelnen Theile eines Gebäudes aufgestellt, es bleiben daher für die statische Baukunst noch hauptsächlich die Gesetze für ihre Zusammenstellung übrig.

§. 348.

Der erste hieher gehörige Gegenstand ist die Betrachtung der Sicherheit des Standes gegen den Umsturz freistehender Körper oder die Stabilität.

Wenn ein Parallelopiped auf seiner Grundfläche ABF steht und in Ruhe bleibt, so heisst das Vermögen, sich in dieser Lage zu erhalten, seine Stabilität. Ein Körper hat demnach keine Stabilität, wenn ihm das Vermögen, in seiner Stellung ruhig zu verharren, fehlt, und er fällt desshalb um. Die Stabilität eines Körpers wird eigentlich durch das Uibermaass an Kraft, womit derselbe andern Kräften, die ihn umzustürzen streben, widersteht, geschätzt oder gemessen. Fig. 1. Tab. 17.

Der Körper widersteht dem Umsturze nur durch die Kraft der Schwere oder durch sein Gewicht. Bei dem Umsturze selbst muss er sich um diejenige Seite BF seiner Grundfläche drehen, welche mit der Richtung der Kraft S übereinstimmt.

Denken wir uns die senkrechte Mauer ABCD als einen durch den Mörtel fest verbundenen Körper; das Gewicht G dieser Mauer wirkt nach der Schwere, und die vereinte Kraft derselben geht durch den Schwerpunkt o; man kann sich daher in o das Gewicht G vorstellen. Wir wollen nun noch annehmen, dass zugleich in irgend einem Punkte E der Höhe die Kraft S in horizontaler Richtung und zwar von F gegen E wirkt.

Da es gleichgültig ist, in welchem Punkte ihrer Richtung eine Kraft wirkt, so kann man die beiden Kräfte S und G in dem Durchschnittspunkte ihrer Richtungen, also in q angebracht denken. Stellt man endlich durch qp die Kraft G und durch qr die Kraft S vor, und konstruirt das Kräftenparallelogramm qrup, so gibt qu die Richtung und Grösse der mittlern Kraft. Fällt die Richtung qu der mittlern Kraft innerhalb der Basis AB des Körpers, wie Fig. 1 in u, so ist die zusammengesetzte oder die vereinte Wirkung der Kräfte gestützt und der Körper hat Stabilität. Dieser Punkt u hat zugleich die Wirkung der beiden Kräfte zu tragen und muss so weit gesichert werden, dass er die ganze Last qu auszuhalten im Stande ist. Fällt aber diese mittlere Richtung qu nicht in die Basis des Körpers, sondern ausserhalb derselben, wie Fig. 2 nach u′, so ist die mittlere Kraft nicht gestützt, der Körper hat keine Stabilität, und er wird von der auf ihn einwirkenden Kraft S umgeworfen. Fig. 2.

Fig. 1. Tab. 17. Wirkt gegen einen auf einer horizontalen Fläche aufgestellten Körper Fig. 1 bloss seine Schwere, d. h. ist S = 0, so ist sein Gewicht im Schwerpunkte o zugleich die mittlere Kraft selbst und op deren Richtung; sie fällt demnach in die Mitte der Basis, und der Körper hat die möglichst grösste Stabilität. Wir können daher die Linie uB für das Maass der Stabilität annehmen, und man sieht in dieser Hinsicht, dass die Stabilität am grössten ist, wenn der Punkt u in die Mitte der Basis eines Körpers fällt, und dass sie um so kleiner wird, je näher der Punkt u gegen das Ende B der Basis rückt. Fällt der Punkt u mit B zusammen, oder geht die Richtung der Diagonalkraft durch B selbst, wie Fig. 3, so erreicht die Stabilität ihre Gränze, und die geringste Vermehrung der Kraft S ist im Stande den Körper umzuwerfen. In diesem Falle verhält sich die Kraft S zur Last G, wie die halbe Basis $pB = \frac{d}{2}$ zur Höhe $BE = h$, auf welcher die Kraft wirkt. Es ist daher $S \cdot h = \frac{G \cdot d}{2}$ die Gleichung für das Gleichgewicht an dem Winkelhebel p B E, dessen Unterstützungspunkt B ist. Hieraus erklärt sich die leichte Beweglichkeit einer Kugel, eines Rades, einer Walze etc.; bei allen diesen Körpern ruht nämlich die Last nur auf einem Punkte und es ist in jeder Lage derselben ihre Stabilität = 0. Zum Transporte grosser Lasten ist daher die runde Gestalt die vortheilhafteste.

(Fig. 3. in margin beside "gonalkraft")

§. 349.

Fig. 1. Setzen wir die Höhe der Mauer $BD = H$, ihre Länge $BF = l$, ihre Breite oder Dicke $AB = d$ und das Gewicht ihrer kubischen Einheit = g, so ist das Gewicht der ganzen Mauer $G = g \cdot H \cdot l \cdot d$. Werden diese Werthe in die im vorigen §. gefundene Gleichung für die Stabilität gesetzt, so findet man $S = \frac{g \cdot H \cdot l \cdot d^2}{2h}$.

Bei dieser Rechnung wird vorausgesetzt, dass die Kraft S nur in einem einzigen Punkte auf die Mauer wirke, allein in den meisten Fällen ist diese Kraft der ganzen Länge der Mauer nach gleich vertheilt, wie z. B. bei Mauern gegen den Erdendruck, bei Mauern, an welche sich Gewölbe stützen, bei freistehenden Wänden, die dem Winde ausgesetzt sind etc. Verstehen wir daher unter S den Druck auf die Einheit des Längenmaasses, so ist $S \cdot l$ der Druck auf die ganze Länge l und wir erhalten $S \cdot l = g \cdot \frac{H \cdot l \cdot d^2}{2h}$. Wird hier zu beiden Seiten mit l dividirt, so ist $S = g \cdot \frac{H \cdot d^2}{2h}$. Wir sehen hieraus, dass der Widerstand einer senkrechten Mauer desto grösser wird, je schwerer (g) die Steine oder Ziegeln sind, aus welchen die Mauer besteht, je grösser das Verhältniss der Höhe (H) der Mauer gegen die Höhe (h), in welcher die äussere Kraft wirkt, dann aber vorzüglich, je mehr die Basis oder Dicke der Mauer (d) beträgt.

Bezeichnen wir die Dicken zweier gleich langen und aus demselben Materiale erbauten Mauern mit d und D, und nehmen an, dass die Kraft an dem obern Ende einer jeden Mauer wirke, so verhalten sich die Widerstandskräfte dieser 2 Mauern, $S : S' = d^2 : D^2$. Diese Proportion lässt sich übrigens auch aus dem Begriffe vom Hebel ableiten. Wird nämlich die Dicke einer Mauer 2, 3, 4 nmal grösser, so wird sowohl der Hebelsarm,

als auch das Gewicht derselben 2, 3, 4 nmal grösser, die Stabilität nimmt daher mit dem Quadrate der Dicke oder Basis zu.

§. 350.

Wir kommen nun zu den schiefen Stellungen der Körper, wobei sowohl ihre Wirkung gegen andere Körper, als auch die Kräfte, die zu ihrer eigenen Unterstützung nöthig sind, betrachtet werden müssen.

Um dieser Lehre für die Anwendung die möglichste Freiheit zu geben, werden wir die sich berührenden Körper ohne Verbindungsmittel und ohne Reibung, also vollkommen verschiebbar annehmen und bei denselben nur Unzusammendrückbarkeit der Materie (Incompressibilität) voraussetzen, damit auf solche Art allen Theilen die möglichste Beweglichkeit gelassen, und wenn diese durch die wechselseitige Stellung unmöglich gemacht wird, das Gebäude durch hinzukommende Verbindungsmittel eine um so grössere Festigkeit erhalten möge. Die Nothwendigkeit dieser Bedingniss leuchtet um so mehr ein, als die Risse, die sich vorzüglich an alten Gebäuden vorfinden, den vollständigsten Beweis geben, wie sehr es nothwendig sey, sich nicht auf die Bindungskraft des Mörtels zu verlassen.

§. 351.

Wird ein prismatischer Balken oder Stein A B mit seinen Enden auf zwei Unterlagen C und D gelegt, so wird jede derselben mit seinem halben Gewichte gedrückt, wie es aus der frühern Theorie bekannt ist und wie sich mit folgendem Versuche sehr leicht darthun lässt. Werden nämlich an beiden Enden A und B in der Mitte des Prisma A B Schnüre befestigt, diese über Rollen gezogen, und die Gewichte P, R angehängt, deren jedes halb so schwer ist, als das Prisma, so bleibt alles im Gleichgewichte, der Balken mag wagerecht, Fig. 5. oder schief Fig. 6. aufgehängt werden, vorausgesetzt, dass der Balken frei hängt, dass die Seile parallel ziehen und ihre Schwere nicht in Betrachtung kommt. Fig. 4. Tab. 17. Fig. 5 u. 6.

Lehnen wir diesen Balken an eine senkrechte Fläche A Z, z. B. an eine glatte Mauer, so müssen seine Enden durch zwei, sowohl dem Gewichte als der Richtung nach gleiche Kräfte, womit sie früher von den Seilen gezogen wurden, unterstützt werden. Wir wollen diese Kräfte oder die halben Lasten des Balkens durch zwei gleiche senkrechte Linien A E und B F vorstellen. Die Richtung der Kraft A E ist zur Mauer parallel, sie kann also von derselben nicht erhalten werden; wir zerlegen daher diese Kraft in die auf A Z senkrechte A G und in die nach der schiefen Richtung des Balkens wirkende A H, wie es das Kräftenparallelogramm zeigt. Fig. 7.

Die Kraft A G wirkt winkelrecht auf die Mauer und muss von ihr ganz erhalten oder durch eine in derselben horizontalen Richtung entgegen wirkende gleiche Kraft gestützt werden; die zweite Kraft A H wirkt aber in der Richtung des Balkens und drückt ihn nach dieser Richtung in B gegen seine Unterstützung. Wir haben also unten in B den schiefen Druck B J = A H, und den senkrechten B F, welche bei ihrer Zusammensetzung durch das Parallelogramm B J K F die mittlere Kraft B K geben. Diese gibt uns sowohl die Grösse, als die Richtung des Druckes an, womit der Balken gegen seine Unterlage B wirkt. Soll demnach der Balken in seiner schiefen Lage A B erhalten werden, so muss der Stützpunkt B diesen Druck aushalten.

Fig. 7. Tab. 17. Zerlegen wir B K durch das Kräftenparallelogramm B L K M in B L und B M, so sieht man leicht, dass die Dreiecke B J L und A E G kongruent sind. Hieraus folgt der horizontale Druck B L = A G, welcher daher am obern und untern Ende des Balkens gleich gross ist. Der vertikale Druck ist J L = A E = B F = J K = F M; demnach ist der gesammte vertikale Druck am untern Ende des Balkens B M = B F + F M = 2 B F = G = dem Gewichte des ganzen Balkens. Wir sehen hieraus, dass durch die schiefe Stellung eines Balkens nebst seinem ganzen Gewichte G noch eine horizontale Kraft oder Druck in B entsteht; dieser Druck muss nebst G gleichfalls noch gestützt werden.

Lehnt man statt der festen Fläche oder Mauer A Z von der andern Seite einen gleichen Balken A b unter gleichem Winkel A b Z = A B Z entgegen, und zerlegt die Kraft A e = A E auf gleiche Art in eine horizontale A g und eine schiefe A h, so wird man A g = A G und A h = A H finden und überhaupt muss, was von einer Seite angeführt wird, auch von der andern gelten, denn bei dem Balken A b sind genau dieselben Umstände, wie bei dem Balken A B vorausgesetzt. Weil nun die Kräfte A g und A G einander gleich und entgegengesetzt sind, sich also aufheben, so muss, wenn die Punkte B und b gehörig unterstützt werden, das Gleichgewicht eben so, wie vorher bestehen. Da die Form B A b jene der gemeinen Dächer ist, so sehen wir, dass der Druck, womit diese Dächer auf ihre Widerlagen drücken, immer aus zweien zusammengesetzt ist, wovon einer (B M = b m) senkrecht wirkt, und der Last von einer Seite des Daches gleich ist, der andere aber (B L = b l) wagerecht wirkt.

§. 352.

Wir werden in der Folge sehen, dass es auf die Berechnung des horizontalen Druckes bei allen schiefen Stellungen der Gebäudetheile, nämlich bei Dachgehölzen, Gewölben etc. vorzüglich ankommt. Wir wollen daher die verschiedenen Ausdrücke angeben, nach welchen der horizontale Druck sich berechnen lässt.

Fig. 7. 1tens. Bezeichnen wir die Höhe A Z mit h und die Basis B Z mit b, so gibt die Aehnlichkeit der Dreiecke A H E und A B Z die Proportion H E : A E = B Z : A Z = b : h; also ist der wagerechte Druck $HE = \frac{AE.b}{h} = \frac{G.b}{2h}$.

2tens. Bezeichnen wir den Winkel, den die Richtung des Balkens mit der Horizontallinie macht, A B Z mit w, so ist auch der Winkel A H E = w und H E : A E = 1 : tang w, also der wagerechte Druck $HE = \frac{AE}{\text{tang } w} = \frac{G}{2 \text{ tang } w}$.

3tens. Ziehen wir aus der Mitte U der Balkenlänge A B das Perpendikel U V, bis es die Vertikale des Scheitels A schneidet, so ist auch das Dreieck A U V dem Dreiecke A H E ähnlich und $HE : AE = UV : UA = UV : \frac{AB}{2}$, mithin der wagerechte Druck $HE = \frac{2AE.UV}{AB} = \frac{G.UV}{l}$.

4tens. Betrachtet man endlich zugleich auch den zweiten entgegenstehenden Balken Ab, und errichtet in seiner Mitte u auf dieselbe Art, wie bei AB das Perpendikel uV, so wird dieses die Senkellinie AZ vom Scheitel A herab in demselben Punkte V treffen. Da auf diese Art in der Mitte der Linien AB und Ab die Perpendikel UV und u V errichtet sind, so lässt sich, den Grundsätzen der Geometrie zu Folge, aus dem Punkte V, als aus dem Mittelpunkte, mit dem Halbmesser A V ein Kreis beschreiben, der durch die Endpunkte B, A und b der sich stützenden zwei Balken geht. Fig. 7. Tab. 17.

Aus diesen Berechnungen ersehen wir, dass bei einem schiefgestellten Balken der horizontale Druck sich zum halben Gewichte des Balkens verhalte, entweder,

1tens, wie die Basis zur Höhe, an welchen der Balken angelehnt ist, oder

2tens, wie die Einheit zur Tangente des Neigungswinkels, welchen der schiefe Balken mit dem Horizonte bildet, oder

3tens, wie das Perpendikel UV, welches aus der Mitte des Balkens bis zur Senkellinie vom obern Ende des Balkens gezogen wird, zur halben Länge des Balkens, oder

4tens, wie der Halbmesser des Kreises, welcher sich durch die Punkte B, A, b ziehen lässt, zur halben Länge des Balkens.

Wir sehen hieraus, dass der wagerechte Druck nicht nur mit dem Gewichte des Balkens wächst, sondern dass er auch von der Stellung der zu stützenden Körper abhängt und in dieser Hinsicht um so grösser sey, je kleiner die Höhe h gegen die Basis b ist, je kleiner der Winkel w, je grösser das Perpendikel U V und der Halbmesser des Kreises durch die Punkte B, A, b ist. Der horizontale Druck ist am grössten, wenn $h = 0$ oder $w = 0$, oder wenn U V unendlich gross ist; wenn daher zwei Balken in horizontaler Lage gegen einander gestützt werden sollen, so ist gar keine Kraft im Stande, sie in dieser Stellung zu erhalten. Für $w = 90$ Grad, wenn der Balken lothrecht aufgestellt wird, verschwindet der horizontale Druck ganz, weil der Balken bloss in der lothrechten Richtung drückt, sich selbst stützt und weder oben noch unten, demnach von keiner Seite eine Stützung bedarf.

§. 353.

Der Ausdruck für den wagerechten Druck, wie er im vorigen §. Nr. 3 aufgestellt wurde, lässt sich noch in eine für die Anwendung bequemere Form bringen, wenn man das darin vorkommende Gewicht G des Körpers mittelst seines kubischen Inhaltes ausdrückt. Setzen wir nämlich seine Querschnittsfläche $= f$, seine Länge $AB = l$, und das Gewicht der kubischen Einheit von seiner Materie $= g$, so ist das Gewicht des prismatischen Körpers AB, nämlich $G = g.f.l$ und daher der wagerechte Druck $H = \frac{G.UV}{l} = g.f.UV$. Der wagerechte Druck eines schiefstehenden Balkens ist daher im Zustande des Gleichgewichtes eben so gross, als das Gewicht eines Prisma von der Materie und der Querschnittsfläche des gestützten Körpers, dessen Länge aber die Linie UV oder das aus der Mit-

te des Balkens bis zum Durchschnitte mit der, vom obern Ende des Balkens gezogenen Senkellinie errichtete Perpendikel ist.

§. 354.

Fig. 8. Tab. 17. Wenn Gewölbsteine nach einer krummen Linie gegen einander gestellt sind, so wird der horizontale Druck auf gleiche Art aus der Stellung und dem Gewichte der obersten zwei Gewölbssteine Am und An bestimmt. Da jedoch diese Gewölbssteine als ein sehr kleiner Theil einer krummen Linie nicht wohl messbar sind, so ist es vortheilhaft für diesen Fall die Perpendikel UV, uV in Rechnung zu nehmen, welche hier in den Krümmungshalbmesser übergehen. Der horizonle Druck, welcher oben bei dem Schlussteine statt findet, ist daher eben so gross, als das Gewicht eines Prisma, welches die Grösse des Krümmungshalbmessers zur Länge, die Querschnittsfläche der Gewölbssteine im Scheitel zur Grundfläche und übrigens dieselbe spezifische Schwere wie die Gewölbssteine hat.

§. 355.

Wir haben nun noch über die Richtung und Grösse der Kräfte, welche der schiefgestellte Balken an seinem untern Ende gegen die horizontale Linie ausübt, folgendes zu bemerken. Die Grösse und Richtung dieses Druckes gibt die Diagonale BK an, und es ist in dem Dreiecke BKM offenbar $BK^2 = BM^2 + MK^2$ oder wenn wir statt der Linien die Kräfte setzen, und den schiefen Druck BK mit T, den horizontalen MK = HE mit H, und den vertikalen BM oder das Gewicht des ganzen Körpers, wie vorher, mit G bezeichnen, $T = \sqrt{(G^2 + H^2)}$.

Fig. 7.

Die Richtung BK dieses mittlern Druckes lässt sich ebenfalls aus dem Kräftenparallelogramme BLKM finden; es bildet nämlich BK mit der Horizontalen KM den Winkel BKM, und es ist in dem Dreiecke BMK offenbar

$\tang BKM = \frac{BM}{KM} = \frac{G}{H}$. Nun ist aber nach 1) des §. 352 der horizontale Druck $H = \frac{G.b}{2h}$, daher auch $\tang BKM = \frac{2h}{b}$.

Auch ist der horizontale Druck nach 2) dieses §. 352 $= \frac{G}{2 \tang w}$, daher auch $\tang BKM = 2 \tang w$, d. h. die Richtung des mittlern Druckes oder der Winkel, welchen diese Richtung mit der Horizontalen bildet, ist so beschaffen, dass seine Tangente doppelt so gross ist, als die Tangente des Winkels, welchen der Balken mit dem Horizonte bildet.

Fig. 9. Die letztere dieser Gleichungen gibt zugleich eine leichte Verzeichnungsart zur Auffindung der Richtung des mittlern Druckes BK, womit der Balken seine Unterlage B drückt. Verlängert man nämlich die Höhenlinie ZA nach oben, trägt auf die Verlängerung aus dem Punkte A die Länge AX so gross als die Höhe

A Z auf, und verbindet endlich die Punkte B und X miteinander, so gibt diese Linie die Richtung des mittlern Druckes am untern Ende des Balkens gegen seine Stützen.

§. 356.

Bei allen Gebäuden ist der wagerechte Druck H der gefährlichste, weil er unmittelbar, wo er vorhanden ist, die Mauern umzustürzen strebt, der senkrechte dagegen die Mauern nur nach der Richtung der Schwere belastet, und hiedurch ihre Stabilität vermehrt, mithin vortheilhaft einwirkt, vorausgesetzt, dass er nicht so gross wird, die rückwirkende Festigkeit des Materials, aus welchem die Mauer besteht, vernichten zu können, was bei der Grösse der rückwirkenden Festigkeit in den wenigsten Fällen zu besorgen ist.

Es wird daher darauf ankommen, den horizontalen Druck H in jedem Falle möglichst zu vermindern. Sein kleinster Werth ist $H = 0$, dieser kann aber nie statt finden, weil für $w = 90$ Grad die Dachfläche über den Mauern lothrecht und nicht schief aufgerichtet seyn müsste, wo es natürlich aufhören würde, ein Dach zu seyn. In dieser Hinsicht wären daher höhere Dächer vortheilhafter als niedere, allein wegen ihrer grössern Kostspieligkeit baut man die Dächer nicht höher als es dem Klima angemessen ist, und begegnet dem üblen Einflusse des gefährlichen Seitenschubes dadurch, dass man die Sparren a m, welche die ganze Last des Daches tragen, mit ihren untern Enden m, an welchen der horizontale Druck sich äussert, und auf den Umsturz der Seitenmauern wirken würde, in eigends unterlegte Balken b (Bundtrame) stützt oder befestigt, welche durch ihre absolute Festigkeit den Seitenschub halten, und ihn auf diese Art für die Mauern unschädlich machen. Fig. 11. Tab. 17.

§. 357.

Zu Versuchen über die Grösse des horizontalen Druckes dient der Apparat Fig. 10. Seine Einrichtung ist aus der Zeichnung genau ersichtlich; wir bemerken daher nur, dass die Sparren A B, A b unter einander in A und mit den beweglichen Säulen B C, b c durch Scharniere verbunden sind, und dass zur Vermeidung der Reibung die Achsen dieser Scharniere sehr schwach seyn müssen. Fig. 10.

Vor dem Versuche werden beide Sparren abgewogen. Bilden sodann die Sparren im Scheitel A einen rechten Winkel mit einander, so ist das angehängte Gewicht Q dem halben Gewichte beider Sparren gleich.

Werden aber die beweglichen Säulen B C, b c näher und zwar so gestellt, bis die vertikale Höhe der Sparren der ganzen Breite B b gleich ist, so ist der horizontale Druck oder das Gewicht Q dem vierten Theile des Gewichtes beider Sparren gleich.

§. 358.

Beispiel. Über einem Gebäude, welches 13 Klafter lang und 4 Klafter breit ist, soll ein Pultdach aufgerichtet und diess an eine darneben stehende Mauer angelehnt werden, dessen Höhe $h = 3$ Klafter, und die Breite $b = 4$ Klafter ist. Es fragt sich, welchen Seitenschub werden die Sparren im First des Daches und an den Bundtramen äussern, und wie gross ist der mittlere Druck, mit welchem die Sparren ihre Unterlagen drücken. Fig. 11.

Fig. 11. Tab. 17. Zur Beantwortung dieser Frage ist es nöthig, vorerst das Gewicht des Daches auszumitteln.

Das Dach werde mit Taschen von 17 Zoll Länge doppelt eingedeckt. Die Latten kommen in diesem Falle 8 Zoll von einander entfernt, und eine Quadratklafter Dachfläche braucht $\frac{72}{8} = 9$ Latten, jede zu 1 Klafter Länge, mithin 9 Kurrentklafter Latten. Sind die Latten 2 Zoll im Gevierte dick und wiegt 1 Kubikfuss des Holzes $\frac{1}{3}$ Zentner, so ist das Gewicht der Latten für eine Quadratklafter Dachfläche $\frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ Zentner.

In jede Reihe kommen 12 Stück 6 Zoll breite Taschen, folglich in 9 Reihen 108 Stück; wiegt nun jede 5 ℔, so ist 540 ℔ oder 5,4 Zentner das Gewicht der Taschen. Mithin wiegt eine Quadrat-Klafter Dachdeckung sammt der Belattung $0{,}5 + 5{,}4 = 5{,}9$ Zentner.

Die Länge eines Sparrens ist $\sqrt{(b^2 + h^2)} = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ Klafter. Die Querschnittsfläche der Sparren ist gewöhnlich ein Rechteck von 6 Zoll und 7 Zoll und daher, wenn 1 Kubikfuss des Holzes zu $\frac{1}{3}$ Zentner angenommen wird, das Gewicht eines Sparrens $\frac{6}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 2{,}9$ Zentner beinahe. Werden die Sparren 4 Fuss von einander entfernt gelegt, so hat ein jeder Sparren $30 \cdot 4 = 120$ Quad. Fuss oder $3\frac{1}{3}$ Quadratklafter Dacheindeckung zu tragen, welche für jede Quad. Klafter zu 5,9 Zentner gerechnet, sehr nahe 19,7 Zentner wiegt. Mithin beträgt das Gewicht eines Sparrens sammt der zugehörigen Belastung, 2,9 Zentner das Gewicht des Sparrenholzes und 19,7 Zentner das Gewicht der zugehörigen Eindeckung, oder zusammen 22,6 Zentner.

Nach §. 352 1tens ist der horizontale Schub $H = \frac{G \cdot b}{2h}$ gefunden worden. In unserem Beispiele ist G das Gesammtgewicht des Sparrens und der Belastung also 22,6 Zentner und $\frac{b}{h} = \frac{4}{3}$; mithin der von jedem Dachsparren im First und an den Bundtramen geäusserte **horizontale Schub** $= \frac{22{,}6}{2} \cdot \frac{4}{3}$ oder $15\frac{1}{15}$ Zentner.

Es muss daher der untere Zapfen an jedem Sparren und das belassene Holz ausser dem Zapfenloche eines jeden Bundtrames so stark seyn, dass beide eine dabei angebrachte horizontale Kraft von $15\frac{1}{15}$ Zentner mit hinreichender Sicherheit zu tragen im Stande sind.

Der Sparren äussert weiter am untern Ende nach §. 351 einen **lothrechten Druck**, der dem ganzen Gewichte des Sparrens sammt Belastung oder 22,6 Zentner gleich ist.

Der **mittlere schiefe Druck** am untern Ende des Sparrens ist endlich nach §. 355 $= \sqrt{(H^2 + G^2)} = \sqrt{(15\frac{1}{15}{}^2 + 22{,}6^2)} = \sqrt{737{,}7644} = 27{,}16$ Zentner; und seine Richtung wird gefunden, wenn bei der gegebenen Basis 4 Klafter die doppelte Höhe 2mal 3 = 6 Klafter aufgetragen, und die Hypothenuse gezogen wird. Die Rechnung gibt für den Winkel, welchen die Dachfläche mit dem Horizonte bildet,

$\tan w = \frac{h}{b} = \frac{3}{4}$, woraus der Winkel $w = 36^\circ\, 52'$ folgt. Für die Richtung des

mittlern Druckes ist die Tangente $w' = \frac{2h}{b}$ oder 2 tang w = 1,5, woraus der Winkel, welchen diese Richtung mit dem Horizonte bildet, sehr nahe 56° 19′ folgt. Fig. 11. Tab. 17.

Ein Pultdach, das nicht an eine nebenstehende Mauer gelehnt, sondern für sich frei aufgestellt wird, fordert zur Unterstützung des Druckes bei a Stuhlsäulen, welche die halbe Last des Daches zu tragen haben, wobei demnach der horizontale Druck von selbst wegfällt.

§. 359.

Wird die Länge freiliegender Balken bei einem Baue so gross, dass man ihnen nebst ihrem eigenen Gewichte noch anderweitige Lasten nicht mit Sicherheit anvertrauen kann, so müssen sie zwischen ihren beiden Auflagen noch unterstützt werden. Ist diese Unterstützung vom Grunde auf und überhaupt unterhalb nicht möglich, so wendet man zu ihrer Unterstützung oberhalb eine künstliche Werkverbindung an, die man in der Baukunst unter den Namen der Hängwerke begreift. Bei dem einfachen Hängwerke werden, wie es Fig. 12 zeigt, die ober dem Bundtrame AB befindlichen Sparren oder Streben AC, BC an ihrem obern Ende nicht unmittelbar mit einander vereinigt, sondern es wird zwischen beide mittelst einer eigenen Verschneidung eine senkrechte Säule CD (die Hängsäule) eingelegt, die nahe bis an den Bundtram reicht, und unten mit letzterem durch eiserne Bänder und Schrauben verbunden wird. Um mit einer Hängsäule zugleich mehrere Bundtrame zu halten, wird unterhalb dessen ein Unterzugbalken d angebracht, welcher in die Bänder der Hängsäule eingelegt wird u. s. w. Fig. 12.

Wir wollen nun zur Berechnung eines solchen einfachen Hängwerkes schreiten.

Es sey die gesammte von der Hängsäule zu tragende Last = Q, ferner sey das Gewicht der Stuhlsäule oder des Sparrens sammt der darauf liegenden Belastung = P.

In dem Punkte C wirkt die Belastung der Hängsäule Q, dann nach §. 351 das halbe Gewicht von dem Sparren $AC = \frac{P}{2}$ und das halbe Gewicht von dem Sparren $BC = \frac{P}{2}$; also zusammen Q + P herab, welches nur in den Richtungen der Sparren AC und BC durch die rückwirkende Festigkeit derselben gehalten werden kann. Nehmen wir daher Co = Q + P, ziehen in der Richtung der Sparren Cp und Cq die Richtungen der Seitenkräfte und bilden aus o das Kräftenparallelogramm Cpoq, so stellen Cp und Cq zugleich die Grösse der Kräfte vor, mit welchen die Belastung in C die Sparren auf die Stützpunkte A und B drückt. Ist AC = CB, so ist auch Cp = Cq. In A und B sind also die gleichen Kräfte Ar = Cp und Bs = Cq wirksam; zerlegen wir jede dieser Kräfte in die Horizontalen At, Bw und die Vertikalen Au, Bv, so ist das Dreieck Aru dem Dreiecke ADC ähnlich, und es ist Au : ru = CD : AD (I).

Um den senkrechten Druck Au zu bestimmen, ziehe man aus p auf Co die winkelrechte pK, so ist CK = Ko = ½ Co und weil das Dreieck Aru dem Dreiecke CpK

Fig. 12. Tab. 17. gleich und ähnlich ist, auch $Au = CK$, also auch $Au = \frac{1}{2} Co = \frac{1}{2}(Q + P)$. Bezeichnen wir den horizontalen Druck At mit H, die halbe Länge des Hängwerkes AD mit b und dessen Höhe CD mit h, so ist nach (I) auch $\frac{1}{2}(Q + P) : H = h : b$; daraus folgt $H = \frac{1}{2}\left(Q + P\right)\frac{b}{h}$. Der fortgepflanzte vertikale Druck Au ist $\frac{1}{2}(Q + P)$ hiezu kommt noch nach §. 351 der unmittelbare von AC mit $\frac{1}{2} P$, mithin ist der gesammte senkrechte Druck in A eben so wie in $B = P + \frac{1}{2} Q$.

Für den Punkt B sind die Drücke $Bw = At = H$ und $Bv = Au = \frac{1}{2}(Q + P)$, wie in A, also auch in B der gesammte vertikale Druck $P + \frac{1}{2} Q$. Vergleichen wir diese Resultate mit jenen der §. 351 und 352, so sehen wir, dass sie genau dieselbe Form haben, und nur darin verschieden sind, dass jede hier berechnete Kraft durch das halbe hinzugekommene Gewicht Q vergrössert ist. Alle im §. 352 angeführten Bemerkungen finden daher auch hier ihren Platz. Diese einfachen Hängwerke werden häufig bei Dachungen, seltener bei Brücken gebraucht.

§. 360.

Beispiel. Der Dachraum eines Gebäudes, dessen Breite 6 Klafter und dessen Länge $13\frac{1}{3}$ Klafter ist, soll zur Aufbewahrung von Getreidevorräthen benützt werden; wenn nun der grössern Breite und der Belastung wegen der Dachstuhl mit Hängwerken so verstärkt werden soll, dass zwischen je 2 Hängwerken immer 3 leere Gesperre liegen, wenn ferner jede Hängsäule 15 Zoll im Gevierten hat, die Getreideschüttung 18 Zoll hoch ist, und drei 3 Fuss breite Gänge der Länge nach, 4 eben solche der Breite nach gelassen werden, und die Dachung ein gleichseitiges Dreieck bildet; so fragt sich, wie viel jeder Sparren und jede Hängsäule zu tragen haben, und welchen horizontalen Schub der Bundtram erfährt?

I. Die Länge eines Sparrens ist 6 Klafter, daher die Dachfläche $13\frac{1}{3} \cdot 6 = 80$ Quad. Klafter, welche nach §. 358. jede Quad. Klafter zu 6 Zentner berechnet, das Gewicht der Eindeckung für eine Dachseite mit 480 Zentner geben. Sind die Sparren 8 Zoll im Gevierten, so ist das Gewicht eines Sparrens $= \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ Zentner, und weil das Gebäude auf 4 Fuss Entfernung einen Sparren, also zusammen $\frac{40 \cdot 6}{3 \cdot 4} + 1 = 21$ Sparren erhält, das Gewicht aller Sparren $= 21 \cdot \frac{16}{3} = 112$ Zentner. Mithin das Gewicht einer Dachseite 592 Zentner, welches in vorigem §. mit P bezeichnet wurde.

II. Das Gewicht eines Bundtrames ist $\frac{12}{12} \cdot \frac{12}{12} \cdot 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$ Zentner und weil in der Länge des Gebäudes auch 21 sind, das Gewicht aller Bundtrame $= 12 \cdot 21 = 252$ Zentner. Diese tragen zunächst den Dielenboden, welcher bei $13\frac{1}{3}$ Klafter Länge, 6 Klafter Breite und 3 Zoll Dicke $\frac{40}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{3} = 240$ Zentner wiegt.

Die Bodenfläche ist $\frac{40}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 2880$ Quad. Fuss. Hievon 3 Gänge zu 3 Fuss in der Länge mit $3 \cdot 3 \cdot \frac{40}{3} \cdot 6 = 720$ Quad. Fuss, dann 4 Gänge zu 3 Fuss in der Breite mit

$4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 432$ Quad. Fuss, also zusammen 1152 Quad. Fuss von 2880 Quad. Fuss abgeschlagen, gibt die Grundfläche des aufgeschütteten Getreides $= 1728$ Quad. Fuss. Mithin sind $\frac{18}{12} \cdot 1728 = 2592$ Kubikfuss, oder weil 2 Kubikfuss sehr nahe 1 Strich geben, 1296 Strich Getreide aufgeschüttet; wiegt 1 Strich Getreide 1 Zentner, so ist das Gewicht des aufgeschütteten Getreides 1296 Zentner. Die Belastung des Bodenraumes ist daher $252 + 240 + 1296 = 1788$ Zentner. Fig. 12. Tab. 17.

III. Das Gewicht einer Hängsäule ist $\frac{15}{12} \cdot \frac{15}{12} \cdot 31{,}18 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}24$ Zentner, weil die Höhe des Daches $h = \sqrt{(36^2 - 18^2)} = 31{,}18$ Fuss ist. Das Gewicht des Unterzugbalkens, so weit er an einer Hängsäule hängt, nämlich auf $4 \cdot 4 = 16$ Fuss, ist $\frac{12}{12} \cdot \frac{12}{12} \cdot 16 \cdot \frac{1}{3} = 5{,}33$ Zentner, also das Gewicht der Hängsäule sammt Unterzugbalken $= 16{,}24 + 5{,}33 = 21{,}6$ Zentner. Da nun 6 Hängsäulen für die ganze Länge nothwendig werden, so ist ihr Gesammtgewicht $= 129{,}6$ Zentner.

IV. Wir kommen nun zur Bestimmung der Grösse Q. Die Belastung des ganzen Dachraumes mit 1788 Zentner (nach II) kann als gleichförmig vertheilt betrachtet werden, und dann tragen die 21 Bundtrame nach §. 300 die Last $\frac{8\,m \cdot B \cdot H^2}{L} \cdot 21 - G$ (und für $m = 144$) die Last $\frac{8 \cdot 144 \cdot 12 \cdot 12^2}{36 \cdot 12} \cdot 21 - 252 = 716$ Zentner, es bleibt also der Mehrbetrag der Belastung mit 1072 Zentner von den Hängsäulen zu tragen. Dieses Gewicht wird noch durch das Gewicht der Hängsäulen und des Unterzuges (nach III) mit 129,6 Zentner vermehrt, also ist $Q = 1202$ Zentner. P wurde (in I) $= 592$ Zentner gefunden. Für die ganze Länge des Gebäudes ist daher nach dem vorigen §. am untern Ende des Daches der horizontale Schub

$$H = \tfrac{1}{2}\left(P + Q\right)\frac{b}{h} = \tfrac{1}{2}\left(592 + 1202\right)\frac{18}{31{,}2} = 517{,}5$$ Zentner und der senkrechte

$P + \tfrac{1}{2}Q = 592 + 601 = 1193$ Zentner.

V. Weil 21 Sparren vorhanden sind, so hat ein jeder das Gewicht $\frac{P}{21} = \frac{592}{21} = 28{,}2$ zu tragen. Ein Sparren in dem leeren Gesperre übt also den horizontalen Druck $\tfrac{1}{2} \cdot 28{,}2 \cdot \frac{18}{31{,}2} = 8{,}1$ Zentner und den vertikalen $\frac{P}{21} = 28{,}2$ Zent. aus. Und weil 6 Gesperre mit Hängsäulen sind, so trägt jede Hängsäule die Last $\frac{Q}{6} = \frac{1202}{6} = 200{,}3$ Zentner und der Sparren übt den horizontalen Druck $=$ $\frac{1}{2}\left(28{,}2 + 200{,}3\right)\frac{18}{31{,}2} = 65{,}9$ Zentner und den vertikalen $\frac{P}{21} + \frac{Q}{12} = 28{,}2 + 100{,}2 = 128{,}4$ Zentner aus.

§. 361.

Will man bei Brücken von grössern Weiten einfache Hängwerke anwenden, so werden die Sparren, hier Streben genannt, zu lang, und nebstdem der Uiberbau zu

Fig. 13. Tab. 17. zu hoch. Um beide Uibelstände zu beseitigen, gebraucht man zusammengesetzte Hängwerke Fig. 13. mit zwei Hängsäulen C E, D F, welche mit einem Spannriegel C D verbunden, in die Streben D N, C M eingehängt und diese beiderseits in den Bundtram M N, hier Endsbaum genannt, gestützt werden. Die Hängsäulen werden dann wie früher noch mit Unterzugbalken e mittelst Hängeisen verbunden.

Es sey das Gewicht jeder Strebe A, das Gewicht des Spannriegels B und das Gewicht der Hängsäule sammt der getragenen Last Q. In dem Punkte C und eben so in dem Punkte D wirkt offenbar das halbe Gewicht der Strebe M C oder N D $= \frac{A}{2}$, weiter das halbe Gewicht des Spannriegels C D $= \frac{B}{2}$ und endlich das ganze Gewicht der Hängsäule C E oder D F sammt der übrigen angehängten Belastung Q lothrecht herab; es ist also die in C und D lothrecht herabwirkende Kraft $= \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + Q$, die wir indess mit P bezeichnen wollen. In M und N wirkt unmittelbar bloss das halbe Gewicht der Strebe herab, oder der senkrechte Druck ist $= \frac{1}{2} A$.

Es stelle C m = D n die Kraft P vor, welche gestützt werden soll; zerlegen wir C m in C o und C p, und D n in D r und D q durch die Kräftenparallelogramme o C p m und q D r n so sieht man leicht ein, dass C p = D r und eben so C o = D q ist. Die beiden gleichen Kräfte C p und D r liegen in der Richtung des Spannriegels und halten, als gerade entgegengesetzt, einander das Gleichgewicht; die beiden andern C o und D q wirken in der Richtung der Streben und drücken diese mit der Kraft C o oder D q nach ihrer Richtung an die Stützpunkte M und N. Zerlegen wir die in M und N zu stützenden Kräfte, nämlich M s = C o und N t = D q durch das Kräftenparallelogramm v M u s und x N w t, in die Horizontalen M v, N x und in die Senkrechten M u, N w so sieht man sogleich dass das Dreieck M s u kongruent mit C o m, und eben so N w t kongruent mit D n q, und dass sonach an die Stelle des fortgepflanzten schiefen Druckes die senkrechte Kraft M u = C m = D n = N w = P und die horizontale M v = C p = D r = N x wirkend angenommen werden kann. Es ist also in M und N der gesammte senkrechte Druck gleich dem aus der Fortpflanzung entstandenen P mehr dem unmittelbaren der Strebe $\frac{1}{2}$ A, also $P + \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + Q + \frac{1}{2} A = A + \frac{1}{2} B + Q$. Setzen wir den Winkel C M E, welchen die Strebe mit dem Horizonte macht $= w$, oder auch $ME = b$ und $CE = h$, so ist der wagrechte Druck $Mv = H = \frac{P}{\text{tang } w}$ oder auch $= P \cdot \frac{b}{h}$, und für P seinen Werth gesetzt, ist $H = \frac{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + Q}{\text{tang } w} = \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + Q\right) \frac{b}{h}$.

Vergleichen wir diese Resultate mit jenen des §. 352 so sehen wir dasselbe Gesetz und dieselbe Form, und nur die absolute Grösse durch die hinzugekommenen Gewichte B und Q geändert.

§. 362.

Beispiel. Es ist für eine 12 Klafter lange und 4 Klafter breite Brücke, die zu beiden Seiten ein doppeltes Hängwerk erhalten soll, die Zahl und Stärke der Endsbäume, so wie für die grösstmögliche Belastung das von den Hängsäulen getragene

Gewicht, und endlich der horizontale Schub des Hängwerkes an den Spannriegel und an die Widerlagen zu bestimmen. Fig. 13. Tab. 17.

Setzen wir die Hängsäulen so vertheilt, dass $ME = EF = FN = \frac{1}{3} MN =$ 4 Klafter ist, so sind die Endsbäume in den Punkten M, E, F und N unterstützt und jeder Theil der Brücke, wie ME, EF und FN ist in demselben Falle, wie die S. 313 angeführte Brücke. Es werden demnach auch hier die dortigen Abmessungen ihre Anwendung finden. Hiernach sind, derselben Brückenbreite wegen, auch hier 7 Endsbäume von der Stärke 12 Zoll hinreichend und die grösstmögliche Belastung der Brückentheile ME, EF und FN ist auch wie dort $(5600 + 9600 + 900 + 444 + 48000) = 64544$ ℔, wofür wir 646 Zentner nehmen wollen.

Die Belastung auf ME (von 646 Zentner) vertheilt sich auf die beiden Unterstützungspunkte M und E und zwar auf jeden zur Hälfte mit 323 Zentner, dasselbe gilt für EF und FN. Hiernach übernehmen die Hängsäulen in CE die halbe Belastung von ME und die halbe von EF oder $323 + 323 = 646$ Zentner, mithin jede 323 Zentner. Die Belastung der beiden Hängsäulen in DF ist offenbar eben so gross. Es sey ferner die Höhe der Hängsäulen $= h = 6$ Fuss und die Entfernung derselben $ME = EF = FN = \frac{1}{3} MN = 24$ Fuss $= b$, so ist zu Folge des vorigen §. der horizontale Druck, mit welchem der Brustriegel in C und D zusammengedrückt oder die Endsbäume in M und N auseinander gezogen werden,

$H = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + Q\right)\frac{b}{h} = 323 \cdot \frac{24}{6} = 1292$ Zentner, wo offenbar $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + Q = 323$ Zentner gesetzt wurde.

Es müssen daher die Einzapfungen und Verschneidungen der Streben in die Endsbäume in M und N mit solcher Vorsicht und mit solchen Maassen geschehen, dass sowohl die Endsbäume als auch die Streben dieser Kraftäusserung von 1292 Zentner gehörig widerstehen können, und nicht ausreissen oder abgleiten.

Würde die Höhe der Hängsäulen $h = 12$ Fuss angenommen, so ergibt sich der horizontale Druck $= 323 \cdot \frac{24}{12} = 646$ Zentner, und ist also um die Hälfte kleiner. Die Höhe der Hängsäulen muss ein jeder Baumeister in vorkommenden Fällen nach den Regeln der Schicklichkeit oder nach andern Nebenrücksichten zu wählen wissen. Die eben gemachte Rechnung zeigt übrigens augenscheinlich, dass der gefährliche wagerechte Druck in eben dem Maasse vermindert werde, in welchem die Höhe der Hängsäulen vermehrt wird.

§. 363.

Die Hängwerke sind meistens nur bei gedeckten Brücken in Anwendung. Da jedoch diese wegen ihres kostspieligen und schwerfälligen Baues, Beschädigungen durch Sturmwinde und anderen Ungelegenheiten über breite Flüsse nur sehr selten gebaut werden, so zieht man denselben die Sprengwerke vor, weil bei denselben die Stuhlsäulen höher gestellt und vor Regen durch die Brücke selbst grösstentheils geschützt werden.

Ein Sprengwerk Fig. 14 besteht aus zwei Stuhlsäulen AD, A′D′, welche sich in die Durchzugbalken d und d′ stützen, die selbst mit einander durch den Spannriegel DD′ verbunden sind. Fig. 14.

Fig. 14. Tab. 17. Die Figur 14 stellt das Profil vor, in welchen die Durchzugbalken d, d′ nur in ihrer Querschnittsfläche erscheinen, von denen aber zu bemerken ist, dass sie unter der Brücke der ganzen Breite nach durchgehen, und auf solche Art alle darauf liegenden Endsbäume unterstützen.

Der Unterschied zwischen diesem Sprengwerke und dem früher betrachteten Hängwerke besteht hauptsächlich darin, dass die dortigen Hängsäulen ausgelassen, und die unter den Hängsäulen befindlichen Unterzüge unmittelbar in den Stuhl A D D′ A′ eingebunden sind. Die Rechnung ist übrigens der vorigen vollkommen ähnlich.

Als Beispiel wollen wir die Brücke des vorigen §. nochmals, aber unter der Voraussetzung eines Sprengwerkes berechnen. Da die Spannweite 12 Klafter vorausgesetzt wird, so sey jeder Theil, wie $MD = DD' = D'N = \frac{1}{3} MN = 4$ Klafter, wie dort. Und da hier auf gleiche Art die Endsbäume auf die Länge von 4 Klafter frei liegen, und ihre Stärke darnach bestimmt werden muss, so erhalten die Endsbäume nothwendig dieselben Abmessungen, also 12 Zoll im Gevierten. Jeder Theil MD, DD′ oder D′N ist daher mit demselben Gewichte 646 Zentner gleichförmig vertheilt belastet, und der Druck von der überliegenden Brücke ist auf die Durchzugbalken in d und d′ eben auch wie dort 646 Zentner. Werden zur Stützung der Brücke 2 Stuhlsäulen angewendet, so ist der Druck für jeden Stuhl ein Drittheil von 646 Zentner oder $215\frac{1}{3}$ Zentner. Das Gewicht des Spannriegels DD′ ist, wenn zu dem liegenden Stuhle gleich starkes Holz wie zu den Endsbäumen angewendet wird $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 24 = 8$ Zentner.

Wird das Sprengwerk weiter so angeordnet, dass die Stuhlsäule AD mit der Horizontalen AE einen Winkel von 45 Graden bildet, so ist $AM = MD = 4$ Klafter, also die Länge der Stuhlsäule $AD = \sqrt{(MD^2 + AM^2)} = \sqrt{(4^2 + 4^2)} = 4\sqrt{2} = 5{,}66$ Klafter oder 33,96 Fuss und ihr Gewicht $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 33{,}96 = 11{,}32$ Zentner. Das ganze in D und D′ senkrecht herabwirkende Gewicht besteht also in dem halben Gewichte der Stuhlsäule $AD = \frac{1}{2} A = 5{,}7$ Zentner, dann dem halben Gewichte des Spannriegels $DD' = \frac{1}{2} B = 4$ Zentner, und endlich in dem von der Brücke auf den Stuhl in D ausgeübten Drucke $= Q = 215\frac{1}{3}$ Zentner, also zusammen 225 Zentner. Wird dieses vermöge der Gleichung $H = \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + Q\right) \frac{b}{h}$ aus §. 361 noch mit dem Verhältnisse $\frac{b}{h} = \frac{AE}{ED} = \frac{MD}{MA} = \frac{4}{4} = 1$ multiplicirt, so ergibt sich der horizontale Druck $H = 225$ Zentner.

Man sieht aus dem Vergleiche dieser für den horizontalen Druck des Sprengwerkes gefundenen 225 Zentner, mit jenen für das Hängwerk berechneten von 1292 Zentner, dass derselbe bei den Sprengwerken bedeutend kleiner gemacht werden kann, als bei Hängwerken, weil es in den meisten Fällen zulässig seyn wird, die Stuhlsäulen höher zu stellen.

Weil die Stuhlsäulen unter der Brücke angebracht und dem Fuhrwerke nicht hinderlich sind, so kann man ihre Anzahl beliebig vermehren, also den Druck auf mehrere Punkte vertheilen, und für jeden einzelnen verkleinern.

Eine noch vortheilhaftere Construction für Brücken gibt die Verbindung der Hängwerke mit Sprengwerken, wovon wir später handeln werden.

§. 364.

Wir haben die vorigen §§. der Anwendung gewidmet, und wollen itzt zu den theoretischen Betrachtungen wieder zurückkehren. Der Deutlichkeit halber werden wir im Verfolg der weitern Betrachtung alle Balken bloss durch ihre Mittellinie vorstellen.

Der §. 352 lehrte uns, dass ein schiefgestellter schwerer Balken AB Fig. 15 an seinem obern Ende den wagrechten Druck $Aa = H = \frac{\frac{1}{2} A}{\text{tang } w} = \frac{1}{2} A \cdot \frac{b}{h}$, und an seinem untern Ende nebst demselben wagrechten Drucke $Bb = H = \frac{\frac{1}{2} A}{\text{tang } w} = \frac{1}{2} A \cdot \frac{b}{h}$ noch den lothrechten Druck A, der dem ganzen Gewichte des Körpers gleicht, äussere. Diese beiden Kräfte müssen, wenn der Balken in seiner Lage verharren soll, gestützt werden. Fig. 15. Tab. 17.

Soll diess durch einen zweiten Balken BC, dessen Gewicht B ist, geschehen, so wird der Körper BC in seiner schiefen Stellung nach dem bekannten Satze §. 351 an seinen beiden Endpunkten B und C den lothrechten Druck $\frac{1}{2}$ B äussern.

Stellt Bq den von AB herrührenden vertikalen Druck A und qr den neuen durch den Körper BC hinzugekommenen vertikalen Druck $\frac{1}{2}$ B vor, so haben wir durch die Stütze BC in B die Kraft $Bq + qr = Br = A + \frac{1}{2} B$ nach lothrechter Richtung und die Kraft $Bb = H = \frac{A \cdot b}{2h}$ nach wagrechter Richtung zu stützen.

Aus diesen beiden ist die zusammengesetzte mittlere Kraft und Richtung die Diagonale Bb' des Kräftenparallelogramms $bBrb'$. Stellen wir sonach den neuen Balken BC in die Richtung dieser mittlern Kraft Bb', so fällt die Richtung des ganzen Druckes in die Mitte seiner Länge BC, und die Kraft Bb' hat kein Vermögen den Körper nach irgend einer Seite zu verschieben oder um den Punkt C zu drehen; er wird also in der angewiesenen Lage verbleiben, wenn nur noch der Punkt C hinlänglich befestiget wird. Betrachten wir in dem Punkte C zuerst den schiefen Druck $Cc' = Bb'$ und zerlegen diesen durch das Parallelogramm $cCsc'$ in den wagrechten Cc und den lothrechten Cs, so zeigt die Fig. 15 deutlich, dass die Dreiecke $Bb'r$ und $Cc's$ kongruent sind, also auch $Cc = b'r = Bb$ und $Cs = Br$ ist. Es ist aber $Bb = H$, und $Br = A + \frac{1}{2} B$, also auch $Cc = H$ und $Cs = A + \frac{1}{2} B$. Zu dem lothrechten fortgepflanzten Druck $A + \frac{1}{2} B$ in C kommt noch $\frac{1}{2} B$ das halbe eigene Gewicht des Körpers BC hinzu, und der gesammte lothrechte Druck ist also $A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B = A + B$, oder gleich der Summe der Gewichte der beiden übereinander gestellten Balken.

Auf solche Art sehen wir deutlich, dass, wenn zwei Balken so zusammengestellt werden, dass der Druck von den Punkten A, B und C durch die Mitte der Balken AB und BC fortgeleitet wird, am untern Ende bei C sich eine senkrechte Kraft äussere, welche den Gewichten der beiden Balken AB und BC gleich ist, und dass hiezu noch eine horizontale Kraft Cc kommt, welche eben so gross als die Horizontale in A ist.

Die wechselseitige Stellung der Balken AB und BC wird auf folgende Art bestimmt: den Winkel, den der obere Balken AB mit der Horizontalen Be macht, haben

Fig. 15. Tab. 17. wir = w gesetzt und tang w = $\frac{Ap}{a'p} = \frac{\frac{1}{2}A}{H}$ gefunden. Wenn wir auf gleiche Art den Winkel, den der zweite Balken B C mit dem Horizonte C D macht, mit w' bezeichnen, so ist tang w' = $\frac{Br}{b'r} = \frac{A + \frac{1}{2}B}{H}$, folglich tang w : tang w' = ½ A : A + ½ B.

§. 365.

Fig. 16. Der letzte Satz gibt uns ein leichtes Mittel, die Lage der Sparren durch Zeichnung zu finden. Wenn der Winkel A B D, Fig. 16. den der obere Sparren eines gebrochenen Daches mit dem Horizonte macht, bestimmt worden ist, so trage man die Höhe A D aufwärts nach A E, so gibt die Gerade E B die Richtung, nach welcher der obere Balken auf den untern drückt. Ist nun das Gewicht des zweiten Balkens B, so bestimme man die Länge der Linie E F nach der Proportion ½ A : ½ B = A D : E F; trägt man die Linie E F in derselben Linie von E nach F aufwärts, so gibt die Linie B F die Richtung nach welcher der Balken B C aufgestellt werden muss, um mit dem ersten A B im Gleichgewichte zu seyn; denn es ist offenbar der Winkel F B D = F C G, folglich

$$\text{tang } w' = \frac{FD}{BD} = \frac{FE + EA + AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}B + A}{BD}, \text{ oder}$$

$$\text{tang } w : \text{tang } w' = \frac{AD}{DB} : \frac{FD}{DB} = AD : FD = \tfrac{1}{2}A : A + \tfrac{1}{2}B.$$

Sind die Gewichte A und B einander gleich, so sind auch die Linien A D = A E = E F, folglich tang w : tang w' = 1 : 3.

Fig. 17. Eine andere Art die Stellung der zwei gleichen Balken A B und B C für den Fall zu bestimmen, wenn die Höhe A O des Daches der halben Breite des Gebäudes oder A O = C O = $\frac{Cc}{2}$ seyn soll, ist folgende: Man verzeichne über der ganzen Breite C c das gleichseitige Dreieck C M c und durchschneide mit derselben Weite aus A die verlängerte Dachbreite C c in N und n. Zieht man sodann die Linien A N und A n, so geben die Durchschnittspunkte der Linien A N und M C den Punkt B von der einen Seite und eben so von der andern Seite den Punkt b und C B A b c ist die Figur des Daches; denn es ist offenbar der Winkel A B b = A N O = w, welchen der Sparen A B mit dem Horizonte bildet, und der Winkel M C O = N A O = w', welchen der Sparren B C mit dem Horizonte bildet. Es ist aber tang A N O = tang w = $\frac{AO}{NO}$, und tang M C O = tang N A O = tang w' = $\frac{NO}{AO}$, folglich

tang w : tang w' = $\frac{AO}{NO} : \frac{NO}{AO} = AO^2 : NO^2$; ferner ist A O = C O vermöge der Bedingniss der Aufgabe und $NO^2 = AN^2 - AO^2 = Cc^2 - AO^2 = (2CO)^2 - CO^2 = 3AO^2$, also auch tang w : tang w' = $AO^2 : 3AO^2 = 1 : 3$.

Aus dieser Construction ist zugleich zu ersehen, dass der Winkel B C O = 60 Grad ist, weil das Dreieck M C c gleichseitig ist, und der Winkel C M c durch M O in zwei gleiche Theile getheilt, dann wegen des rechten Winkels bei O ist

der Winkel $CMO = 30$ Grad, und weil das Dreieck MCO mit dem Dreiecke NAO congruent ist, so ist auch der Winkel $ANO = ABb = 30$ Grad.

Nach einer dritten Art beschreibe man in diesem Falle aus O mit $CO = AO$ den halben Kreis CAc und theile durch Eintragung des Halbmessers, von C, c und A aus, jeden Quadranten in 3 Theile zu 30 Graden. Wird nun der obere Punkt A mit den beiden untern Theilungspunkten F und f durch die Geraden A F und A f und eben so die Punkte C und c mit den obern Theilungspunkten E und e durch die Linien CE und ce verbunden, so geben die Durchschnitte dieser Linien die Figur des gebrochenen oder sogenannten Mansarddaches CBAbc. Fig. 18. Tab. 17.

Zieht man nämlich noch die Linie Bb, so ist der Winkel $ABb = AFf$, weil aber dieser Winkel an der Peripherie mit seinen 2 Schenkeln den Bogen A f von 60 Graden überspannt, so enthält derselbe 30 Grad, folglich auch der Winkel ABb. Auf gleiche Art überspannen die 2 Seiten B C und C c den Bogen E A e f c von 120 Grad, folglich enthält derselbe als Peripheriewinkel 60 Grad. Diese Figur ist also der obern (Fig. 17) ähnlich und wenn die Breite C c in beiden gleich ist, so ist sie mit ihr auch congruent.

Die Grösse und Richtung des mittlern Druckes auf die Widerlagen ist bekanntlich durch die Diagonale eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt, in welchem die beiden Catheten den wagerechten und den lothrechten Druck vorstellen, d. h. nach Fig. 15 ist

$$Cc' = \sqrt{\left(Cc^2 + Cs^2\right)} = \sqrt{\left\{H^2 + \left(A + B\right)^2\right\}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\frac{1}{2}A}{\text{tang } w}\right) + \left(A + B\right)^2\right\}}.$$

Die Länge der Dachsparren AB und BC lässt sich zwar nach der Verzeichnung mit Hilfe des Maasstabes bestimmen, da aber bei breitern Gebäuden die Zeichnung auf dem Bauplatze Schwierigkeiten unterliegt, so dürfte es nicht überflüssig seyn, die Länge der Dachsparren A B und BC durch Rechnung zu finden.

Da die Bögen CF, FE, EA einander gleich sind, und jeder 30 Grad hat, so ist der Winkel E F B gleich dem Winkel $BEF = 15$ Grad, mithin das Dreieck gleichschenklich und $BE = FB$; da aber auch $AF = EC$ ist, so ist auch $AB = BC$. Fig. 18.

Im Dreiecke ABd ist $Ad = AB \,.\, \text{Sin}\, 30$, und im Dreiecke BCa ist $Ba = BC \,.\, \text{Cos}\, 30$, daher ist $Ad + Ba = AO = AB \,.\, \text{Sin}\, 30 + BC \,.\, \text{Cos}\, 30 = AB\, (\text{Sin}\, 30 + \text{Cos}\, 30)$. Setzt man die Breite des Daches $Cc = b$, so ist $AB = \frac{b}{2\,(\text{Sin}\, 30 + \text{Cos}\, 30)} = \frac{b}{2\,(0{,}5 + 0{,}866)} = \frac{b}{2{,}732}$; d. h. **man findet die Länge der Sparren, wenn man die Breite des Daches durch 2,732 dividirt.**

Beispiel. Wenn die Breite des Gebäudes, über welches ein Mansarddach zu errichten ist, 5 Klafter beträgt, und es auf die oben beschriebene Art construirt werden soll, so ergibt sich die Länge der Sparren zwar aus der Zeichnung von selbst, wornach nun auch das Gewicht jeder Dachseite berechnet werden kann; der senkrechte Druck auf die Widerlagsmauern ist demnach gleich dem Gewichte der zwei angehörigen Dachflächen, und der horizontale Druck ist gleich dem halben Gewichte **einer** Dachfläche $\frac{1}{2}A$ dividirt durch die Tangente von 30 Graden, oder multiplicirt mit der Cotang 30 Graden $= 1{,}732$ d. i. $0{,}866\, A$, woraus man den Druck an die Widerlagen ohne Anstand berechnen kann.

§. 366.

In den vorigen Paragraphen wurden die Bedingnisse angegeben, unter welchen zwei schwere schiefgestellte Balken sich stützen, und unter einander das Gleichgewicht halten; es ist nun noch übrig, das Gesetz zu bestimmen, nach welchem mehrere solche prismatische Körper (Balken oder Steine) in schiefer Richtung auf einander gestellt werden können, wenn sie sich das Gleichgewicht halten sollen.

Fig. 1. Tab. 18. Ist nämlich der Stellungswinkel des ersten Prisma zum Horizonte, c b a $= \alpha$, dessen Gewicht $=$ A, so wirkt nach §. 351 sowohl in c als auch in b der Druck $\frac{A}{2}$ senkrecht herab. Da dieser senkrechte Druck in c nach seiner Richtung c a keine Unterstützung findet, so trage man denselben $=$ c d auf; er zerlegt sich nun in einen horizontalen c f $=$ H und in einen schiefen c e nach der Richtung des Prisma, und es verhält sich $H : \frac{A}{2} = 1 : \text{tang}\,\alpha$, folglich ist $\text{tang}\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}A}{H}$ (I).

Der horizontale Druck c f $=$ H drückt in c an irgend einen Körper, an welchen das Prisma gelehnt ist, und dieser muss mit seiner Stabilität diesem Drucke widerstehen; der schiefe Druck c e hingegen wirkt in der Richtung des Prisma c b fortlaufend. Trägt man daher auf die Verlängerung des Prisma den schiefen Druck von b nach g auf und zerlegt selben in einen horizontalen und senkrechten, so ist nach Ergänzung des Parallelogramms, da das Dreieck b g h mit dem Dreiecke c d f congruent ist, b h $=$ c f $=$ H und g h $=$ c d $= \frac{1}{2}$ A d. h. am Endpunkte des ersten Prisma findet derselbe horizontale Druck statt, wie oben. Da aber bereits bemerkt wurde, dass in b noch das Gewicht der zweiten Hälfte $\frac{1}{2}$ A des ersten Prisma wirke, so ist der gesammte senkrechte Druck in b $=$ A. Soll nun dieses erste Prisma durch ein zweites, dessen Gewicht B ist, gehörig unterstützt werden, so findet im Punkte b, da noch die Hälfte des Gewichtes des zweiten Prisma $\frac{1}{2}$ B senkrecht herabwirkt, der senkrechte Druck $A + \frac{1}{2} B$ und der horizontale Druck H statt. Wird nun dieses zweite Prisma so gestellt, dass es den ganzen Druck des obern und zugleich die Hälfte seines eigenen Gewichtes am obern Ende gehörig aufnimmt, und trägt man den Druck $A + \frac{1}{2} B =$ b i senkrecht unter b dann den Druck H $=$ b h auf, so wird nach Ergänzung des Parallelogramms die Diagonale b l die Stellung des zweiten Prisma angeben, und es verhält sich $H : A + \frac{1}{2} B = 1 : \text{tang}\,\beta$, folglich ist $\text{tang}\,\beta = \frac{A + \frac{1}{2} B}{H}$ (II).

Der mittlere Druck wirkt ebenfalls in der Verlängerung des zweiten Prisma und behält am Ende desselben die gleiche Grösse. Trägt man sich daher diesen Druck b l am untern Ende $=$ m n auf, und zerlegt ihn wie oben in einen horizontalen und senkrechten, so findet hier ebenfalls, der Congruenz der Dreiecke zu Folge, in m derselbe horizontale und senkrechte Druck statt, welcher in b statt fand. Da aber in m noch die zweite Hälfte des Gewichtes vom zweiten Prisma oder $\frac{1}{2}$ B und das halbe Gewicht des dritten Prisma $\frac{1}{2}$ C senkrecht herab wirkt, so ist der gesammte senkrechte Druck in m $= A + B + \frac{1}{2} C$ und der horizontale $=$ H. Ergänzt man das Parallelogramm und zieht die Diagonale m o, so erhält man die Grösse des mittlern Dru-

ckes, wie auch die Richtung des dritten Prisma, wenn selbes alle Drücke aufnehmen und ihnen das Gleichgewicht halten soll, und es verhält sich $H : A + B + \frac{1}{2}C = 1 : \text{tang}\ \gamma$ und $\text{tang}\ \gamma = \frac{A + B + \frac{1}{2}C}{H}$ (III). Eben so ist für das unterste Prisma Fig. 1. Tab. 18.

$$\text{tang}\ w = \frac{A + B + C + D \ldots + \frac{1}{2}Z}{H} \quad \text{(IV)}.$$

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass, wenn mehrere auf einander gestellte schiefe Prismen sich das Gleichgewicht halten sollen, der horizontale Druck in allen Winkelpunkten derselbe sey, wie am obersten Punkte c, der senkrechte Druck am Ende jedes Prisma aber aus dem Gewichte aller vorhergehenden Prismen bestehe. Um das Verhältniss der Stellungswinkel zu finden, setze man die Gleichungen I, II, III und IV in eine Proportion, so ist $\text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\beta : \text{tang}\,\gamma \ldots : \text{tang}\,\omega = \frac{1}{2}A : A + \frac{1}{2}B : A + B + \frac{1}{2}C \ldots : A + B + C + D \ldots + \frac{1}{2}Z$ d. h. die Tangenten der Stellungswinkel mehrerer unter einander schief gestellter Prismen verhalten sich, wie die Gewichte aller darüber gestellter Prismen bis zur Mitte desjenigen, dessen Stellung gesucht wird.

§. 367.

Aus dem bereits Angeführten lässt sich überhaupt sowohl die Stellung als auch der Druck, den mehrere über einander gestellte Prismen ausüben, durch eine Zeichnung darstellen.

Wenn die Länge des ersten Prisma und eben so der Winkel $abc = \alpha$, unter welchem dasselbe mit dem Horizonte gestellt ist, gegeben sind, so kann man sich unter der Linie ac das Gewicht $\frac{1}{2}A$ vorstellen. Macht man $ac = ad$, so stellt cd das Gewicht A vor. Um die Grösse der Linien zu finden, welche durch die Gewichte B, C, D Z vorgestellt werden, verhält sich $A : B = cd : de$ und $de = \frac{cd.B}{A}$. Eben so verhält sich $A : C = cd : ef$, woraus $ef = \frac{cd.C}{A}$; ferner ist $fg = \frac{cd.D}{A}$ u. s. w. Werden nun diese Linien de, ef, fg über einander aufgetragen, und halbirt, die Mittelpunkte h, i, k mit dem Punkte b verbunden, so erhält man für das erste Prisma den Stellungswinkel abc, für das zweite Prisma hbc, für das dritte Prisma ibc u. s. w. Die Stellung des zweiten Prisma liegt nämlich in der Verlängerung von hb; für die Stellung des dritten Prisma zieht man aus dem Endpunkte l des zweiten zu ib die Parallele lm u. s. w. Fig. 2.

Um übrigens den Druck zu finden, welcher am Endpunkte eines jeden Prisma gegen das folgende statt findet, verbinde man die Punkte d, e, f, g, ... mit b, so gibt db die Richtung des Druckes an, in welcher das erste Prisma gegen das zweite drückt, und der gesammte Druck ist $= \sqrt{(H^2 + A^2)}$. Eben so gibt eb die Richtung des Druckes, nach welcher das zweite Prisma gegen das dritte drückt, und der gesammte Druck ist $= \sqrt{(H^2 + (A + B)^2)}$ u. s. w.

Für den Fall, wenn alle Prismen ein gleiches Gewicht haben, ist $A = B = C \ldots$ also $\tang \alpha : \tang \beta : \tang \gamma \ldots : \tang \omega = 1:3:5 \ldots :2n-1$, d. h. wenn die Prismen gleiche Schwere haben, so verhalten sich die Tangenten der Stellungswinkel wie die ungeraden Zahlen.

§. 368.

Wenn ab, bl, lm . . . die Mittellinien der Stellungen mehrerer untereinander
Fig. 2. Tab. 18. schiefgestellter Prismen sind, so ist vermög des Vorigen db die Richtung, nach welcher der ganze Druck des obern Prisma gegen das folgende wirkt. Zieht man durch b die Linie bs winkelrecht auf db, so steht der ganze Druck $= \sqrt{(H^2 + A^2)}$, den das oberste Prisma gegen das nächstfolgende ausübt, auf der Linie s b, folglich auf der Basis n′n senkrecht, und es ist eben so viel, als ob eine Säule mit dem Gewichte $\sqrt{(H^2 + A^2)}$ auf die Basis n′n senkrecht gestellt würde. Seine Stabilität wird demnach durch die Dicke des Prisma oder durch die Linie n′n bestimmt. Eben so gibt für das folgende Prisma die Linie eb die Richtung, nach welcher das zweite Prisma gegen das dritte drückt. Wird nun diese Linie eb bis nach o verlängert und aus dem Punkte l die Linie plo winkelrecht auf eo gezogen, so steht wieder der ganze Druck der ersten zwei Prismen $= \sqrt{(H + (A + B)^2)}$ auf der Basis r′r senkrecht u. s. w.

Diese Betrachtungen reichen hin, aus der gegebenen Anzahl und Höhe der übereinander zu stellenden Prismen jedesmal die Schnittlinie zu finden.

Wenn von der andern Seite der senkrechten Linie az auf gleiche Art mehrere
Fig. 3. solche Prismen untereinander gestellt werden, so bilden sie ein mehrmal gebrochenes Dach oder auch ein Gewölbe von mehreren Gewölbsteinen, deren Länge und Grösse bestimmt ist, und für welche bloss die Stellung angegeben werden muss. Es erhellet von selbst, dass auf solche Art z. B. ein Dachgewölbe aus einer Zusammensetzung von mehreren Quadersteinen gebildet werden kann, folglich die Frage über ein unverbrennliches Dach sehr leicht aufzulösen wäre.

§. 369.

Um die nachfolgende Theorie verständlicher zu machen, wollen wir zuerst eine Erklärung der bei Gewölbungen gewöhnlich vorkommenden Ausdrücke geben.

Fig. 4. Nach dem vorigen §. entsteht ein Gewölbe (*voute*), wenn mehrere prismatische Steine abb′a′, bcc′b′, ... so an einander gestellt werden, dass sie unterhalb eine Höhlung bilden und sich wechselseitig so stützen, dass keiner derselben aus ihrer Zusammenstellung fallen kann. Da die Gewölbsteine (*voussoirs*) auf ihrer Aussenseite eine grössere, an der innern Seite aber eine kleinere Länge haben, so bilden sie Keile, deren Seitenflächen besonders bestimmt werden müssen.

Die Linien b′b, c′c, in welchen sich die Gewölbsteine berühren, heissen die Fugen (*joints*); und die Flächen, womit sie sich berühren, die Berührungsflächen oder Lager (*lits*).

Um die Gewölbsteine in der gehörigen Ordnung aufzustellen, werden mehrere Breter in einer Fläche so zusammengenagelt, dass die Linie abcdef hierauf verzeichnet wer-

den kann. Sind die Breter nach der Form dieser Linie von aussen abgeschnitten, so heisst diess ein Lehrbogen. Fig. 4. Tab.

Wenn mehrere solche Lehrbögen in einer horizontalen Richtung parallel aufgestellt und an ihrer obern Seite mit andern Bretern verschalt werden, so dass sie die Hälfte einer Tonne bilden, so heisst man das hiernach erbaute Gewölbe ein Tonnengewölbe (*berceau*), welches gewöhnlich wagerecht ist. Werden aber die Lehrbogen nicht horizontal, sondern immer niedriger gestellt, so entsteht ein schiefes Tonnengewölbe, wie es z. B. bei einem geschlossenen Stiegengewölbe der Fall ist. 18.

Die Masse ff′g′g, von welcher der unterste Gewölbstein getragen wird, heisst die Widerlage (*support*, *pied-droit*). Bei Brücken heisst diess der Stirnpfeiler (*culée*), und wenn zwei Gewölbe neben einander darauf ruhen, ein Pfeiler (*pilier*).

Der Anfang des Gewölbes (*naissance*) heisst derjenige Theil desselben, welcher sich zunächst an der Widerlage befindet. Der daselbst befindliche unterste Gewölbstein fee′f′ heisst der Kämpfer (*coussinet*); der oberste oder höchste Gewölbstein aa′b′b heisst der Schlussstein (*clef*).

Wird ein Querschnitt durch den Schlusstein und die beiden Widerlagen des Gewölbes gemacht, welcher die innere und äussere Gewölbfläche senkrecht durchschneidet, so heisst die innere Fläche, wovon die Linie abcdef das Profil bildet, die innere Wölbung (*intrados*); die Fläche, deren Durchschnitt die Linie a′b′c′d′e′f′ vorstellt, die äussere Wölbung (*extrados*) und die höchsten Punkte a, a′ die Scheitel dieser Wölbungen. Die Linien abcdef und a′b′c′d′e′f′ heissen die Wölbungslinien.

Die Gestalt der innern Wölbung bestimmt den Beinamen des Gewölbes. Wenn der Lehrbogen ein Kreis ist, heisst es ein Kreisgewölbe, ist er eine Parabel, so heisst es ein parabolisches Gewölbe; ist er eine Elypse, so heisst es ein elyptisches oder gedrücktes Gewölbe; ist der Lehrbogen eine horizontale Fläche, so heisst es ein scheidrechtes Gewölbe (*platte bande droite*), wobei daher die innere Wölbung gerade ist u. s. w.

Die vordere Ansicht eines jeden Gewölbes heisst die Stirnfläche (*parement*), bei welcher immer vorausgesetzt wird, dass sie auf der Fläche der innern Wölbung winkelrecht stehe.

Eine andere Art Gewölbe sind die Kuppel- oder Kesselgewölbe (*voutes en dôme*), deren Höhlung irgend ein Conoid bildet, dessen krumme Oberfläche die innere Wölbung des Kuppelgewölbes ausmacht.

Ein Pultgewölbe, oder Stiegengewölbe besteht aus einem Bogen und einer darauf gelegten schiefen Fläche. Ein Dachgewölbe besteht aus einem Bogen und zwei gegen einander gelegten schiefen Flächen.

§. 370.

Je kleiner die Länge der Prismen angenommen wird, um so näher kommt die Zeichnung (§. 368.) einer krummen Linie oder dem Lehrbogen eines Gewölbes. Weil es aber sehr schwierig seyn würde, aus einem so kleinen Winkel, als in diesem Falle der Schlussstein mit dem Horizonte bildet, auf die Stellung der übrigen Gewölbsteine überzugehen, und auf solche Art die zahllosen Winkel in einen ordentlichen Lehrbogen zu vereinigen, nach welchem alle übrigen Gewölbsteine aufgestellt werden müssen, so be-

dient man sich hiezu der Theorie der krummen Linien und der Methoden, nach welchen dieselben mit der nöthigen Genauigkeit verzeichnet werden können.

Um diesen Gegenstand mit der erforderlichen Deutlichkeit zu behandeln, ist zu bemerken, dass wir bei jedem Gewölbe den Lehrbogen, auf welchem die Gewölbsteine gewöhnlich winkelrecht aufgestellt werden, von der Stützlinie unterscheiden, nach welcher die Gewölbsteine wechselseitig gegen einander wirken, und sich eben so das Gleichgewicht halten, wie wir es in den vorigen §. §. für die Stellung mehrerer Prismen übereinander bereits angegeben haben. Es ist in dieser Hinsicht allgemein bekannt, dass ein, nach einem halben Kreisbogen frei aufgestelltes Gewölbe (welches also keine besondere Last zu tragen hat), in dem Falle einstürzt, wenn nicht durch eine hinreichende Höhe der Gewölbsteine und durch angemessene Widerlagen für seinen Bestand gesorgt wird. Erhält sich das Gewölbe in seiner Lage, so liegt die Stützlinie innerhalb der Masse des Gewölbes und die Gewölbsteine sind nur als an dieser Linie hängend zu betrachten. Wenn jedoch eine Stützlinie innerhalb der Masse des Gewölbes nicht gedenkbar ist, so wird dasselbe, wenn es sich auch durch den Mörtelverband während einer kurzen Zeit erhielte, später dennoch sicher einstürzen.

Da dieser Gegenstand, über welchen schon so viel geschrieben wurde, zu seiner umständlichen Ausführung eine sehr weitläufige Abhandlung für sich allein fordern würde, so wollen wir hievon nur das Wichtigste ausheben und für die gewöhnlichen Fälle der Wölbungen folgende drei Fragen abhandeln:

1tens. Wenn die Grösse und Gewichte der Prismen, z. B. Ziegeln, aus welchen ein Gewölbe zusammengesetzt werden soll, gegeben ist, die Zeichnung des Lehrbogens für ihre Stellung, oder für diejenige krumme Linie zu finden, nach welcher sie sammengestellt werden müssen, um sich das Gleichgewicht zu halten.

2tens. Wenn der Lehrbogen oder die Zeichnung für die Stellung der Gewölbsteine gegeben ist, die Gewichte zu finden, welche die Gewölbsteine für sich selbst haben, oder womit sie beschwert werden müssen, damit dieser Lehrbogen und alle innerhalb des Gewölbes zu demselben gezogene parallele Linien wirkliche Stützlinien abgeben.

3tens. Wenn endlich die Bogenlinie des Gewölbes sowohl an ihrer obern als untern Seite gegeben ist, die Bedingnisse zu finden, unter welchen noch Stützlinien innerhalb des gegebenen Profils gedacht werden können, und sonach das Gewölbe eine Stabilität erhält.

§. 371.

Der gewöhnlichste Fall bei der Herstellung der Gewölbe ist ein freies Gewölbe, das aus Ziegeln oder Backsteinen zusammengesetzt wird. Für diesen Fall lehrt die höhere Mechanik, dass die Bogenlinie für die Mittelpunkte der Gewölbsteine eine Kettenlinie, oder diejenige krumme Linie seyn müsse, welche von einer frei hängenden Kette gebildet wird. Für die Zeichnung dieser Linie hat man bisher nur die Methode angegeben, dass man eine Kette oder biegsame Schnur an beiden Enden des zu überwölbenden Raumes aufhängen, und in der Mitte so weit herablassen soll, bis der niedrigste Punkt der Kette mit der gegebenen Gewölbshöhe über-

einstimmt; sodann sollen alle Punkte, welche die aufgehängte Kette bildet, an dem dahinter gestellten Lehrbogen bezeichnet, und auf diese Art nach der Bezeichnung der Lehrbogen ausgeschnitten werden.

Obwohl diese Methode in neuern Zeiten bei den Kettenbrücken in England zur Bemessung der Länge der Hängstäbe angewendet wurde, so ist doch noch kein Fall bekannt, dass man sich derselben bei der Zeichnung der Lehrbögen für steinerne Gewölbe von grössern Spannweiten bedient, und die letztern hiernach ausgeführt hätte. Weil jedoch der Bau freier Gewölbe bei öffentlichen Gebäuden, Kirchen, grossen gewölbten Sälen u. s. w. sehr häufig vorkommt, demnach eine Anleitung zur grösstmöglichen Festigkeit bei ihrer Herstellung von Wichtigkeit ist, so wollen wir hiezu noch Folgendes anführen. *) Die unten angeführte Theorie der Kettenlinie gibt uns für die Herstellung der

*) Es sey AMN die durch die Mitte der Gewölbsteine gezogene Wölbungslinie, der Bogen $AM = s$, $MN = ds$, $MO = dx$, $NO = dy$, die Höhe der Gewölbsteine $aa' = h$, so ist die Fläche $aa'm'm = h.s$. Da die Summe aller in dieser Fläche enthaltenen Gewölbsteine durch den folgenden $mm'n'n$ unterstützt werden soll, so muss die Tangente des Winkels MNO, den wir $= w$ setzen wollen, der Fläche $h.s$ proportional seyn. Setzen wir die Länge des Gewölbbogens bis zum Stellungswinkel $w = 45$ Grad, allgemein $= m$, so ist das Gewicht dieses Gewölbbogens $= h.m$, folglich $\tan 45 : h.m = \tan w : h.s$, und weil $\tan 45 = 1$, so folgt $s = m.\tan w$; weil aber $\tan w = \frac{dx}{dy}$, so ist auch $s.dy = m.dx$ (I). Werden beide Theile dieser Gleichung quadrirt, und zu beiden Seiten $s^2.dx^2$ addirt, so ist $s^2.dy^2 + s^2.dx^2 = m^2.dx^2 + s^2.dx^2$ oder $s^2.ds^2 = (m^2 + s^2)\,dx^2$, woraus $dx = \frac{s.ds}{\sqrt{(m^2 + s^2)}}$. Das Integrale dieser Gleichung ist $x = \sqrt{(m^2 + s^2)}$ (II). Fig. 5. Tab. 18.

Im Scheitel A ist der Bogen $s = 0$, daher $x = m$, wir müssen demnach von A die Linie $AB = m$ senkrecht auftragen und durch B die Linie BPQ horizontal ziehen, so sind die Coordinaten unserer krummen Linie $BP = y$, $PM = x$, u. s. w. Aus der oben gefundenen Gleichung (II) ergibt sich die Länge des Bogens $s = \sqrt{(x^2 - m^2)}$; setzen wir diesen Werth von s in die Gleichung (I), so ergibt sich $\sqrt{(x^2 - m^2)} = \frac{m.dx}{dy}$, daher $dy = \frac{m.dx}{\sqrt{(x^2 - m^2)}}$. Das Integrale dieser Gleichung ist $y = m.\text{nat. log}\left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - m^2)}}{m}\right)$, und wenn die bekannte Grundzahl der natürlichen Logarithmen $2{,}7182818\ldots = e$ gesetzt wird, so erhält man $x = \frac{m}{2}\left\{e^{\frac{y}{m}} + e^{-\frac{y}{m}}\right\}$. In dieser Gleichung erhält x offenbar einerlei Werthe, wir mögen y positiv oder negativ annehmen. Die angeführte krumme Linie wird demnach durch die Senkrechte BAV in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt, welches auch aus §. 368 bereits bekannt ist.

Obwohl sich mittelst dieser Gleichung die zusammengehörigen Werthe von x und y genau berechnen, und die krumme Linie zeichnen liesse, so wollen wir doch noch in Hinsicht auf eine bequemere Zeichnung sowohl die Coordinaten der Kettenlinie x und y, als auch die krumme Linie für ihre Entwicklung nach Verhältniss des Winkels w berechnen. Wir haben bereits oben gefunden, dass $s = \sqrt{(x^2 - m^2)}$, demnach $m.\tan w = \sqrt{(x^2 - m^2)}$ ist; hieraus folgt $x^2 = m^2(\tan^2 w + 1) = m^2\left(\frac{\sin^2 w + \cos^2 w}{\cos^2 w}\right)$ und $\frac{x}{m} = \frac{1}{\cos w}$, folglich $JM = \frac{x - m}{m}$.

Werden in die Gleichung $\frac{y}{m} = \text{nat. log}\left(\frac{x}{m} + \frac{\sqrt{(x^2 - m^2)}}{m}\right)$ die Werthe $\frac{x}{m} = \frac{1}{\cos w}$ und $\frac{\sqrt{(x^2 - m^2)}}{m} = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w}$ substituirt, so folgt $AJ = \frac{y}{m} = \text{nat. log.}\left(\frac{1 + \sin w}{\cos w}\right)$.

freien Gewölbebögen folgende Tabelle, welche für die Stellungswinkel von 0 bis 85 Grad berechnet ist:

Fig. 5. Tab. 18. Setzen wir den Winkel $w = 90 - u$, so ist $\text{Sin } w = \text{Cos } u$ und $\text{Cos } w = \text{Sin } u$, demnach

$$\frac{1 + \text{Sin } w}{\text{Cos } w} = \frac{1 + \text{Cos } u}{\text{Sin } u} = \frac{2 \text{ Cos}^2 \tfrac{1}{2} u}{2 \text{ Sin } \tfrac{1}{2} u \cdot \text{Cos } \tfrac{1}{2} u} = \text{Cotang } \tfrac{1}{2} u, \text{ und es ist daher}$$

$$\frac{y}{m} = \text{nat. log. Cotang } \tfrac{1}{2} u = \text{nat. log. Cotang } \left(\frac{90 - w}{2}\right).$$

Die Länge des Krümmungshalbmessers $MZ = r$ folgt aus der S. 325 angeführten Proportion $dw : 1 = MN : MZ = ds : r$ und $r = \frac{ds}{dw}$. Die Gleichung $s = m \cdot \text{tang } w$ gibt

$$ds = \frac{m \cdot dw}{\text{Cos}^2 w}, \text{ folglich } \frac{ds}{dw} = r = \frac{m}{\text{Cos}^2 w}, \text{ und } \frac{r}{m} = \frac{1}{\text{Cos}^2 w}.$$

Im Scheitel A ist $\text{Cos } w = 1$, also $r = m = AD = AB$. Um den geometrischen Ort der Mittelpunkte für die Krümmungshalbmesser oder die Entwicklungslinie DZO zu finden, lasse man aus M die Senkrechte MR herab und ziehe aus dem Mittelpunkte Z des zu M gehörigen Krümmungshalbmessers MZ die Horizontale ZR, so ist der Winkel $RMZ = MNO = w$, folglich

$$MR = MZ \cdot \text{Cos } w = \frac{m \cdot \text{Cos } w}{\text{Cos}^2 w} = \frac{m}{\text{Cos } w} = x = MP \text{ und } PR = PM + MR = 2x = BV.$$

Wird hievon $BD = 2m$ abgezogen, so ist die Coordinate DV die wir u nennen wollen $= 2x - 2m$, folglich $\frac{u}{m} = 2\left(\frac{x - m}{m}\right)$. Auf gleiche Art ist $RZ = MZ \cdot \text{Sin } w = \frac{m \cdot \text{Sin } w}{\text{Cos}^2 w}$. Wenn wir nun die Coordinate $VZ = z$ setzen, so ist $\frac{z}{m} = \frac{RZ - RV}{m} = \frac{\text{Sin } w}{\text{Cos}^2 w} - \frac{y}{m}$.

Um die Kettenlinie allgemein durch eine Zeichnung vorzustellen, hat man für $AB = m$ eine willkührliche Grösse angenommen und derselben gemäss die Coordinaten $AJ = \frac{y}{m}$ und $JM = \frac{x - m}{m} = \frac{1}{\text{Cos } w} - 1$, dann die Coordinaten für die Entwicklungslinie $DV = \frac{u}{m}$ und $VZ = \frac{z}{m}$ wie auch den Krümmungshalbmesser $MZ = \frac{r}{m}$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt.

Stellungs-winkel in Graden w.	Coordinaten der Kettenlinie		Krümmungs-halbmesser	Coordinaten der Entwicklungs-linie.	
	$\frac{x-m}{m}=\frac{1}{\text{Cos } w}-1$	$\frac{y}{m}=$ nat. log. Cotang $\left(\frac{90-w}{2}\right)$	$\frac{r}{m}=\frac{1}{\text{Cos}^2 w}$	$\frac{u}{m}=2\left(\frac{x-m}{m}\right)$	$\frac{z}{m}=\frac{\text{Sin } w}{\text{Cos}^2 w}-\frac{y}{m}$
0	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
5	0,004	0,087	1,008	0,008	0,001
10	0,015	0,175	1,031	0,030	0,004
15	0,035	0,265	1,072	0,070	0,012
20	0,064	0,356	1,132	0,128	0,031
25	0,103	0,451	1,217	0,206	0,064
30	0,155	0,549	1,333	0,310	0,117
35	0,221	0,653	1,490	0,442	0,202
40	0,305	0,763	1,704	0,610	0,332
45	0,414	0,881	2,000	0,828	0,533
50	0,556	1,011	2,420	1,112	0,843
55	0,743	1,154	3,040	1,486	1,336
60	1,000	1,317	4,000	2,000	2,147
65	1,366	1,506	5,599	2,732	3,568
67,5	1,613	1,615	6,828	3,226	4,694
70	1,924	1,735	8,549	3,848	6,298
75	2,864	2,028	14,928	5,728	12,392
80	4,759	2,436	33,163	9,518	30,224
85	10,474	3,131	131,646	20,948	128,014

Die erste Columne dieser Tabelle enthält die Stellungswinkel, welche die Gewölbsteine mit dem Horizonte bilden; die zweite und dritte Columne enthält die Coordinaten, nach welchen die Gewölblinie verzeichnet werden kann, und zwar werden die Abscissen vom Scheitel aus vertikal herabgetragen, und in den bezeichneten Punkten die Ordinaten horizontal zu beiden Seiten aufgetragen. Weil jedoch die Abscisse x der Kettenlinie auf dem analytischen Wege von einem Punkte gemessen wird, der über dem Scheitel der Gewölblinie auf der Höhe m liegt, so hat man von diesem x die Grösse m abgezogen, damit die Grösse x — m an jedem Orte die Höhe des Gewölbes vom Scheitel herab und die Grösse 2 y die Weite des Gewölbbogens daselbst vorstelle. Damit endlich diese Grössen x — m und y für alle möglichen Fälle der Kettengewölbe brauchbar seyen, so hat man sie noch mit m dividirt, um durch eine angemessene Bestimmung der Grösse m die wirklichen Maasse der Gewölblinie zu erhalten und hiernach dieselbe verzeichnen zu können.

Wenn man auf diese Art die Abscissen und Ordinaten z. B. von 5 zu 5 Graden aufträgt und die Endpunkte der letztern mitsammen verbindet, so erhält man ein Polygon, welches aber von einer krummen Linie so wenig abweicht, dass man ohne An-

stand aus freier Hand diese Linie ziehen kann. Die folgenden drei Columnen sind bloss zur leichtern Zeichnung, um nicht so viel Punkte auftragen zu müssen. Zu dieser Absicht sind nämlich in der vierten Columne die Krümmungshalbmesser und in der fünften und sechsten Columne die Orte für die Mittelpunkte dieser Krümmungshalbmesser bestimmt worden, damit man entweder eine krumme Linie, welche durch diese Punkte geht, ziehen, und durch Herumlegen eines Fadens die Kettenlinie selbst durch einen Zug verzeichnen kann; oder wie man es in neuern Zeiten gethan hat, einige Mittelpunkte annehmen und mit dem zugehörigen Krümmungshalbmesser die krumme Linie nach Art einer sogenannten Korblinie verzeichnen könne.

Aus der nähern Betrachtung der vierten Columne ersieht man, dass der Krümmungshalbmesser im Scheitel $\frac{r}{m} = 1$, bei dem Stellungswinkel von 30 Graden $= 1\frac{1}{3}$, bei dem Winkel von 45 Graden $= 2$ und bei 60 Graden $= 4$, oder dass bei diesen 4 Winkeln $r = m$, dann $r = 1\frac{1}{3}\,m$, ferner $r = 2\,m$ und zuletzt $r = 4\,m$ sey. In dieser Hinsicht werden auch vorzüglich für diese Winkel die Mittelpunkte bezeichnet und aus denselben die krumme Linie bis zu dem Stellungswinkel von 60 Grad und noch etwas weiter in der Ausübung beschrieben.

§. 372.

Beispiel. Zur deutlichern Erklärung des Gebrauches dieser Tabelle wollen wir als ein Beispiel den Fall annehmen, dass ein freies Gewölbe über eine Breite von 8 Klafter = 48 Fuss herzustellen und die Höhe der halben Spannweite oder = 24 Fuss seyn soll.

Für diesen Fall müssen wir in der Tabelle denjenigen Stellungswinkel aufsuchen, bei welchem die Höhe der halben Breite gleich ist. Dieses finden wir bei dem Winkel von 67,5 Grad, bei welchem nämlich $\frac{x - m}{m} = 1{,}61 = \frac{y}{m}$ ist. Setzen wir demnach

Fig. 5. Tab. 18. $y = 24$ Fuss, so ist $\frac{24}{m} = 1{,}61$ und $m = 14{,}9$ Fuss $=$ A D $=$ A B.

Werden die in der 2ten bis 6ten Columne angeführten Zahlen mit 14,9 multiplicirt, so erhält man die Coordinaten für die zu bestimmende Kettenlinie, wie auch den Krümmungshalbmesser und die Coordinaten für ihre Entwicklung in der angemessenen Grösse. Um hiebei Raum zu ersparen, sind in folgendem Schema nur für die Winkel w = 30, 45, 60 und 67,5 Grad die Werthe für die Coordinaten berechnet und zusammengestellt worden:

Stellungswinkel in Graden. w	Für ein freies Gewölbe von 8 Klafter Weite und 4 Kl. Höhe				
	Coordinaten der Kettenlinie		Krümmungshalbmesser	Coordinaten der Entwicklungslinie	
	x — m	y	r	u	z
	in Fussen				
0	0	0	14,9	0,00	0,00
30	2,31	8,18	19,86	4,62	1,74
45	6,17	13,13	29,80	12,34	7,94
60	14,90	19,62	59,60	29,80	31,99
67,5	24,03	24,06	101,74	48,07	69,94

Zieht man nun die Horizontale q q′ = 48 Fuss, trägt im Mittelpunkte x die Höhe des Gewölbes x A = 24 Fuss auf, und von A auf selbe die in der 2ten und 3ten Columne angeführten Maasse AB = 2,31 und B E = B E′ = 8,18, ferner A C = 6,17 und C F = C F′ = 13,13, dann A H = 14,90 und H G = H G′ = 19,62 auf, so muss die Kettenlinie durch die hiemit bestimmten Punkte A, E, F, G, q und eben so von der andern Seite durch A, E′, F′, G′ und q′ gehen. Fig. 6. Tab. 18.

Weil aber eine Verbindung dieser Punkte durch eine krumme Linie **von freier Hand** nicht wohl ausgeführt werden kann, so trägt man aus dem Punkte A die Linie A H = 14,9 Fuss als den Krümmungshalbmesser für den Scheitel oder den Bogen m A m′ auf. Nun wird H J = 4,62 und h′ J = h J = 1,74 aufgetragen. Diess gibt diejenigen Punkte, aus welchen mit dem Krümmungshalbmesser h E = 19,86 der Bogen n E m und mit h′ E′ = 19,86 der Bogen m′ E′ n′ beschrieben werden kann. Auf gleiche Art trägt man wieder aus H die Linie H V = 12,34 und aus V die Ordinaten V v′ = V v = 7,94 auf; hiedurch erhält man abermals die Punkte v und v′, aus welchen mit dem Krümmungshalbmesser v F = 29,80 der Bogen n F o und mit demselben Halbmesser aus v′ der Bogen n′ F′ o′ beschrieben werden kann. Trägt man endlich aus H die Linie H L = 29,80 und aus L die Ordinaten L l = L l′ = 31,99 auf, so geben die Punkte l und l′ die Mittelpunkte, aus welchen mit dem Halbmesser l G = l′ G′ = 59,60 die Bögen o G p und o′ G′ p′ beschrieben werden. Die weitern Bögen q p und q′ p′ sollten nun mit dem Krümmungshalbmesser von 101,74 Fuss beschrieben werden; da diess jedoch einen zu grossen Raum erfordern würde, so kann man von p und p′ die Linien p q und p′ q′ in gerader Richtung als Tangenten zu den Punkten p und p′ ziehen.

Die Punkte m, n, o, p und m′, n′, o′, p′ ergeben sich bei der Verzeichnung von selbst, indem der ganze Bogen q G F E A eine gleichförmig fortlaufende krumme Linie bilden muss. Wollte man die krumme Linie in einem Zuge beschreiben, so müsste man die Coordinaten der Entwicklungslinie für die Stellungswinkel von 5 zu 5 Grad auftragen, sodann an l eine Schnur anbinden, die um die Punkte v, h, H und bis A gelegt, bei A ein Stift befestigt, und nun der Bogen von A bis q nach der Richtung der fortwährend angespannten, in l befestigten Schnur beschrieben wird. Auf gleiche Art wird der andere Bogen A q′ von dem Punkte l′ aus beschrieben.

Die Zeichnung, welche auf diese Art verfertigt wird, gibt die **Stützlinie für die Mitte der Gewölbsteine**; wenn man daher die Schnur um die halbe Höhe der Gewölbsteine und um die Dicke der Breterverschalung bei A verkürzt, und den Stift bei a einsetzt, so gibt die gezogene Linie a e f g die **krumme Linie für den eigentlichen Lehrbogen**, welcher dann auf die gewöhnliche Art aufgestellt und die Gewölbsteine, die in diesem Falle eine **gleiche Höhe** haben, aufgesetzt werden.

Auf solche Art können nun alle **freien Gewölbe**, welche keine andere Last, als das eigene Gewicht der Gewölbsteine zu tragen haben, für eine jede Spannweite und Höhe verzeichnet und mit vollkommener Sicherheit erbaut werden.

§. 373.

Fig. 6. Tab. 18. Man hat gegen die Anwendung der Kettenlinie bei Gewölben eingewendet, dass der Winkel, den die Kettenlinie an ihren Endpunkten bei q und q′ mit dem Horizonte bildet, immer kleiner als 90 Grad ausfällt, und demnach eine dem Auge missfällige Form darstelle. Diesem Uibelstande kann sehr leicht dadurch abgeholfen werden, indem man aus zwei beliebigen, und von dem Mittelpunkte der Linie q q′ gleichweit entfernten Punkten t und t′ die Kreisbögen r s und r′ s′ zieht, welche sich oberhalb mit den Lehrbögen verlaufen und unterhalb, d. h. an ihren Endpunkten s und s′ so wie ein jedes Kreisgewölbe senkrecht stehen, demnach mit der innern Seite der Widerlagsmauer eine gerade Linie bilden.

Dabei ist aber zu bemerken, dass der Druck der Gewölbsteine dessen ungeachtet immer der Kettenlinie q p und q′ p′ folgen, und wenn man dieselbe bis an das unterste Ende der Widerlagsmauern oder bis auf den Grundbau bei u und u′ verlängert, zugleich die Stützpunkte u und u′ auf dem Grundmauerwerke angeben werde.

Es ist offenbar, dass wenn auf solche Art das Gewölbe nach der Richtung der Kettenlinie bis auf die Grundmauern fortgeführt würde, selbes ohne allen Mörtelverband und ohne stärkere Widerlagen als die Dicke a a′ des Gewölbes im Scheitel beträgt, bestehen könnte, wenn nicht etwa von Seite des Materials ein Zerdrücken desselben zu befürchten wäre. Man pflegt daher in dieser Hinsicht den Widerlagsmauern immer eine solche Stärke zu geben, dass in denselben nicht nur das mit gleicher Dicke a a′ fortlaufende Gewölbe eingeschlossen wird, sondern auch zur Vermehrung der Stabilität noch eine grössere Basis als a a′, nämlich y z und y′ z′ in der Mauer M N O P und M′ N′ O′ P′ vorhanden sey. Die Stützlinie q u befindet sich auf solche Art innerhalb der ganzen Mauer M N O P, wovon die innere r s P z zur Stützung des Gewölbes nichts beiträgt, dagegen aber die äussere O M N q durch ihr Gewicht dem Gewichte des Gewölbes zuwächst, folglich den Stützpunkt u noch näher gegen die Mitte der Mauer O P versetzt. Da jedoch auch die innere Mauer mit dem darin fortlaufenden stützenden Gewölbbogen durch Steine und Mörtel verbunden wird, so vermehrt sie auch in dieser Hinsicht die Festigkeit des Gewölbes, welches um so nothwendiger ist, weil die Mauern durch Fenster und Thüren wieder geschwächt werden.

Wir bemerken schlüsslich, dass diese Theorie der Kettengewölbe desshalb ausführlicher behandelt wurde, um aus derselben überhaupt eine deutlichere Ansicht über die wechselseitige Wirkung der Gewölbsteine sowohl als auch der Widerlagsmauern entnehmen zu können.

§. 374.

So gross übrigens die Vortheile solcher Wölbungslinien seyn mögen, deren Lehrbögen zugleich dem Gewölbe zur Unterstüzung dienen, so wird doch die Schwierigkeit, diese Lehrbögen gehörig zu zeichnen, bei den Baumeistern immer einige Anstände finden, und eine Anweisung für die Bauleute, wie in diesem Falle die Gewölbsteine für solche Bogenlinien gehörig zu behauen, und in das Gewölbe einzustellen wären, dürfte noch grössern Schwierigkeiten unterliegen. Die Kreisbögen und die gedrückten oder elyptischen Bögen werden demnach ihre bisherige Anwendung in der Bau-

kunst (die Fälle sehr grosser Spannungen ausgenommen) auch in der Zukunft um so mehr behaupten, als nicht nur der an die Formen der Alten gewöhnte Kunstgeschmack für dieselben spricht, sondern auch weil ihre Festigkeit durch zweckmässige Verhältnisse in jedem Falle erreichbar ist, und durch häufige Beispiele bestättigt wird. Zur Ausmittlung dieser Verhältnisse gibt es zwei Wege; indem

1tens die gegebenen Bogenlinien hinlänglich beschwert und dadurch die Verhältnisse, welche zwischen den Gewichten und den Tangenten der Stellungswinkel statt finden müssen, hergestellt, folglich die Bogenlinie durch angemessene Beschwerungen zur Stützlinie gemacht wird. Wenn aber

2tens sowohl die Gewichte der Gewölbsteine und die darauf ruhende Last, als auch ihre wechselseitige Stellung gegeneinander durch die Bogenlinie unabänderlich gegeben ist, diese Linie aber z. B. ein Kreis oder eine Elypse, die Eigenschaft nicht besitzt, dass die Tangenten der Stellungswinkel den Gewichten proportional werden, so kann man ihre Festigkeit nur dadurch herstellen, indem innerhalb der Gewölbsteine diejenigen Stützlinien aufgesucht werden, denen die Eigenschaft der vollkommenen Unterstützung zukommt, und an welchen die Gewölbsteine sodann nur als angehängt zu betrachten sind.

Es wird nunmehr nur darauf ankommen, dass die Zahl dieser Stützlinien innerhalb der Masse des Gewölbes möglichst gross sey. Es erhellet nämlich von selbst, dass jedes Gewölbe um so mehr Sicherheit gegen den Fall (Stabilität) besitzen werde, je mehr solche Stützlinien innerhalb der Masse des Gewölbes statt finden können, oder je breiter die Basis ist, mit welcher die Gewölbsteine sowohl auf einander wechselseitig, als auch auf ihrer Widerlage ruhen. Dieser Begriff von Stabilität der Gewölbe ist demjenigen analog, nach welchem wir den festen Stand aller Körper, die auf einer Stütze z. B. auf einer aufrecht stehenden Säule ruhen, erkennen oder zu beurtheilen pflegen, denen wir nämlich bei gleicher Höhe um so mehr Stabilität beimessen, je mehr Stützlinien innerhalb der Basis Raum finden, oder je grösser die Fläche ist, auf welcher der Körper ruhet. Der Unterschied zwischen beiden Vorstellungsarten besteht nur darin, dass die Stützlinien des auf einer Säule ruhenden Körpers gerade, senkrechte, innerhalb der Säule fortlaufende Linien sind, wogegen bei Gewölben die Stützlinien gegen die beiderseitigen Widerlagen nach schiefen Richtungen in krummen Linien fortlaufen, übrigens aber doch in allen Punkten auf ihren Stützflächen winkelrecht stehen.

§. 375.

Die erste Aufgabe, welche wir nunmehr zu behandeln haben, betrifft die Untersuchung, wie der Kreis- und der elyptische Bogen zu Stützlinien gemacht werden können. *)

*) Zur Beantwortung der Frage, wie jede krumme Linie durch eine angemessene Belastung zu einer stützenden Gewölbslinie gemacht werden könne, wollen wir als Beispiel zuerst die Kreislinie und im folgenden §. den elyptischen Bogen anführen.

Es sey Fig. 7 der Halbmesser des Kreises $AC = a$ und die Höhe der Belastung im Scheitel $AB = h$ gegeben. Nennen wir die Höhe der Belastung für den Punkt M, nämlich $MN = z$ und den Win- Fig. 7. Tab. 18.

Da diese beiden krummen Linien nicht die Eigenschaft besitzen, dass die Tangenten ihrer Stellungswinkel den Gewichten der zu stützenden Gewölbsteine proportional sind, so wird es nothwendig, diesen Gewölbsteinen solche Gewichte zu geben, oder sie so zu beschweren, damit die Winkel, welche die gegebene Bogenlinie (der Kreis oder die Elypse) an jedem Orte mit dem Horizonte macht, mit den zu stützenden Lasten in das angemessene Verhältniss gesetzt und auf solche Art die Bogenlinie zu einer Stützlinie werde.

Fig. 7. Tab. 18. kel $ACM = v$, so ist $MP = a . \text{Sin } v$, $MG = a . \text{Cos } v$, ferner $mo = a . \text{Cos } v . dv$; folglich ist die Fläche $MNnm$, von welcher das Element Mm belastet wird $= z . a . \text{Cos } v . dv$ und daher die ganze Fläche $BNMA = \int z . a . dv . \text{Cos } v$.

Nun muss diese Fläche der Tangente des Stellungswinkels $M m o$ proportional seyn, wir können daher $\int z . a . dv . \text{Cos } v : \text{tang } v = m . h : 1$ setzen, woraus $m . h . \text{tang } v = \int z . a . dv . \text{Cos } v$ folgt. Wird diese Gleichung differenzirt, so ist $\frac{m . h . dv}{\text{Cos}^2 v} = z . a . dv . \text{Cos } v$, folglich $z = \frac{m . h}{a . \text{Cos}^3 v}$.

Nun ist der obigen Annahme gemäss im Scheitel $z = h$ und $\text{Cos } v = 1$, demnach $h = \frac{m . h}{a}$, folglich $m = a$, woraus die allgemeine Gleichung für die Belastung einer Kreislinie $z = \frac{h}{\text{Cos}^3 v}$ folgt.

Wird diese Gleichung in die Proportion $z : h = 1 : \text{Cos}^3 v = a^3 : a^3 . \text{Cos}^3 v = AC^3 : MG^3$ aufgelösst, so sehen wir, dass die Höhen $AB = h$ und $MN = z$, womit ein jeder Punkt des Kreisgewölbes belastet werden muss, umgekehrt den dritten Potenzen der Cosinusse der Stellungswinkel, oder umgekehrt den dritten Potenzen der Höhen der Punkte A, M über der Horizontallinie DE proportional sind.

Hieraus folgt weiter, dass für die Punkte D und E, wo die Bögen auf dem Durchmesser winkelrecht stehen, demnach $v = 90$ Grad und $\text{Cos } v = 0$ ist, die Höhe der Belastung unendlich gross seyn müsste. Nimmt man überhaupt für den Stellungswinkel v die Werthe 0, 10, 20, 30, ... Grade an, und berechnet hiezu die Höhen z der entsprechenden Belastung, so ergeben sich folgende Werthe:

Stellungswinkel v	0	10	20	30	40	45	50	55	60	70	80	90
Berechnete Höhe z	1,00 h	1,05 h	1,21 h	1,54 h	2,22 h	2,83 h	3,77 h	5,30 h	8,00 h	24,99 h	190,98 h	unendl. gross

Da die krumme Linie BNRF dieser Höhen von der Mitte AB des Gewölbes nach beiden Seiten abwärts und dann wieder sehr schnell in die Höhe steigt, so lassen sich noch die niedrigsten Punkte R, R′ auf beiden Seiten durch Rechnung bestimmen. Die Höhe GN ist offenbar $= a . \text{Cos } v + \frac{h}{\text{Cos}^3 v}$. Wird der Differenzialkoefficient dieser Funktion, nämlich $- a . \text{Sin } v + \frac{3 h . \text{Sin } v}{\text{Cos}^4 v} = 0$ gesetzt, so gibt der gemeinschaftliche Faktor $\text{Sin } v = 0$ offenbar die grösste Höhe bei B, nämlich $CB = a + h$, und der zweite Faktor $- a + \frac{3h}{\text{Cos}^4 v} = 0$, gibt $\text{Cos } v = \sqrt[4]{\frac{3h}{a}}$, demnach die zugehörige Höhe $Rs = z = \frac{a}{3} \sqrt[4]{\frac{3h}{a}}$. Setzen wir die Gewölbstärke h im Scheitel dem 24sten Theil der Spannweite (2a) gleich oder $h = \frac{2a}{24}$, so ist $\text{Cos } v = \sqrt[4]{½} = \text{Cos } 45°$. Hieraus ersehen wir, dass für jedes freie Tonnengewölbe der Kreisbogen nur bis zum Winkel von $v = 45$ Grad eine Stützlinie abgeben könne; der weitere Bogen würde nämlich eine zu hohe Belastung erfordern, wozu in den obersten Stockwerken, wo solche freie Gewölbe angewendet werden können, der nöthige Raum bis an die Bundtrame des Daches nicht zureicht.

Hiezu gibt uns die §. 366 aufgestellte allgemeine Proportion die nöthige Anleitung. Nennen wir nämlich das Gewicht des obersten Gewölbsteines A, des folgenden B, des dritten C, und die Winkel, welche die Grundflächen dieser Steine mit dem Horizonte bilden, α, β, γ, so ist für die obersten zwei Gewölbsteine $\tan\alpha : \tan\beta = \frac{A}{2} : A + \frac{B}{2} = A : 2A + B$, demnach $B = \frac{A . \tan\beta}{\tan\alpha} - 2A$. Wir erhalten daher die Gewichtszulage, welche der zweite Gewölbstein erfordert, nämlich $B - A = \frac{A . \tan\beta}{\tan\alpha} - 3A$, welche wir $= b$ setzen wollen (I).

Hieraus folgt $B = A + b$ (II).

Für den dritten Stein haben wir auf gleiche Art die Proportion $\tan\alpha : \tan\gamma = \frac{A}{2} : A + B + \frac{C}{2} = A : 2A + 2B + C$, demnach $C = \frac{A . \tan\gamma}{\tan\alpha} - 2(A + B) = \frac{A . \tan\gamma}{\tan\alpha} - 4A - 2b$, und die Zulage auf den dritten Gewölbstein, welche wir c nennen wollen $C - A = \frac{A . \tan\gamma}{\tan\alpha} - 5A - 2b = c$ (III); hieraus folgt $C = A + c$ (IV).

Weiter erhalten wir für den vierten Gewölbstein die Proportion $\tan\alpha : \tan\delta = \frac{A}{2} : A + B + C + \frac{D}{2} = A : 2A + 2B + 2C + D$, demnach $D = \frac{A . \tan\delta}{\tan\alpha} - 2(A + B + C) = \frac{A . \tan\delta}{\tan\alpha} - 2(3A + b + c)$ und die Zulage auf den vierten Gewölbstein, welche wir d nennen wollen $D - A = \frac{A . \tan\delta}{\tan\alpha} - 7A - 2(b + c) = d$ (V). Hieraus ersieht man nun, wie diese Rechnung fortgesetzt und für jeden Gewölbstein die angemessene Belastung gefunden werden könne.

B e i s p i e l. Wir wollen annehmen, die Wölbungslinie sey ein K r e i s.

Theilen wir denselben von 10 zu 10 Graden ein, so kann die halbe Kreisfläche als ein Polygon von 18 Seiten betrachtet werden. Nun beträgt der Winkel a b b′, welcher auf dem Bogen a b von 10 Grad steht, offenbar 5 Grad; der zweite Winkel b c c′, dessen Schenkel den Bogen b a b′ c′ = 30 Grad einschliessen, beträgt 15 Grad, der dritte Winkel 25 Grad ...; die Tangenten aber sind $\tan 5^0 = 0{,}037$, $\tan 15^0 = 0{,}268$, $\tan 25^0 = 0{,}466$, $\tan 35^0 = 0{,}700$. Nehmen wir nun an, dass die Gewölbsteine durchaus einander gleich sind, so ergibt sich die Zulage des zweiten Steines nach der Formel I berechnet, $b = \frac{A . 0{,}268}{0{,}087} - 3A = 0{,}080\,A$. Auf gleiche Art findet man aus dem Ausdrucke III die Zulage für den dritten Stein oder $c = 0{,}196\,A$, ferner nach der Formel V die Zulage für den vierten Stein oder $d = 0{,}494\,A$ u. s. w. Fig. 8. Tab. 18.

Hieraus ersieht man, dass diese Zulagen in einem bedeutenden Verhältnisse steigen; da nun die Tangente des letzten Winkels, nämlich $\tan 85^0 = 11{,}430$ und diese noch mit $\tan\alpha = \tan 5^0 = 0{,}037$ zu dividiren ist, so würde die Zulage des letzten Steines ausserordentlich gross werden. Wollte man diese Zulage durch Ausmauerung

über den Gewölbsteinen bewirken, so müsste eine jede nach den vorigen Formeln berechnete Zulage noch mit dem Cosinus des Stellungswinkels dividirt werden, um die Höhe der auf die Gewölbsteine senkrecht zu stellenden Mauer zu finden. Weil nun $\text{Cos } 85^0 = 0{,}087$, so steigt diese Höhe bei dem letzten Steine abermals in dem Verhältnisse von 87:1000; hieraus ersieht man, dass sich nach der angeführten Rechnung zwar das Gesetz für die Grösse der Belastung der Steine oder die Höhe der Mauerung auf dem Gewölbe finden lässt, dass diese Rechnung jedoch mit Genauigkeit geführt, ausserordentlich mühsam seyn würde.

Eine bessere Uibersicht hievon gibt uns die höhere Analysis, welche zeigt, dass, wenn die Höhe oder Dicke der Gewölbsteine im Scheitel = h ist, bei einem Kreisgewölbe die Höhe der Belastung oder die Höhe der auf jeden Punkt zu stellenden Mauer $= \frac{h}{\text{Cos}^3 v}$ sey, wo unter v der Winkel verstanden wird, wie weit dieser Punkt vom Scheitel entfernt ist. Diese höhere Rechnung zeigt weiter, dass für jedes freie Tonnengewölbe der Kreisbogen nur bis zum Winkel von v = 45 Grad eine Stützlinie abgeben könne, weil für die grössern Winkel die Höhe der Mauerung über das Gewölbe grösser als die Höhe des Gewölbes im Scheitel, für den tiefsten Punkt aber oder für v = 90 Grad diese Höhe unendlich gross werden würde.

§. 376.

Aehnliche Resultate ergeben sich für die **Elypse**, welche für ein freyes Tonnengewölbe, wobei die Dicke des Gewölbes im Scheitel oder die Höhe $h = \frac{2a}{24} = \frac{}{24}$tel der Spannweite ist, nur bis zum Winkel von 38 Grad 31 Minuten anwendbar ist, übrigens aber bei dem letzten Punkte oder dem Winkel v = 90 Grad abermals eine Aufmauerung von unendlich grosser Höhe statt finden müsste. *)

*) Auf gleiche Art findet man die nöthige **Belastung für den elyptischen Gewölbsbogen**. Setzen wir nämlich die halbe grosse Achse $CD = A'C = a$, die halbe kleine Achse $AC = b$ und den Winkel $A'CM' = v$, so ist, wie zuvor $MP = M'P' = a . \text{Sin } v$, demnach
Fig. 9. Tab. 18. $om = a . dv . \text{Cos } v$ und die Durchschnittsfläche der Belastung oder $ABNM = \int z . a . dv . \text{Cos } v$, die nun der Tangente des Stellungswinkels Mmo proportional seyn muss.

Weil die Ordinaten MG der Elypse zu den Ordinaten M′G im Kreise und auch zu ihren Differenzen in dem beständigen Verhältnisse b : a stehen, so verhält sich auch die Tangente des Winkels Mmo, den wir mit φ bezeichnen wollen, zur Tangente des Winkels M′m′o′ oder tang v wie b : a, woraus $\text{tang } \varphi = \frac{b . \text{tang } v}{a}$ folgt. Setzen wir nun das Verhältniss $\int z . a . dv . \text{Cos } v : \frac{b . \text{tang } v}{a}$ auf gleiche Art $= m . h : 1$, so haben wir die Gleichung $m . h . \frac{b . \text{tang } v}{a} = \int z . a . dv . \text{Cos } v$. Das Differenziale dieser Gleichung ist $\frac{m . h . b . dv}{a . \text{Cos}^2 v} = z . a . dv . \text{Cos } v$, und hieraus $z = \frac{m . h . b}{a^2 . \text{Cos}^3 v}$. Weil aber im Scheitel die Höhe $z = AB = h$ seyn muss, so ist $h = \frac{m . h . b}{a^2}$, folglich $\frac{m . b}{a^2} = 1$; daher die **allgemeine Gleichung für die Belastung eines elyptischen Gewölbes** $z = \frac{h}{\text{Cos}^3 v}$, wie bei dem Kreisgewölbe. Um die kleinste Höhe Rr der Belastungslinie über dem Hori-

§. 377.

Wir kommen nunmehr zur Untersuchung der Bedingnisse, unter welchen Gewölbe ohne jene Belastung, die in den zwei vorhergehenden §. §. berechnet wurde, sich zu erhalten im Stande sind, und wollen wieder zuerst die Umstände aufsuchen, unter welchen ein freies Kreisgewölbe sich selbst zu erhalten vermag. *)

zonte zu finden, müssen wir zu MN noch die Höhe $MG = \frac{b}{a} \cdot M'G = \frac{b}{a} . a . \text{Cos } v = b . \text{Cos } v$ addiren und erhalten demnach $NG = \frac{h}{\text{Cos}^3 v} + b . \text{Cos } v$. Setzen wir wieder den Differenzialcoeffizienten $- b . \text{Sin } v + \frac{3h . \text{Sin } v}{\text{Cos}^4 v} = 0$, so gibt diess, wie bei dem Kreisgewölbe für den einen Faktor $\text{Sin } v = 0$, in der Mitte des Gewölbes die Höhe $BC = b + h$, und für den andern Faktor $- b + \frac{3h}{\text{Cos}^4 v} = 0$, ist $\text{Cos } v = \sqrt[4]{\frac{3h}{b}}$, demnach die Höhe $Rs = z = \frac{b}{3} \sqrt[4]{\frac{3h}{b}}$. Fig. 9. Tab. 18.

Beispiel. Es sey $b = \frac{2}{3} a$ und $\frac{h}{a}$ wie vorher $= \frac{1}{12}$, so ist $\text{Cos } v = \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = 0{,}7825 = \text{Cos } 38^0$ $31^{\text{Min.}}$, demnach kann für ein freies Tonnengewölbe der elyptische Bogen nur bis zu dem Winkel von $38\frac{1}{2}$ Grad eine Stützlinie abgeben, und der weitere Bogen erfordert eben so wie bei der Kreislinie eine Belastung, welche die Höhe des Gewölbes übersteigt.

*) Um die Stützlinie für das Kreisgewölbe A″M″D″D′M′A′ zu finden, sey AMSD die Mittellinie durch die Gewölbsteine. Da der Kreisbogen AM nicht die Eigenschaft hat, dass die Tangenten der Stellungswinkel den darauf ruhenden Lasten proportional wären, so wollen wir annehmen, dass diese Eigenschaft der krummen Linie BNS zukomme, welche so beschaffen ist, dass sie die Mittellinie AMD bei S, wo der Stellungswinkel 45 Grad beträgt, berührt, übrigens aber sowohl aufwärts als abwärts die Eigenschaft besitzen muss, dass die Tangenten der Stellungswinkel Nni der zu stützenden Last A′N′N″A″ proportional sind. Fig. 10.

Die zu stützende Fläche A′N′N″A″ ist offenbar der Fläche A′M′M″A″ gleich, weil die zwei Dreiecke MM′N′ und MM″N″ einander gleich und ähnlich sind. Setzen wir die Höhe der Gewölbsteine im Scheitel $A'A'' = \delta$ und den Winkel $ACM = v$, den Halbmesser $AC = a$, so ist der Bogen $AM = a . v$ und die Fläche $A'M'M''A'' = \delta . a . v =$ der Fläche A′N′N″A″. Eben so ist die Fläche $A'S'S''A'' = \frac{a . \pi . \delta}{4}$. Weil die zu stützenden Flächen den Tangenten der Stellungswinkel an ihren Endpunkten proportional seyn müssen, so erhalten wir $A'S'S''A'' : A'N'N''A'' = \text{tang } 45^0 : \text{tang } Nni$ oder $\frac{a . \pi . \delta}{4} : \delta . a . v = 1 : \frac{Ni}{ni}$, woraus $Ni = \frac{4v}{\pi} \cdot ni$ ist.

Da für den Kreis $MP = a . \text{Sin } v$, folglich $a . dv . \text{Cos } v = mo = ni$ und wenn wir $QN = z$ setzen und $Ni = dz$ ist, so erhalten wir $dz = \frac{4a}{\pi} . v . dv . \text{Cos } v$. Das Integral dieser Gleichung gibt $z = \frac{4a}{\pi}\left(v . \text{Sin } v + \text{Cos } v - 1\right)$. Setzen wir für den Punkt S in dieser Gleichung $v = \frac{\pi}{4}$ oder $\text{Sin } v = \text{Cos } v = \text{Sin } 45 = \text{Cos } 45 = 0{,}707107$, so erhalten wir $z = BT = BA + AT = BA + a\left(1 - 0{,}707107\right) = \frac{4a}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}707107 + 0{,}707107 - 1\right)$ und hieraus $\frac{BA}{AC} = 0{,}041292$.

Hieraus ersehen wir, dass die Stützlinie des Kreisgewölbes um die Grösse BA oder $0{,}041292\ AC = \frac{AC}{24{,}2}$ hinauf steigt; soll demnach der Stützpunkt B sich noch innerhalb des Kreisge-

Wenn wir zu dieser Absicht den halben Kreis in vier gleiche Theile theilen, und jeden Theil als ein für sich bestehendes Prisma betrachten, so wird der

Fig. 10. Tab. 18. wölbes befinden, so muss im Scheitel die Höhe $A A' = \frac{\delta}{2}$ wenigstens $= \frac{A C}{24}$, folglich $\delta = \frac{2 A C}{24} = \frac{2 D C}{24}$ seyn. Hierauf gründet sich die praktische Regel der Baumeister, welche gewöhnlich den 24ten Theil der Spannweite für die Dicke des Gewölbes anzunehmen pflegen.

Um die Stützlinie zu zeichnen, bemerken wir vorläufig, dass $B C = Q G$ oder $B A + A C = Q N + N M + M G$, demnach $M N = B A + A C - Q N - M G =$ $= 0{,}041292\, a + a - z - a \,.\, \mathrm{Cos}\, v = a\,(2{,}314532 - 2{,}273240\ \mathrm{Cos}\ v - 1{,}273240\ v \,.\, \mathrm{Sin}\ v)$. Nach dieser Gleichung wurden die Höhen der Stützlinie über der Mittellinie des Gewölbbogens für die Winkel $v = 10, 20, 30, 40 \ldots$ Grad berechnet, und wie folgt gefunden:

Winkel v	0	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	75°	80°	90°
Höhe M N	0,0413.a	0,0372.a	0,0265.a	0,0125.a	0,0018.a	0,0000.a	0,0022.a	0,0232.a	0,0753.a	0,1163.a	0,1690.a	0,3145.a

Trägt man Fig. 11 diese berechnete Höhen der Stützlinie über der Mittellinie des Gewölbes nach ihrer verhältnissmässigen Grösse auf, so wird ersichtlich

Fig. 11. 1tens, dass die Stützlinie für das freie Kreisgewölbe über die Mittellinie des Gewölbes im Scheitel um 0,0413 oder um $\frac{1}{24}$tel des Halbmessers aufsteigt, und wenn aus dem Punkte S'' die Linie S'' w'' A zur Stützlinie parallel gezogen wird, diese Linie die Mitte der Gewölbsteine bei A erreichen werde, woraus demnach erhellet, dass die Festigkeit des Gewölbes nur auf dem stützenden Raume S A' A'' S'' beruhe und von dem Kreisbogen von 45 Grad, der Theil S S' A' nur als darauftliegend und dagegen der Theil S'' A A'' als an dem Stützraume hängend betrachtet werden müsse.

2tens. Dass sonach das Gewölbe unten nur auf der Basis S S'' ruht, und oben an die Fläche A A' als angelehnt zu betrachten sey und daher die Stabilität hinsichtlich dieses Bogens nur die halbe Dicke des Gewölbes zu ihrem Maasse habe. Die Fläche des Gewölbes von A' A'' bis S' S'' beträgt $\frac{\pi \,.\, a . \delta}{4}$, welche als Druck bei S senkrecht herabwirkt. Weil aber die Stützlinie bei S mit der Horizontalen einen Winkel von 45 Graden macht, so ist auch der horizontale Druck dieselbe Grösse. Eben so gross ist auch der horizontale Druck in jedem andern Punkte der Stützlinie.

Da die Stützlinie oben im Scheitel der Mittellinie um die halbe Gewölbdicke hinaufsteigt, so ergibt sich, dass man bei dem Schlusse des Gewölbraumes bei A' A'' die Vorsicht anwenden müsse, dass der Schlusstein nicht unter den Kreisbogen des Gewölbes herabgedrückt werde; praktische Baumeister pflegen demnach bei dem Schlusse grosser Gewölbe nicht nur unter den Lehrbogen bei A eine Stütze anzubringen, sondern auch auf die Verschalung des Gewölbbogens etwas aufzulegen, um dadurch den Gewölbbogen im Scheitel etwas höher zu erhalten, damit derselbe bei dem Setzen des Gewölbes nicht unter die gehörige Höhe herabsinken könne.

Weiter ist zu ersehen, dass die Stützlinie von 45 Grad abwärts abermals die Mittellinie übersteigen, beiläufig bei 75 Grad über die Oberfläche des Gewölbes austreten und der senkrechten Widerlagsmauer in U begegnen würde.

Da durch diesen Austritt die Stützung des Gewölbes verloren gehen, folglich ein Bruch des Gewölbes erfolgen müsste, so pflegt man die Kreisgewölbe von 45 Grad abwärts zu hintermauern. Es versteht sich aber von selbst, dass dieses Mauerwerk in die Gewölbsteine selbst eingebunden werden müsse, damit dasselbe den Gewölbedruck vollkommen aufnehmen und bis zur Widerlagsmauer bei U gehörig zu stützen im Stande seyn möge.

Fig. 10. Um den Punkt U, wo die Stützlinie die Widerlagsmauer erreicht, zu finden, ist zu bemerken, dass

$\mathrm{Cos}\, U' C D = \mathrm{Sin}\, v' = \frac{C D''}{C U'} = \frac{a - \frac{\delta}{2}}{a} = 1 - \frac{\delta}{2 a} = \frac{23}{24} = \mathrm{Sin}\ 73^{\circ}\ 24^{\mathrm{Min.}}$. Für diesen Winkel findet man nach der obigen allgemeinen Gleichung für z die Linie $z' = U U'' = 0{,}65356\ a$, folglich

Winkel ABF, den das erste Viertheil mit dem Horizonte macht, weil er einen Bogen von 45 Grad überspannt $= 22{,}5^0$ und der Winkel BDN, den das untere Viertheil mit dem Horizonte bildet $= 67{,}5^0$ seyn. Fig. 1. Tab. 19.

Bereits bei den gebrochenen Dächern wurde gezeigt, dass für den Fall, als zwei gleich lange und gleich schwere Prismen sich auf diese Art im Gleichgewichte erhalten sollen, der Winkel ABF $= 30^0$, und BDN $= 60^0$ seyn müsse; demnach ist für unsern Fall im Kreise der obere Winkel zu klein, der untere aber zu gross. Diess bestättigt auch die Erfahrung; stellt man nämlich vier Stücke Holz auf die Art zusammen, dass ihre Endpunkte D, B, A, C und M in der Peripherie eines Kreises liegen, und überlässt nun diese Stücke ihrer freien Stellung, so werden sogleich die untern zwei Theile von den obern auswärts gedrückt und die obern fallen herab.

Wir wollen daher den halben Kreis in mehr als vier, und zwar in sechs Theile theilen; ein jeder Theil AB, BD, DE überspannt daher einen Winkel von 30 Grad, und es sind die Peripherie-Winkel ABF $= 15^0$ und BDN $= 45^0$, endlich DEC $= 75^0$. Sollen nun die obern zwei Theile AB und BD einander das Gleichgewicht halten, so muss $\text{tang ABF} : \text{tang BDN} = \frac{A}{2} : A + \frac{B}{2} = 1:3$ seyn, da die Stücke AB $=$ BD oder A $=$ B sind. Weil nun der untere Winkel BDN $= 45^0$ und seine Tangente $= 1$ ist, so müsste die obere Tangente oder tang ABF $= \frac{1}{3} = 0{,}3333$ seyn. Da aber tang $15^0 = 0{,}2679$ ist, so sieht man, dass der Winkel ABF $= 15^0$ zu klein sey. Fig. 2.

Ein Gleichgewicht kann daher nur dann statt finden, wenn von B oberhalb AB eine Linie nach G gezogen, und die Masse des ersten Gewölbtheiles als an dieser Linie hängend gedacht wird. Zur Bestimmung dieses Punktes G wollen wir den Halbmesser oder die halbe Weite des Kreisgewölbes EC $=$ a setzen, so ist $BF = a . \text{Sin } 30^0 = \frac{a}{2}$, ferner $FA = AC - FC = a - \sqrt{(BC^2 - BF^2)} = a - a . \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{a}{8}$ beinahe. Soll sich das Gewölbe im Punkte G gehörig stützen, so muss $\frac{FG}{BF} = \frac{1}{3}$ seyn, und da $BF = \frac{a}{2}$ ist, so folgt $FG = \frac{a}{6}$. Hieraus ergibt sich die Entfernung AG, wo sich der oberste Gewölbtheil stützt $= FG - AF = \frac{a}{6} - \frac{a}{8} = \frac{a}{24}$.

Wenn man sich daher bei einem Kreisgewölbe am Schlusse von dem untern Punkte A den 24ten Theil des Halbmessers aufträgt, so erhält man den Punkt G, an welchen der Druck des Gewölbes übergeht.

$D''U = AC + AB - UU'' = a + 0{,}0413 . a - 0{,}6536 . a = 0{,}3877 . a$. Die Stützlinie trifft daher die Widerlagsmauer U'U'' auf der Höhe $D''U = 0{,}3877 . a$ über dem Kämpfer. Fig. 10.

Obwohl durch die Hintermauerung das Gewicht des Gewölbes noch um etwas vermehrt, demnach auch die Stützlinie etwas herabgedrückt wird, so werden wir doch bei der Berechnung der Stärke der Widerlagen annehmen, dass bei U nebst dem horizontalen Drucke $\frac{\pi . a . \delta}{4} = 0{,}7854 . a . \delta$ noch das Gewicht des Gewölbes $AU' . A'A'' = 1{,}2811 . a . \delta$ senkrecht herabdrücke. Dadurch bestimmt sich der Winkel, welchen die Stützlinie in dem Punkte U mit der Horizontalen bildet, nämlich $\text{tang SUw} = \frac{1{,}2811 . a . \delta}{0{,}7854 . a . \delta} = 1{,}6311$, mithin der Winkel $SUw = 58^0\ 30^{Min}$.

Fig. 2. Tab. 19. Wäre daher das Gewölbe im Schlusse schwächer als $\frac{a}{24}$, so würde dieser Druck über die Gewölbsdicke hinausfallen, demnach an dem gegenüber stehenden Gewölbtheile keine Unterstützung finden, und der Einsturz des Gewölbes nicht gehindert werden können. Es bleibt hiebei noch zu bemerken, dass $\frac{a}{24}$ die geringste Stärke des Gewölbes im Scheitel ist, und dass man, wenn man auf einige Sicherheit rechnen will, den Stützpunkt G des Gewölbes in die Mitte der Gewölbdicke (δ) zu setzen hat, woraus die Dicke des Gewölbes im Schlusse $\delta = \frac{2a}{24}$ folgt. Da die Entfernung $EH = 2a$ ist, so folgt hieraus die von praktischen Baumeistern angenommene Regel, dass man, um die Gewölbsdicke im Schlusse zu erhalten, die Spannweite des Gewölbes im Lichten durch 24 dividiren müsse. Dass in diesem Falle die Stabilität des Gewölbes nur auf der Grösse $\frac{\delta}{2}$ beruhe, versteht sich von selbst.

Hiebei ist noch zu bemerken, dass bei der Herstellung des Gewölbes die Gewölbsteine zu beiden Seiten vom untern Ende nach und nach gegen die Mitte auf den Lehrbogen gelegt werden; der mittlere Gewölbstein (Schlusstein) muss jedoch, da er frei senkrecht herabhängt, mit grosser Kraft eingekeilt werden, um dem horizontalen Drucke, den das Gewölbe im Scheitel äussert, den gehörigen Widerstand zu leisten. Weil aber der Lehrbogen sehr leicht dem Drucke, der durch dieses Einkeilen entsteht, nachgeben, folglich derselbe, und mit ihm auch das Gewölbe am Schlusse zu tief herab gedrückt werden kann, so ist die Vorsicht nöthig, den Lehrbogen an diesem Orte zu unterstützen, damit er nicht nachgibt. Erfahrene Baumeister pflegen aber überdiess noch den obersten Gewölbsteinen etwas unterzulegen, damit auf solche Art das Gewölbe höher gehalten werde, und wenn es sich nach dem Ausschlagen der Lehrbögen setzt, den gehörigen Stand erhalten möge.

Nachdem auf diese Art die zwei obern Theile des Gewölbes A B und B D in das Gleichgewicht gestellt wurden, bleibt nur noch die Stützlinie für den 3ten Theil D E des Gewölbes zu suchen.

Wenn der 2te Theil B D des Gewölbes von dem dritten D E gehörig gestützt werden soll, so muss sich $\tan\beta : \tan\gamma = 3 : 5$ verhalten, und da $\tan\beta = 1$ ist, so muss $\tan\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}6667$ seyn. Diess entspricht einem Winkel von beinahe 59 Grad. Nun ist aber im Kreise der Winkel $DEC = 75^\circ$; man sieht daher, dass die Stützlinie hinter den Punkt E gegen die Widerlagsmauer zurücktritt, folglich aus dem Gewölbbogen austreten müsse. Um diess zu verhüten, pflegt man in der Ausübung die Winkel, welche die Widerlagsmauern mit dem Gewölbe beiderseits bilden, von unten bis zum Bogen von 45° auszumauern. Diess Mauerwerk oder die sogenannte Hintermauerung muss jedoch in das Gewölbe eingebunden werden, um hiemit eine Masse zu bilden, innerhalb welcher die Stützlinie nunmehr verbleibt.

Da hiedurch die Rechnung geändert wird, so pflegt man bei dem Winkel von 45 Grad aus dem Punkte K die Tangente K J zu ziehen, und die innere Linie der Widerlagsmauer von E bis nach J zu verlängern. Wird nun J mit C verbunden, so sieht man, dass

K J = E J seyn müsse; da aber der Winkel K C E einen Bogen von 45° überspannt, so Fig. 2.
muss der Winkel J C E = 22,5 Grad seyn, demnach die Höhe E J = a . tang 22,5 = 0,4142 . a Tab.
seyn. Auf solche Art erhält man den Punkt J, von welchem man annehmen kann, dass 19.
hiebei die Stützlinie des Gewölbes in die Widerlagsmauer eintritt. Eine genauere Berechnung hierüber ist in der Note unter dem Texte enthalten.

Wir haben daher bei J denjenigen Punkt, wo das Gewölbe mit seiner ganzen Last A B D E . $\delta = \frac{11}{7} . a . \delta$ senkrecht herabdrückt. Nebst dem ist noch der horizontale Druck in J vorhanden, welcher, da er in allen Punkten der krummen Linie gleich ist, am leichtesten bei K bestimmt wird; das Gewicht des Gewölbes von A bis K ist nämlich $= \frac{11}{14} . a . \delta$, und weil für K die tang 45° = 1, folglich der horizontale Druck so gross als der senkrechte ist, so haben wir auch bei J den horizontalen Druck $= \frac{11}{14} . a . \delta$.

Theilt man daher die Linie J E in 2 gleiche Theile J M = M E und trägt von J nach der horizontalen Richtung die Grösse J L = J M auf, so gibt die Diagonale J O des Parallelogrammes J L O M die Richtung, nach welcher das freie Kreisgewölbe gegen die Widerlagen drückt. Hievon werden wir bei der Bestimmung der Stärke der Widerlagsmauern Gebrauch machen.

§. 378.

Eine ähnliche Rechnung ergibt sich auch bei der Ausmittlung der Stützlinie für das elyptische Gewölbe *). Hierbei verhält sich jedoch der horizontale Druck

*) Auf gleiche Art lässt sich die Stützlinie für ein elyptisches Gewölbe finden. Es sey Fig. 3.
die Mittellinie des elyptischen Gewölbes A M S D, die halbe grössere Achse der Elypse C D = a,
die halbe kleinere A C = b, die Dicke des Gewölbes A' A'' = δ und der Winkel p C F = v. Vorläufig wollen wir bemerken, dass man die Querschnittsfläche des elyptischen Gewölbes zur Bestimmung des hiezu nöthigen Materials u. s. w. auf folgende allgemeine Art bestimmen könne:

Die Fläche der äussern Elypse C A' D' ist =
$\frac{\pi}{4} \cdot \left(a + \frac{\delta}{2}\right)\left(b + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left\{a . b + (a + b)\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4}\right\}$, die innere Fläche C A'' D'' =
$\frac{\pi}{4}\left(a - \frac{\delta}{2}\right)\left(b - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left\{a . b - (a + b)\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4}\right\}$. Wird die zweite Fläche von der ersten abgezogen, so erhalten wir die Fläche des elyptischen Gewölbes A' S' D' D'' S'' A'' $= \frac{\pi}{4}(a + b)\,\delta$; daraus ist ersichtlich, dass die elyptische Gewölbfläche der Gewölbfläche eines Kreises gleich ist, welcher die Grösse $\frac{a + b}{2}$ zum Halbmesser, und die Höhe der Gewölbsteine δ zur Höhe hat, folglich, dass man die Länge des Gewölbbogens A S D $= \frac{\pi}{4}(a + b)$ setzen könne, welche mit der winkelrecht darauf stehenden Höhe δ multiplizirt die Fläche des Gewölbes gibt. Wir können demnach auch die Fläche von A bis M = A M . δ = s . δ und jene von A bis S = A S . $\delta = \beta . \delta$ setzen, wenn nämlich der elyptische Bogen A M = s und der elyptische Bogen A S = β gesetzt wird.

Da diese Flächen den Tangenten der Stellungswinkel, welche die Stützlinie mit dem Horizonte macht, proportional seyn müssen, so haben wir $s . \delta : \beta . \delta$ = tang N n i : tang K S k $= \frac{Ni}{ni} : \frac{Kk}{Sk}$.

zum senkrechten, wie sich a : b verhält, wo mit a die halbe grössere Achse oder die halbe Spannweite, und mit b die halbe kleinere Achse oder die Höhe des Gewölbes in der Mitte bezeichnet wird.

Fig. 3. Tab. 19. Setzen wir itzt die Coordinaten der Stützlinie $BQ = x$ und $QN = z$, so ist $\frac{Ni}{ni} = \frac{dz}{dx}$. Weil aber $x = BQ = MP = a . \mathrm{Sin}\, v$, so ist $dx = a . dv . \mathrm{Cos}\, v$ sonach $\frac{Ni}{ni} = \frac{dz}{a . dv . \mathrm{Cos}\, v}$.

Für den Punkt S ist allgemein für den Kreis $tR = a . \mathrm{Cos}\, v'$, folglich in der Elypse $SR = b . \mathrm{Cos}\, v'$ und $CR = a . \mathrm{Sin}\, v'$, mithin $\frac{Kk}{Sk} = \frac{d . SR}{d . CR} = \frac{b . dv' . \mathrm{Sin}\, v'}{a . dv' . \mathrm{Cos}\, v'} = \frac{b}{a}$ tang v'; weil aber für den Punkt S, $v' = 45°$ so ist $\frac{Kk}{Sk} = \frac{b}{a} \cdot \mathrm{tang}\, 45 = \frac{b}{a}$. Werden nun diese Werthe in die obige Proportion gesetzt, so erhalten wir $s . \delta : \beta . \delta = \frac{dz}{a . dv . \mathrm{Cos}\, v} : \frac{b}{a}$, hieraus folgt $dz = \frac{s . b . dv . \mathrm{Cos}\, v}{\beta}$. Um diese Gleichung zu integriren, muss der Bogen s durch eine Funktion von v, und auf gleiche Art auch β durch eine Funktion des Bogens von 45 Graden ausgedrückt werden. Hiezu dient die allgemeine Gleichung für die Punkte M in der Elypse, für welche die Abscisse $x = PM = HJ = a . \mathrm{Sin}\, v$ und die Ordinate $y = GM = b . \mathrm{Cos}\, v$, woraus folgt $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a . dv . \mathrm{Cos}\, v)^2 + (b . dv . \mathrm{Sin}\, v)^2$, folglich $ds = dv \sqrt{(a^2 . \mathrm{Cos}^2\, v + b^2 . \mathrm{Sin}^2\, v)}$. Setzen wir nun das Quadrat der Excentricität $e^2 = a^2 - b^2$, folglich $b^2 = a^2 - e^2$, so ist $ds = a . dv \sqrt{\left(1 - \frac{e^2}{a^2} \cdot \mathrm{Sin}^2 v\right)} = a . dv \left(1 - \frac{e^2}{2a^2} \cdot \mathrm{Sin}^2 v\right)$ beinahe. Wird diese Gleichung integrirt, so ist $s = a . v - \frac{e^2}{4a}(v - \mathrm{Sin}\, v . \mathrm{Cos}\, v)$; für den Winkel von 45 Grad ist $v = \frac{\pi}{4}$ und $\mathrm{Sin}\, v . \mathrm{Cos}\, v = \frac{1}{2}$, also der Bogen

$AS = \beta = \frac{a . \pi}{4} - \frac{e^2}{4a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$. Werden diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, so erhalten wir:

$$\left\{\frac{a . \pi}{4} - \frac{e^2}{4a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} dz = a . b . dv . v . \mathrm{Cos}\, v - \frac{e^2}{4a} \cdot b . dv . \mathrm{Cos}\, v\,(v - \mathrm{Sin}\, v . \mathrm{Cos}\, v).$$

Wird diese Gleichung integrirt, so erhalten wir:

$$\left\{\frac{a . \pi}{4} - \frac{e^2}{4a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} . z = a . b\,(v . \mathrm{Sin}\, v + \mathrm{Cos}\, v - 1) + \frac{e^2 . b}{4a}\left(\frac{1 - \mathrm{Cos}^3 v}{3} - v . \mathrm{Sin}\, v - \mathrm{Cos}\, v + 1\right).$$

Mit dem Coefficienten von z dividirt und die vierten Potenzen von $\frac{e}{a}$ vernachlässigt, gibt

$$z = b\left(\frac{v . \mathrm{Sin}\, v + \mathrm{Cos}\, v - 1}{\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{e^2 . b}{2a^2 . \pi}\left\{\frac{2 - 2\,\mathrm{Cos}^3 v}{3} - \left(\frac{v . \mathrm{Sin}\, v + \mathrm{Cos}\, v - 1}{\frac{\pi}{4}}\right)\right\}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $v = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$, $\mathrm{Sin}\, v = \mathrm{Cos}\, v = 0{,}7071$ und $\mathrm{Cos}^3 v = 0{,}3535$, so wird

$WS = z' = b\left(0{,}3342 + \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0154\right)$. Weil ferner $WR = BC$ oder $WS + SR = BA + AC$ ist, so findet man die Erhöhung der Stützlinie im Scheitel über der Mittellinie des Gewölbes

$BA = WS + SR - AC = b\left(0{,}3342 + \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0154\right) + b . \mathrm{Cos}\, 45 - b = b\left(0{,}0413 + \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0154\right)$.

Die Elypse wird zu einem Kreise, wenn $b = a$ oder $e = o$ ist, in diesem Falle stimmt die Erhöhung B A mit der überein, die wir für den Kreis gefunden haben. Setzen wir für die Elypse $b = \frac{2}{3}a$, so ist $\frac{e^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ und $BA = 0{,}036 . a$. Diese Erhöhung war beim Kreise $= 0{,}041 . a$, folg-

Der **senkrechte Druck** ist abermals das Gewicht des halben Gewölbes $\frac{11}{7}(a+b)\,\delta$, der **horizontale Druck** ist $= \frac{11}{14} \cdot \frac{a}{b}(a+b)\,\delta$, und die Höhe E I, wo sich der Druck der Stützlinie an der Widerlage äussert, ist $= 0{,}414 \,.\, b$.

lich um 0,005 . a grösser; als bei dem gedrückten Gewölbe; daraus ergibt sich, dass, wenn man bei der Elypse, so wie beim Kreise die Stärke des Gewölbes $\delta = \frac{2a}{24}$ setzt, für die Breite des stützenden Bogens 0,046 . a, statt wie beim Kreise nur 0,041 . a bleibt, dass folglich die Basis für die Stabilität des elyptischen Gewölbes in dem angenommenen Falle um $\frac{5}{41}$ oder $\frac{1}{8}$ **grösser** seyn werde, als es bei dem Kreise der Fall war.

Die Höhe MN, um welche die Mittellinie des Gewölbes von der Stützlinie in jedem Punkte überstiegen wird, ergibt sich auf ähnliche Art, wie bei dem Kreisgewölbe aus der Gleichung $MN = BA + AC - MG - QN = b\left(0{,}0413 + \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0154\right) + b - b \,.\, \text{Cos}\; v - z$. Setzt man in dieser Gleichung für MN, so wie in der obigen für z statt des Winkels v die Werthe 10, 20, 30 u. s. w., so ergeben sich nachstehende Werthe:

v in Graden	Tiefe der Stützlinie unter dem Scheitel $= z$	Höhe der Stützlinie über der Mittellinie des Gewölbes $= MN$
0	$0 + 0$	$0{,}0413 \,.\, b + 0{,}0154 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
10	$0{,}0192 \,.\, b + 0{,}0017 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0372 \,.\, b + 0{,}0137 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
20	$0{,}0752 \,.\, b + 0{,}0061 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0265 \,.\, b + 0{,}0093 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
30	$0{,}1627 \,.\, b + 0{,}0128 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0125 \,.\, b + 0{,}0026 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
40	$0{,}2735 \,.\, b + 0{,}0149 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0018 \,.\, b + 0{,}0005 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
45	$0{,}3342 \,.\, b + 0{,}0154 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0000 \,.\, b + 0{,}0000 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
50	$0{,}3963 \,.\, b + 0{,}0148 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0022 \,.\, b + 0{,}0006 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
60	$0{,}5181 \,.\, b + 0{,}0105 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0232 \,.\, b + 0{,}0049 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
70	$0{,}6240 \,.\, b + 0{,}0025 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}0753 \,.\, b + 0{,}0129 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$
80	$0{,}6986 \,.\, b - 0{,}0056 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$	$0{,}1690 \,.\, b + 0{,}0210 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$

Aus dieser Tabelle ersehen wir **erstens**, dass die Stützlinie, so wie wir bereits bemerkt haben, nur um die Grösse $0{,}0413 \,.\, b + 0{,}0154 \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot b$ im Scheitel über die Mittellinie aufsteigt, und in dieser Hinsicht beim Schlusse des Gewölbes dasselbe zu bemerken sey, was bereits beim Kreise angeführt worden.

2tens. Da die Stützlinie bei dem Winkel $v = 45^0$ den elyptischen Bogen AMS in S berührt, so ist, da die Länge des Gewölbbogens bis zu $v = 45$ Grad oder von A bis S die Grösse $\beta = \frac{a \,.\, \pi}{4} - \frac{e^2}{4a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ zu seinem Maasse hat, die Fläche, welche bei S senkrecht

Diese Ausdrücke werden später wieder zur Bestimmung der Stärke der Widerlagsmauern dienen. Die genaue Rechnung über diesen Gegenstand ist abermals in der Note enthalten.

Fig. 3. Tab. 19.

herabdrücht $\left\{\frac{a \cdot \pi}{4} - \frac{e^2}{4a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} \delta = \frac{\cdot \pi \cdot \delta}{4}\left(1 - \frac{e^2}{11 \cdot a^2}\right)$. Bei S ist aber tang K S k $= \frac{b}{a}$, folglich ist der horizontale Druck $= \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \delta}{4b}\left(1 - \frac{e^2}{11 \cdot a^2}\right)$. Dieser horizontale Druck ist daher grösser als beim Kreise, und zwar um so grösser, je kleiner die Höhe der Mitte des Gewölbes b gegen die halbe Spannweite a angenommen wird.

3tens. Vom Punkte S abwärts erhöhet sich abermals die Stützlinie über die elyptische Mittellinie des Gewölbes. Der Punkt U, in welchem die Stützlinie die Widerlagsmauer trifft, ergibt sich abermals aus dem Winkel A C u. Es ist nämlich Sin A C u $= \frac{C D''}{C u} = \frac{a - \frac{\delta}{2}}{a}$, und wenn hier abermals die Grösse $\delta = \frac{2a}{24}$ angenommen wird, so findet man Sin A C u $= \frac{a - \frac{1}{24}a}{a} = \frac{23}{24} =$ Sin $73° 24'$, mithin eben so gross, wie beim Kreise. Für diesen Winkel findet man nach der obigen allgemeinen Gleichung für z die Linie $z' = U U'' = b\left(0{,}6536 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0005\right)$, folglich

$$D''U = BA + AC - UU'' = b\left(0{,}0413 + \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0154\right) + b - b\left(0{,}6536 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0005\right) =$$

$b\left(0{,}3877 + 0{,}0159 \cdot \frac{e^2}{a^2}\right)$ als die Höhe, auf welcher die Stützlinie die Widerlagsmauer U U'' über den Kämpfern D' D'' trifft. Da diese Höhe abermals grösser ist, als die Höhe, auf welcher der obere oder äussere elyptische Gewölbbogen der Widerlage begegnet, so ist auch hier eine Hintermauerung und ihre Einbindung in das fortlaufende Gewölbe, so wie beim Kreise nothwendig.

4tens. Die Länge des Gewölbbogens von A bis U ist nach der obigen Gleichung für

$$s = a\left\{v - \frac{e^2}{4a^2}\left(v - \text{Sin } v \cdot \text{Cos } v\right)\right\},$$

wenn statt v der Bogen von $73° 24'$ oder $1{,}2811$ gesetzt wird, $= a\left(1{,}2811 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}2518\right)$, mithin der in U wirksame vertikale Druck $=$ $a \cdot \delta\left(1{,}2811 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}2518\right)$ und der horizontale Druck wie oben

$$= \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \delta}{4b}\left(1 - \frac{e^2}{11 \cdot a^2}\right) = \frac{a^2 \cdot \delta}{b}\left(0{,}7854 - \frac{e^2}{14 \cdot a^2}\right).$$

Daraus ergibt sich die Tangente des

$$\text{Winkels S U w} = \frac{a \cdot \delta\left(1{,}2811 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}2518\right)}{\frac{a^2 \cdot \delta}{b}\left(0{,}7854 - \frac{e^2}{14 \cdot a^2}\right)} = \frac{b}{a}\left(1{,}6311 - \frac{e^2}{a^2} \cdot 0{,}0172\right).$$

Uibrigens sieht man, dass der vertikale Druck des elyptischen Gewölbes an den Widerlagen fast eben so gross ist, wie für das Kreisgewölbe, dagegen aber der horizontale Druck des elyptischen in dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ grösser ist, als beim Kreisgewölbe. Es erfordert daher ein elyptisches Gewölbe in eben dem Maasse stärkere Widerlagsmauern als ein Kreisgewölbe.

§. 379.

Auf die meisten Gewölbe werden gewöhnlich noch andere Lasten gelegt, wie es z. B. bei Brückengewölben der Fall ist. Wird nämlich über dieselben eine horizontale Strasse geführt, und der Raum zwischen dem Gewölbe und der Strasse zum Theil ausgemauert, zum Theil aber mit einem schweren Materiale ausgeschüttet, so hat das Gewölbe nebst seiner eigenen Last noch die bis zur Oberfläche der Brücke reichende Belastung zu tragen. In demselben Falle befinden sich auch die Gewölbe für Keller und andere Gewölbe, auf welchen die darüber befindlichen Räume zur Bewohnung hergerichtet, und gewöhnlich auch bis zur Horizontallinie angeschüttet werden.

Die genaue Rechnung für den Lehr- und Stützbogen eines Brückengewölbes folgt hier unter dem Texte *); bezeichnet nämlich M‴ M″ M′ M A Fig. 5. Tab. 19.

*) Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wenn die Wölbungslinie zugleich die Stützlinie seyn soll; die Gleichnng für die krumme Linie ergibt sich hiebei auf folgende Art: Fig. 4.

Es sey $AB = h$ die Höhe des Gewölbes im Scheitel, die Abscisse $BQ = y$ und die Ordinate $QM = x$, ferner $mo = dy$ und $Mo = dx$, endlich der Stellungswinkel $Mmo = v$.

Das Element Mm hat offenbar die Fläche $ABQM = \int x \, . \, dy$ zu stützen; da aber die Tangente $Mmo = \text{tang } v = \frac{dx}{dy}$ der Fläche ABQM proportional seyn muss, so wollen wir dieses für alle Elemente beständige Verhältniss wie $1 : m^2$ annehmen; wir haben demnach

$m^2 \, . \, \text{tang } v = m^2 \, . \, \frac{dx}{dy} = \int x \, . \, dy.$

Zur Auflösung dieser Gleichung erhalten wir durch Differenzirung $m^2 \, . \, d \, \text{tang } v = x \, . \, dy$; weil aber $dy : dx = 1 : \text{tang } v$, folglich $dy = \frac{dx}{\text{tang } v}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieses Werthes $m^2 \, . \, \text{tang } v \, . \, d \, \text{tang } v = x \, . \, dx$. Das Integral dieser Gleichung gibt $m^2 \, . \, \text{tang}^2 v = x^2 + \text{Const}$; weil aber im Scheitel die Ordinate $x = h$ und $\text{tang } v = 0$ seyn muss, so erhalten wir $0 = h^2 + \text{Const}$, folglich $\text{Const} = -h^2$ und daher $m^2 \, . \, \text{tang}^2 v = x^2 - h^2 = \frac{m^2 \, . \, dx^2}{dy}$.

Aus dieser letzten Gleichung folgt weiter $dy = \frac{m \, . \, dx}{\sqrt{(x^2 - h^2)}}$, und wenn wir diese Gleichung mit Rücksicht, dass im Scheitel $x = h$ und $y = 0$ wird, integriren, so ist

$y = m \, . \, \text{nat. log.} \left\{ \frac{x + \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h} \right\}$. Setzen wir die Basis der natürlichen Logarithmen $= e$ oder

nat. log. $e = 1$, so haben wir $\frac{y}{m} \, . \, \text{nat. log. } e = \text{nat. log.} \left\{ \frac{x + \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h} \right\}$. Durch Übersetzung

dieser logarithmischen Gleichung in eine Exponentialgleichung erhalten wir $e^{\frac{y}{m}} = \frac{x + \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h}$,

daraus folgt $\frac{x}{h} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{y}{m}} + e^{-\frac{y}{m}} \right)$. Diese Gleichung ist derjenigen, die wir oben für die Kettenlinie gefunden haben, vollkommen ähnlich.

Fig. 5. Tab. 19. eine Kettenlinie, bei welcher der Krümmungshalbmesser für den Punkt A von A nach B aufgetragen, und durch B eine horizontale Linie gezogen wird, so kann man die Ordinaten A B, M Q, M′ Q′ nach einem beliebigen Verhältnisse, z. B. wie 1 : 2 oder wie 1 : 3 ... theilen, und es werden die hiedurch erhaltenen Punkte m‴, m″, m′, m, b oder n‴, n″, n′, n, a mitsammen verbunden eine krumme Linie geben, welche die darüber befindliche Last vollkommen zu stützen im Stande ist. Sind z. B. die Linien A B, M Q in die Hälfte getheilt worden, so verhalten sich die Tangenten der Stellungswinkel in der untern Kettenlinie zu den Tangenten der Stellungswinkel in der neuen Theilungslinie ebenfalls wie 1 : 2; in diesem Verhältnisse stehen aber auch die Lasten, es sind demnach diese letztern den Tangenten der Stellungswinkel abermals proportional.

Wir können aber auch die Ordinaten der Kettenlinie in jedem bestimmten Verhältnisse z. B. wie 1 : 2 verlängern, und durch die erhaltenen Punkte eine krumme Linie r‴ r″ r′ r c . . . ziehen, so gibt auch diess eine Wölbungslinie, welche die darüber liegende Last bis an die oberste Horizontale trägt, und im Gleichgewichte erhält.

Da nun eine jede solche Linie, wie m‴ m″ m′ m b . . . die darüber befindliche Last mit dem Querschnitte m‴ b m‴ Q‴ B Q‴, und eben so die Linie n‴ n″ n′ n a . . . die Last, deren Querschnitt n‴ a n‴ Q‴ B Q‴ ist, trägt, so wird auch, wenn man die Fläche n‴ a n‴ Q‴ B Q‴ abnimmt, der übrige Theil, nämlich m‴ b m‴ n‴ a n‴ vollkommen gestützt seyn; es wird daher in einer jeden Fläche, die zwischen zwei Wölbungslinien liegt, sich gleichfalls Alles im Gleichgewichte erhalten; und da wir zwischen den Linien m‴ b m‴, n‴ a n‴ noch unendlich viele Stützlinien denken können, die alle sowohl ihre eigene Last, als auch die darauf gelegte und die darunter angehängte Last zu tragen im Stande sind, so erhellet, dass wir auf diese Art die Zeichnung solcher Gewölblinien finden, bei welchen kein Punkt überflüssig, und die ganze Masse des Gewölbes in das Gleichgewicht gebracht wird.

Diese Theorie gibt uns zugleich für den Fall, wenn die Strasse über die Brücke nicht horizontal, sondern nach einer krummen Linie auf- und abwärts gebaut werden soll, sowohl die Bestimmung der Form für die Strasse, als auch die Form des Lehrbogens für die darunter herzustellende Gewölblinie.

Fig. 5. Oben wurde §. 371 gefunden $\frac{X}{m} = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{Y}{m}} + e^{-\frac{Y}{m}}\right\}$. Daraus ergibt sich, dass für den Fall, wenn die Ordinaten zu gleichen Abscissen $Y = y$ gesucht werden, $\frac{X}{m} = \frac{x}{h}$ ist, folglich die Ordinaten der Stützlinie für ein Brückengewölbe den Ordinaten für ein freies nach der Kettenlinie erbautes Gewölbe proportional sind. Wir können demnach in der Fig. 5 die Ordinaten Q M, Q′ M′, Q″ M″ nach einem beliebigen Verhältnisse 1 : 2 oder 1 : 3 h : m theilen, und es werden die gefundenen Theilungspunkte b, m, m′ . . ., wenn man sie mitsammen verbindet, die Zeichnung für ein Brückengewölbe angeben, welches im Scheitel die Höhe b B hat.

§. 380.

So sehr diese Vollkommenheit allen Arten von Gewölben zu wünschen ist, so dürfte doch die Schwierigkeit der genauen Verzeichnung der dazu nöthigen Lehrbögen ihrer allgemeinen Einführung ein sehr grosses Hinderniss entgegenstellen, und man wird daher auch künftig, wie bisher, solche **Gewölbungen nach dem Kreise oder nach der elyptischen Form** um so mehr ausführen, als sich der Kunstgeschmack, wie wir bereits früher bemerkten, für diese Formen ausgesprochen, und die Erfahrung auch gezeigt hat, dass solche Gewölbe sich zu erhalten fähig sind.

Es ist nunmehr von Wichtigkeit, die Stützlinie eines solchen Gewölbes sowohl ihrer Richtung, als ihrer Zahl nach zu kennen, um durch angemessene Widerlagen für ihren festen Stand sorgen zu können. Die Berechnung der **Stützlinie für ein elyptisches Gewölbe** ist in der unten angeführten Note *) ausführlich behandelt.

*) Um die **Stützlinie für ein elyptisches Brückengewölbe** zu finden, sey die halbe Spannweite C D $=$ a, die Höhe in der Mitte B C $=$ b, A W sey die Fahrbahn; die Linie, welche zur vollkommenen Unterstützung des Raumes zwischen der Fahrbahn A W und dem elyptischen Brückenbogen D M B dienen soll, sey die krumme Linie i N U, für welche die Gleichung zu bestimmen ist. Fig. 6. Tab. 19.

Die Höhe der Fahrbahn oberhalb des Scheitels des Gewölbes sey A B $=$ h, der Winkel R C F $=$ v, folglich $R\,G = Q\,A = M\,P = a\,.\,\text{Sin}\,v$, $R\,L = a\,.\,\text{Cos}\,v$ und $M\,L = b\,.\,\text{Cos}\,v$.

Für die Stützlinie ist $A\,Q = a\,.\,\text{Sin}\,v$ und $Q\,N = z$, folglich $N\,o = d\,z$. Setzen wir nun den Stützwinkel $N\,n\,o = \lambda$, so ist wegen $n\,o = m\,O = d\,.\,M\,P = a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v$, die

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{N\,o}{n\,o} = \frac{d\,z}{a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v}.$$

Zur Bestimmung der Fläche Q A B M, welche zwischen der Fahrbahn A Q und dem elyptischen Bogen B M enthalten ist, bemerken wir vorläufig, dass die Kreisfläche R F C L $=$ dem Sektor R C F $+$ dem Dreiecke R L C $= \frac{a^2\,.\,v}{2} + \frac{a^2\,.\,\text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v}{2}$ ist. Weil sich nun alle Ordinaten der Elypse M B C L zu den Ordinaten der Kreisfläche R F C L wie b : a verhalten, so ist die elyptische Fläche $M\,B\,C\,L = \frac{a\,.\,b}{2}\left(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v\right)$, und die Fläche Q A B M ist offenbar

$$= Q\,A\,C\,L - M\,B\,C\,L = Q\,A\,.\,A\,C - M\,B\,C\,L = a\,.\,\text{Sin}\,v\left(h + b\right) - \frac{a\,.\,b}{2}\left(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v\right).$$

Die analoge Fläche für den horizontalen Druck sey $=$ H, so gibt uns die allgemeine Eigenschaft, vermög welcher die Tangenten der Stützwinkel den zu unterstützenden Flächen proportional seyn müssen, für jeden Punkt N der Stützlinie die Proportion $n\,o : N\,o = H : Q\,A\,B\,M$ oder

$$a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v : d\,z = H : a\,.\,\text{Sin}\,v\left(b + h\right) - \frac{a\,.\,b}{2}\left(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v\right),$$ daher

$$d\,z = \frac{a^2\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v}{H}\left\{h\,.\,\text{Sin}\,v + b\,.\,\text{Sin}\,v - \frac{b}{2}\left(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v\right)\right\}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist offenbar

$$z = \frac{a^2}{2\,H}\left\{h\,.\,\text{Sin}^2\,v + b\,.\,\text{Sin}^2\,v - b\left(v\,.\,\text{Sin}\,v + \text{Cos}\,v - 1 + \frac{1 - \text{Cos}^3\,v}{3}\right)\right\} + A\,i.$$

Da die Gewölbsteine auf der Stützlinie winkelrecht stehen, folglich ihre Fugen der Richtung des Krümmungshalbmessers folgen müssen, so haben wir nun noch den Krümmungshalbmesser für unsere Stützlinie, den wir R nennen wollen, zu bestimmen. Hiezu dient die allgemeine Gleichung

$$R = \frac{d\,s}{d\,\lambda} = \frac{N\,n}{d\,\lambda} = \frac{n\,o}{\text{Cos}\,\lambda\,.\,d\,\lambda} = \frac{a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v}{\text{Cos}\,\lambda\,.\,d\,\lambda}.$$ Nun ist

Fig. 6. Tab. 19. Ist nämlich W A die Fahrbahn oberhalb des elyptischen Gewölbes D S M B, und ist U N i die Stützlinie dieses Gewölbes; die halbe Spannweite desselben D C $=$ a, seine Höhe in der Mitte B C $=$ b, der Stützwinkel für den willkührlich angenommenen Punkt N oder N n o $= \lambda$, die Ordinate für denselben Punkt Q N $=$ z, der Krümmungshalbmesser für den kleinen Bogen N n der Stützlinie $=$ R, und der Winkel, welchen der senkrecht oberhalb N im Kreise D R F liegende Punkt R mit dem Scheitel des Gewölbes bildet, F C R $=$ v; ferner die Höhe der Fahrbahn oberhalb dem Scheitel des Gewölbes A B $=$ h; endlich der horizontale Druck, welchen die Fläche Q A B M ausübt $=$ H, so erhält man nach der unten angeführten höhern Rechnung folgende drei Gleichungen zur Bestimmung der Eigenschaften unserer Stützlinie:

I. Für den Stellungswinkel ist $\text{tang}\,\lambda = \frac{a}{H}\left\{h\,.\,\text{Sin}\,v + b\,.\,\text{Sin}\,v - \frac{b}{2}(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v)\right\}$.

II. Zur Bestimmung der Ordinaten der Stützlinie unter der Fahrbahn ist

$$Q\,N = z = \frac{a^2}{2H}\left\{h\,.\,\text{Sin}^2 v + b\,.\,\text{Sin}^2 v - b\left(v\,.\,\text{Sin}\,v + \text{Cos}\,v - 1 + \frac{1 - \text{Cos}^3 v}{3}\right)\right\} + A\,i.$$

III. Für den Krümmungshalbmesser ist $R = \frac{H}{\text{Cos}^3 \lambda\,(h + b - b\,.\,\text{Cos}\,v)}$.

§. 381.

Fig. 7. Die aufgestellten drei Gleichungen sind allgemein und behalten ihre vollkommene Richtigkeit, was man immer für Werthe den Grössen b, h und a beilegen mag.

Wir wollen demnach den einfachsten Fall zuerst vornehmen und b $=$ 0 setzen; demnach verschwindet hier die Elypse und es bleibt uns nur die Steinmasse oder ein Quaderstein übrig, dessen Länge U U′ $=$ 2 a und die Höhe A B $=$ h ist, für welchen nunmehr die Stützlinie aufzusuchen ist. Da in den vorigen Gleichungen alle Glieder, welche b enthalten, verschwinden, so haben wir $\text{tang}\,\lambda = \frac{h\,.\,a\,.\,\text{Sin}\,v}{H} = \frac{h\,.\,N\,p}{H}$ und $z = Q\,N = \frac{h\,.\,a^2\,.\,\text{Sin}^2 v}{2H} + A\,i = \frac{h}{2H}(N\,p)^2 + A\,i$, sonach $Q\,N - A\,i = \frac{h}{2H}(N\,p)^2 = i\,p$. Daraus folgt $(N\,p)^2 = \frac{2H}{h}\,.\,i\,p$.

Diess ist offenbar die Gleichung für eine Parabel. Die Stützlinie U N i U′ ist demnach eine Parabel, in welcher i p und N p die Coordinaten und die Grösse $\frac{2H}{h}$ der Parameter ist.

$\text{tang}\,\lambda = \frac{d\,z}{a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v} = \frac{a}{H}\,.\left\{h\,.\,\text{Sin}\,v + b\,.\,\text{Sin}\,v - \frac{b}{2}\left(v + \text{Sin}\,v\,.\,\text{Cos}\,v\right)\right\}$. Aus dieser Gleichung folgt, wenn sie differenzirt wird $\frac{d\,\lambda}{\text{Cos}^2 \lambda} = \frac{a\,.\,d\,v\,.\,\text{Cos}\,v}{H}\left\{h + b\left(1 - \text{Cos}\,v\right)\right\}$.

Den Werth für d λ in der Gleichung für R substituirt, gibt $R = \frac{H}{\text{Cos}^3 \lambda \left\{h + b\left(1 - \text{Cos}\,v\right)\right\}}$.

Wir wollen nun diese Gleichung auf einen Sturzstein U K K' U' anwenden, welcher z. B. auf die Futtersteine eines Fensters gelegt wird, und zugleich die Last des darüber befindlichen Mauerwerkes durch eine, in seiner Masse liegende Wölbung vollkommen stützen soll. Fig. 7. Tab. 19.

Um die Fläche für den horizontalen Druck H zu bestimmen, setzen wir $Np = UB = a$, so ist $a^2 = \frac{2H}{h} . Bi = \frac{2H}{h}\left(AB - Ai\right)$, daraus folgt $H = \frac{a^2 . h}{2(h - Ai)} = \frac{a^2 . h}{2Bi}$. Der Druck, den der Stein nach der horizontalen Richtung bei U und U' äussert, ist demnach um so grösser, je grösser die Spannweite 2 a und das Verhältniss $\frac{AB}{Bi}$ ist.

Beispiel. Es sey die Höhe des Sturzsteines $EB = 1$ Fuss, die Höhe $iB = \frac{1}{2}$ Fuss, und die Höhe $AB = 6$ Fuss, endlich die Spannweite $2a = 5$ Fuss. Für diesen Fall ist der horizontale Druck $H = \frac{a^2 . h}{2 . Bi} = \frac{25 . 6}{4 . 2 . \frac{1}{2}} = 37{,}5$; der senkrechte Druck in den Punkten U und U' ist $= a . h = 2{,}5 . 6 = 15$, folglich der gesammte Druck, der sich aus diesen beiden nach der Richtung der Diagonale ergibt $= \sqrt{(37{,}5 + 15^2)} = \sqrt{1631{,}25} = 40{,}39$. Die Richtung dieses Druckes ergibt sich aus der bekannten Proportion: U T : O T wie der senkrechte Druck bei U zum horizontalen, also wie $15 : 37{,}5 = 1 : 2{,}5 = 2 : 5 = 2\,Bi : BU$. Wenn wir demnach die Höhe $2Bi = 1$ Fuss von U nach T senkrecht und von T noch O fünf Fuss horizontal auftragen, so muss der Steinschnitt oder die Fuge U K winkelrecht auf die Linie O U seyn.

Bei der Einsetzung des Steines ist aber zu bemerken, dass die Widerlage bei U nach der wagerechten Richtung einen Druck von 37,5, und nach der senkrechten von 15 auszuhalten hat, dass sonach auch der Stein so scharf eingekeilt werden müsste, um diesem Drucke zu widerstehen. Da diess mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist, so pflegt man solche Sturzsteine mit einem flachen Bogen zu überwölben, und erst, nachdem dieser sich hinlänglich gesetzt hat, und ausgetrocknet ist, den Sturzstein frei einzulegen, welcher demnach nur den zwischen dem Gewölbe und dem Sturzsteine ausgemauerten Raum zu tragen hat, weil die übrige Last von dem darüber geführten Gewölbe getragen wird.

§. 382.

Aus der vorhergehenden Rechnung ersehen wir, dass die ersten Glieder in den §. 380 gefundenen drei Gleichungen, welche die Grösse h zum Faktor haben, zur Unterstützung des Parallelogrammes A W E B dienen, und zur Stützlinie eine Parabel geben; die folgenden Glieder, welche mit b multiplicirt sind, enthalten die Abweichung der Stützlinie des elyptischen Gewölbes von der Parabel; diese Glieder gehören sonach nur der Unterstützung des Raumes zwischen der horizontalen Linie durch den Scheitel des Gewölbes und dem elyptischen Bogen, oder Fig. 6.

Fig. 6. Tab. 19. des sogenannten Zwickels B S D E. In der Nähe des Scheitels oder bei dem Schlusssteine ist die Fläche des Zwickels B S D E im Vergleiche mit der Fläche des Parallelogramms W A B E sehr klein, folglich kommen daselbst diese beiden Unterstützungslinien mit einander sehr nahe überein. Diess ist der Grund, warum der 6^{te} Theil des ganzen Kreises oder solche Bögen, die von beiden Seiten des Schlussteines nur bis zu 30 Grad reichen, und welche sonach über der Seite eines gleichseitigen Dreieckes beschrieben werden, ihrer vorzüglichen Festigkeit wegen durch die Erfahrung so bewährt sind, und daher häufig in der Baukunst angewendet werden.

Da die Abweichungen der Stützlinie des elyptischen Bogens von der Stützlinie des Parallelogramms nur von dem Beisatze derjenigen Grössen, welche in den angeführten Gleichungen die Höhe des elyptischen Bogens b zum Faktor haben, abhängen, so sieht man von selbst, dass hiebei das Verhältniss $\frac{h}{b}$ vorzüglich zu berücksichtigen seyn werde.

Die Höhe h des Schlussteines richtet sich nach dem horizontalen Drucke H, welchen diese Steine auszuhalten haben. Wollte man diesen Druck der Fläche gleich setzen, welche entsteht, wenn der Krümmungshalbmesser der Elypse im Scheitel $= \frac{a^2}{b}$ mit der Höhe h multiplicirt wird, oder $H = h . \frac{a^2}{b}$ annehmen, und unter dieser Voraussetzung die Coordinaten z für die folgenden Stellungswinkel berechnen, so würde man finden, dass für den Fall, wenn i nach A versetzt wird, oder wenn die Stützlinie im Scheitel mit der Fahrbahn in A zusammfällt, alle Coordinaten z grösser als $h + b - b . \text{Cos } v$ für den gleichen Stellungswinkel v sind, und dass folglich die durch den Punkt B gehende Stützlinie gänzlich ins Freie fallen oder eine Stützlinie geben würde, welche mit dem elyptischen Bogen nur den Punkt B gemein hat, deren übrige Punkte aber sich unterhalb des elyptischen Bogens befinden.

Es ist demnach nothwendig, für die Stützlinie den Krümmungshalbmesser im Scheitel grösser als $\frac{a^2}{b}$, sonach auch den horizontalen Druck H grösser als $\frac{h . a^2}{b}$ anzunehmen; da jedoch die unterste Stützlinie sich von dem elyptischen Bogen nicht zu weit entfernen darf, so muss diese Linie ausser dem Scheitel den elyptischen Bogen zu beiden Seiten noch irgendwo berühren.

Es entsteht demnach die Frage, wie gross der Winkel v für diesen Berührungspunkt genommen werden könne, damit in diesem Punkte nicht nur die Ordinate Q N oder z für die Stützlinie mit der Ordinate Q M für den elyptischen Bogen gleich sey, sondern auch der Stellungswinkel N n o für die Stützlinie mit dem Stellungswinkel des elyptischen Bogens M m O übereinkomme.

Die erste Bedingniss, dass die Ordinaten gleich seyn sollen, gibt nach II, §. 380 die Gleichung $b\left(1 - \text{Cos } v\right) = \frac{a^2}{2H}\left\{(b + h) \text{ Sin}^2 v - b\left(v . \text{Sin } v + \text{Cos } v - \frac{2}{3} - \frac{\text{Cos}^3 v}{3}\right)\right\}$.

Die zweite Bedingniss, dass die Stellungswinkel der Stützlinie und des elyptischen Bogens gleich seyn sollen, gibt nach I die Gleichung

$$\frac{b}{a} \cdot \text{tang } v = \frac{a}{H}\left\{\left(h + b\right) \text{Sin } v - \frac{b}{2}\left(v + \text{Sin } v . \text{Cos } v\right)\right\}.$$

Wird in diesen Gleichungen $h = \frac{b}{12}$ gesetzt, welches der Fall für einen Kreisbogen wäre, wo $b = a$ und h wie gewöhnlich $= \frac{2a}{24}$ angenommen ist, so ergibt sich aus diesen beiden Gleichungen sehr nahe $v = 1{,}047$, folglich der Winkel $ACQ = 60$ Grad, wo nämlich die unterste Stützlinie den elyptischen Bogen zu beiden Seiten des Scheitels berührt. Für die übrigen Fälle hat man überhaupt $v = \text{Arc}\ (60^0 - u) = 1{,}047 - u$ gesetzt; für diesen Werth folgt aus den beiden letzten Gleichungen $u = \frac{0{,}2165\ h - 0{,}0182\ b}{1{,}250\ h - 0{,}0216\ b}$, und der horizontale Druck Fig. 6. Tab. 19.

$$H = \frac{h \cdot a^2}{b} \left\{ \frac{0{,}866 + 0{,}126 \frac{b}{h} - \frac{u}{4}\left(2 + \frac{b}{h}\right)}{1{,}732 - 4u} \right\}.$$

Die Höhe DU', wo die unterste Stützlinie SU' der Widerlage DUW begegnet, wird gefunden, wenn von $WD = h + b$, die Linie $WU' = z'$ abgezogen wird. Die Linie $WU' = z'$ wird gefunden, wenn in der allgemeinen Gleichung II, $v = 90^0$ gesetzt wird; wir erhalten demnach $z' = \frac{a^2}{2H}\left\{h + b - b\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\right\} + h$, wo H aus der vorhergehenden Gleichung zu nehmen ist. Man findet auf diese Weise

$$DU' = b - \frac{a^2}{2H}\left(h + 0{,}0959\ b\right).$$

Der senkrechte Druck an der Widerlage U ist offenbar $=$

$$\left(h + b\right) a - \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4} = a\left\{h + b\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = a\,(h + 0{,}2146\ b).$$

Diese Gleichungen geben für	$h =$	$\frac{b}{12}$;	$\frac{b}{8}$;	$\frac{b}{6}$
den Winkel	$u =$	0 ;	$3^0\ 49^{\text{Min.}}$;	$5^0\ 28^{\text{Min.}}$. .
folglich für die Berührung den Winkel	$v =$	60^0 ;	$56^0\ 11^{\text{Min.}}$;	$54^0\ 32^{\text{Min.}}$. .
sonach den horizontalen Druck . . .	$H =$	$1{,}3730\ h \cdot \frac{a^2}{b}$;	$1{,}1648\ h \cdot \frac{a^2}{b}$;	$1{,}0608\ h \cdot \frac{a^2}{b}$. .
die Höhe der Stützlinie über dem Kämpfer	$DU' =$	$0{,}2169\ b$;	$0{,}2402\ b$;	$0{,}2575\ b$
den senkrechten Druck an der Widerlage	$=$	$0{,}2979\ a \cdot b$;	$0{,}3396\ a \cdot b$;	$0{,}3813\ a \cdot b$. . .

Die Höhe der Stützlinie über jedem Punkte M des elyptischen Bogens ist MN offenbar $= QL - QN - ML = h + b - z - b \cdot \text{Cos}\ v$

$$= b\left(1 - \text{Cos}\ v\right) - \frac{a^2}{2H}\left\{\left(h + b\right) \text{Sin}^2\ v - b\left(v \cdot \text{Sin}\ v + \text{Cos}\ v - \frac{2}{3} - \frac{\text{Cos}^3\ v}{3}\right)\right\}.$$

Zu einem Beispiele haben wir den Fall angenommen, dass die Gewölbhöhe in der Mitte ein Drittheil der Spannweite oder $b = \frac{2}{3}\ a$ und $h = \frac{1}{12}\ a = \frac{1}{8}\ b$ ist. Für diesen Fall gibt die letzte Gleichung

für die Winkel $v = 0$; 30 Grad; 45 Grad; 60 Grad; 90 Grad.
die Höhe MN $= 0$; $0{,}0059\ b$; $0{,}0031\ b$; $0{,}0010\ b$; $0{,}2414\ b$.

§. 383.

Wir haben nun noch über die Anzahl der Stützlinien, welche die Masse des elyptischen Gewölbes vor dem Einsturze zu sichern im Stande sind, zu bemerken:

1tens. Dass durch alle Punkte der Höhe AB = h vom Scheitel des Gewölbes bis an die Fahrbahn Linien gezogen werden können, welche mit der untersten durch B gehenden Stützlinie parallel laufen, demnach auch die Eigenschaft besitzen, das ganze Gewölbe vollkommen zu unterstützen, und dass sonach der ganze vorhandene Raum zwischen der untersten und der obersten Stützlinie zur Stütze des Gewölbes diene.

Fig. 8. Tab. 19. **2tens.** Können wir aber auch alle Ordinaten von der Fahrbahn bis zur elyptischen Gewölblinie nach irgend einem gemeinschaftlichen Verhältnisse z. B. wie $1:\frac{1}{2}$ theilen. Werden nun diese Theilungspunkte B′, M′, N′ und D′ mit einander verbunden, so erhellet von selbst, dass auch der Raum zwischen der Fahrbahn A W und dem elyptischen Bogen B D durch die Theilungslinie B′ N′ D′ in zwei gleiche Theile getheilt, folglich auch die Fläche A B′ N′ Q die Hälfte von A B N Q seyn werde.

Wenn wir nun für den Raum A B′ D′ W eine Stützlinie suchen, so ergibt sich aus der Eigenschaft, dass die Tangenten der Stellungswinkel den zu stützenden Lasten proportional seyn müssen, $\text{tang}\, N'n'o' : \text{tang}\, N n o = \frac{N'o'}{n'o'} : \frac{N o}{n o} = AB'N'Q : ABNQ = 1:2.$ Daraus sieht man, dass $N'o' = dz'$ die Hälfte von $N o = dz$ sey; demnach wird auch nach der Integration der Differenzialgleichung $z' = \frac{z}{2}$ seyn müssen, weil bei der obern Stützlinie alles in dem Verhältnisse 1:2 sich befindet. Da nun der obere Stützbogen das obere Gewölbe für sich zu tragen im Stande ist, der untere Stützbogen aber das ganze Gewölbe trägt, so sieht man von selbst, dass auch nach der Entfernung des obern der übrig bleibende Theil sich selbst zu stützen im Stande seyn müsse.

Diese Verhältnisse finden aber bei einer jeden andern Theilung statt, es folgt daher, *dass man zwischen AB und WD unendlich viele Stützlinien erhalten werde, wovon jede sowohl den ganzen Raum, als auch den zwischen zwei Stützlinien enthaltenen Raum zu stützen im Stande ist.* Wir können demnach auf diese Art zwischen A B und W D unendlich viele solche Stützlinien ziehen, welche die ganze Masse zwischen der Fahrbahn und der untersten Stützlinie im Gleichgewichte zu erhalten im Stande sind, so wie diess bereits hinsichtlich der Kettenlinie §. 379 bemerkt wurde.

Hiebei ist aber noch zu erinnern, dass für eine jede solche Stützlinie zwar der senkrechte Druck bei den Widerlagen derselbe bleibe, jedoch der horizontale Druck für den Fall, wenn zur Unterstützung der Masse A B D W die mittlere Linie B′ D′ gewählt wird, doppelt so gross seyn werde, als wenn die Masse auf die untere Linie B D gelegt wird. Dieses erhellet daraus, weil alle Krümmungshalbmesser der mittlern Stützlinie doppelt so gross als jene für die untere seyn müssen, folglich auch der Krümmungshalbmesser in B′, dem der horizontale Druck bei B′ proportional ist, doppelt so gross seyn muss, als der Krümmungshalbmesser in B, welcher dem horizontalen Drucke in B proportional ist.

Dass aber die Krümmungshalbmesser um so grösser seyn müssen, je höher der Punkt B′ über den Scheitel B zu liegen kommt, folgt daraus, weil die Biegungen der Bögen von unten gegen die Fahrbahn aufwärts fortwährend abnehmen, so zwar,

dass in dieser Fahrbahn gar keine Biegung mehr vorhanden ist. Wenn also der Bogen B′D′ durch die Mitte zwischen AB und WD geführt wird, so kann derselbe auch nur die halbe Biegung des untern Bogens haben, sein Krümmungshalbmesser ist daher doppelt so gross. Der strenge Beweis hiefür ergibt sich durch die Differenzialrechnung. Fig. 8. Tab. 19.

§. 384.

Wir haben nun noch von den Methoden zu sprechen, deren man sich zur Verzeichnung einer Elypse bedient. Schon in ältern Zeiten war man bemüht, verschiedene Methoden und Instrumente zu erfinden, um die Zeichnung der Elypsen auf eine einfache Art zu bewerkstelligen, jedoch ist noch keine Art bekannt, welche im Grossen und im Kleinen gleich brauchbar anzuwenden wäre.

Hieher gehört zuerst die Methode aus den zwei Brennpunkten einer Elypse dieselbe mittelst einer Schnur zu beschreiben. Fig 9. Wenn nämlich die Spannweite oder grössere Achse AA′ der Elypse und die Höhe derselben in der Mitte, oder die halbe kleinere Achse CB gegeben ist, so beschreibt man zuerst von B aus mit dem Halbmesser $\frac{AA'}{2} = BG = BG'$ einen Bogen, dessen Durchschnittspunkte G, G′ die sogenannten Brennpunkte geben. Nun wird in G und G′ ein Stift eingesetzt und eine Schnur um den Punkt G′ von beiden Seiten bis zu A geführt, und daselbst verbunden. Bindet man nun zugleich in A den Zeichenstift ein, womit der Bogen beschrieben werden soll, und fährt damit bei angespannter Lage der Schnur von A nach E, B bis A′, so hat man den elyptischen Bogen verzeichnet. Diese Methode wird vorzüglich in dem Falle zur Beschreibung der Lehrbögen gebraucht, wenn die Spannweite nicht sehr gross ist; ist aber das letztere der Fall, so unterliegt die Schnur der Ausdehnung. Zur Verzeichnung am Papiere kann man sich derselben auch nicht leicht bedienen.

In dieser Hinsicht wurde in neuern Zeiten die Methode angewandt, elyptische Bögen aus drei oder mehr, mit verschiedenen Halbmessern beschriebenen Kreisbögen zusammen zu setzen. Hieher gehört folgende Methode:

Es sey ACA′ die gegebene Spannweite oder die grössere Achse der Elypse und CB die gegebene Höhe derselben in der Mitte. Fig. 10. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser AC den halben Kreis ADB′D′A′, und trage aus A und A′ den Halbmesser AD = AC und A′D′ = A′C auf. Wird nun der Punkt D mit A und C, dann D′ mit A′ und C verbunden, so entstehen die gleichseitigen Dreiecke ADC und A′D′C. Man verbinde nun die Punkte B′, D und D′ und ziehe aus dem obersten Punkte der zu beschreibenden Elypse, nämlich aus B die Linie BF parallel zu B′D, dann ziehe man aus F die Linie FE parallel zu DC, so werden die Durchschnittspunkte E und G, so wie auf der andern Seite E und G′ die Mittelpunkte seyn, aus welchen der Bogen FBF′ und die Bögen AF und A′F′ beschrieben werden können. Man sieht nun von selbst, dass ein jeder dieser drei Bögen an seinem Mittelpunkte einen Winkel von 60 Grad überspannt; diese Bögen werden bei F und F′ in einander laufen und die aus allen dreien zusammengesetzte krumme Linie AFBF′A′ in der Mitte die gegebene Höhe CB, so wie die gegebene Weite ACA′ überspannen.

Fig. 10. Tab. 19. Der Beweis hiefür ergibt sich aus der Figur selbst; es bleibt daher nur zu bemerken, dass der auf diese Art entstandene Bogen der Elypse um so näher kommt, je weniger die beiden halben Achsen von einander verschieden sind. Wenn nämlich die Höhe B C so klein ist, dass die aus B zu B′D parallel gezogene Linie B F in den Punkt A trifft, so wird A A′E ein gleichseitiges Dreieck geben, und der Bogen A B A′ gibt bloss den Kreisausschnitt, dessen beide Schenkel den Winkel von 60 Grad einschliessen.

§. 385.

Da der plötzliche Uibergang von der Krümmung eines grössern Kreises zu einem kleinern an dem Orte, wo die beiden Bögen sich in einander verlaufen, zu sichtbar auffällt, so hat man es vorgezogen, zur Verzeichnung der elyptischen Bögen von grössern Spannweiten mehrere Halbmesser anzunehmen, um dadurch dem Auge diese sichtbare Ungleichheit möglichst zu verbergen; diese Linien wurden in neuern Zeiten Korblinien genannt. Wenn aber diese Bögen nach ihrer Zusammensetzung den elyptischen Bogen von einer gegebenen Höhe und Weite bilden sollen, so bedarf es einer umständlichen Berechnung, mittelst welcher sowohl die Grösse der Krümmungshalbmesser, als die Orte der Mittelpunkte dieser Bögen zu bestimmen sind.

Fig. 11. Zu dieser Absicht hat *Perronet* für den Bau der steinernen Brücke zu Neuilly den Lehrbogen aus 11 verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzt, und hiezu die ganze Weite $2\,CZ = 2\,a = 120$ Fuss und die Höhe $CA = b = 30$ Fuss angenommen. Da in diesem Falle der Krümmungshalbmesser für den Punkt $A = \frac{a^2}{b} = 120$ Fuss und für den Punkt $Z = \frac{b^2}{a} = 15$ Fuss ist, so wurde die Linie $GC = 90$ Fuss zuerst in 5 gleiche Theile, und $Cb = a - \frac{b^2}{a} = 45$ Fuss in 15 Theile getheilt, jedoch so, dass $Cg = 5$ Theile betrug, folglich $Cg = 15$ Fuss, dann $gf = 4$ Theile oder $= 12$ Fuss, ferner $fe = 3$ Theile oder $= 9$ Fuss, weiters $de = 2$ Theile $= 6$ Fuss, endlich $bd = 1$ Theile $= 3$ Fuss erhielt. Dann beschrieb er aus dem Mittelpunkte G den Bogen A g′, dann aus F′, wo die Linien G g′ und F f′ sich schneiden, den Bogen g′ f′; auf gleiche Art aus E′ den Bogen f′ e′; aus D′ den Bogen e′ d′ und aus B′ den Bogen d′ b′, endlich aus b den Bogen b′ Z.

Nun untersuchte *Perronet* die Höhen der Ordinaten g′ i, f′ k und verglich sie mit denjenigen Höhen, welche der Construktion einer vollkommenen Elypse entsprechen. Um die gefundenen Differenzen auszugleichen, fand er nun, dass man $CB = 24$ Fuss und $Zb = 39{,}89$ Fuss oder 40 Fuss annehmen müsse. Von diesen zwei Punkten aus wurde nun die Verzeichnung auf die vorher beschriebene Art vorgenommen, und der elyptische Bogen konstruirt. Da jedoch diese Verzeichnung wesentlich auf dem Umstande beruht, dass die Höhe $CA = b$ der 4te Theil der Spannweite $2\,CZ = 2\,a$ oder $b = \frac{a}{2}$ seyn müsse, so sieht man von selbst, dass diese Verzeichnungsart auch nur in diesem Falle für eine verhältnissmässige Vergrösserung oder Verkleinerung brauchbar seyn könne.

§. 386.

Um demnach die **Verzeichnung der Elypse auf eine allgemeine Art** vorzunehmen, führen wir noch folgende Methode an, die sich auf die **Länge des Krümmungshalbmessers für jeden Punkt des elyptischen Bogens** gründet.

Es sey $AC = A'C = a$ die verlangte halbe Spannweite und $BC = b$ die Höhe des Gewölbes. Man beschreibe mit dem Halbmesser CA den Kreis $AB'A'$, verbinde einen beliebigen Punkt M' desselben mit dem Mittelpunkte C und ziehe von M' die Senkrechte $M'M$ und Horizontale $M'R'$; es fragt sich nun den Punkt M in der Elypse zu bestimmen. Fig. 12. Tab. 19.

Nennen wir den Winkel $BCM' = v$, so ist $M'R' = a . \text{Sin}\, v = MR = PQ$, dann $M'N = a . \text{Cos}\, v$, und weil sich die Ordinate der Elypse zur Ordinate im Kreise, wie die halbe kleinere Achse zur halben grössern Achse oder $MN : M'N = b : a$ verhalten muss, so ist auch $MN = b . \text{Cos}\, v$.

Ziehen wir nun auf den Bogen Mm die Linie MO winkelrecht und bezeichnet O den Mittelpunkt der Krümmung für den elyptischen Bogen in der Gegend von M, demnach MO den Krümmungshalbmesser dieses Bogens, welchen wir mit r bezeichnen wollen, so ist, nach der höhern Analysis *) die **Grösse dieses Krümmungshalbmessers**

$$MO = r = \frac{(a^2 . \text{Cos}^2 v + b^2 . \text{Sin}^2 v)^{3/2}}{a . b}.$$

Für den Punkt B ist $v = 0$, daher $r = \frac{a^2}{b} = BD$, für die Punkte A und A' aber ist $v = 90$ Grad, daher $r = \frac{b^2}{a} = AE$; auf gleiche Art kann der Krümmungshalbmesser für jeden andern Werth von v berechnet werden.

Um die Krümmungshalbmesser für eine **Entwicklungslinie** zu erhalten, mittelst welcher, so wie §. 371 bei der Kettenlinie, der elyptische Bogen beschrieben werden kann, ziehen wir für den Endpunkt O des Krümmungshalbmessers MO die Horizontale POQ und verlängern die Ordinate MN bis Q. Demnach ist CP die Abscisse und OP die Ordinate für den Mittelpunkt O.

*) Wir haben $M'R' = a . \text{Sin}\, v = MR = PQ$ und $M'N = a . \text{Cos}\, v$, folglich $MN = b . \text{Cos}\, v$, daher $mq = a . dv . \text{Cos}\, v$ und $Mq = b . dv . \text{Sin}\, v$. Fig. 12.

Setzen wir nun den Winkel $Mmq = w$, so ist $\text{tang}\, w = \frac{Mq}{mq} = \frac{b . dv . \text{Sin}\, v}{a . dv . \text{Cos}\, v} = \frac{b}{a} . \text{tang}\, v$.

Ziehen wir nun auf die Linien Mm die Linie MO winkelrecht, so ist wiebekannt die Grösse des Krümmungshalbmessers $r = \frac{Mm}{dw} = \frac{Mm}{dw.} . \frac{\text{Cos}\, w}{\text{Cos}\, w} = \frac{mq}{dw . \text{Cos}\, w} = \frac{a . dv . \text{Cos}\, v}{dw . \text{Cos}\, w}$ und da $\text{tang}\, w = \frac{b}{a} . \text{tang}\, v$, daher $dw = \frac{b}{a} . \text{Cos}^2 w . \frac{dv}{\text{Cos}^2 v}$ ist, so haben wir auch $r = \frac{a^2 . \text{Cos}^3 v}{b . \text{Cos}^3 w}$.

Weil aber $\text{tang}\, w = \frac{b}{a} . \text{tang}\, v$ ist, so ist $\frac{1}{\text{Cos}^2 w} = 1 + \text{tang}^2 w = \frac{a^2 . \text{Cos}^2 v + b^2 . \text{Sin}^2 v}{a^2 . \text{Cos}^2 v}$, woraus $r = \frac{(a^2 . \text{Cos}^2 v + b^2 . \text{Sin}^2 v)^{3/2}}{a . b}$ folgt.

Fig. 12. Tab. 19. Setzen wir nun den Winkel OMQ = Mmq = w, so ist die Linie OQ = r . Sin w, und wenn wir diese von PQ = MR = a . Sin v abziehen, so erhalten wir PO = a . Sin v — r . Sin w. Auf gleiche Art ist MQ = r . Cos w, und wenn wir hievon die Linie MN = b . Cos v abziehen, so erhalten wir CP = r . Cos w — b . Cos v.

Zur Bestimmung des Winkels w ist zu bemerken, dass $\text{tang } w = \frac{Mq}{qm}$; auf gleiche Art ist $\text{tang } M'm'p = \text{tang } v = \frac{M'p}{pm'}$; es verhält sich also $\text{tang } v : \text{tang } w = \frac{M'p}{pm'} : \frac{Mq}{qm}$. Nun ist M'p = M'N — m'n, dann Mq = MN — mn, demnach $\text{tang } v : \text{tang } w = \frac{M'N - m'n}{pm'} : \frac{MN - mn}{qm}$. Da ferner pm' = qm und M'N : MN = a : b = m'n : mn, so ist auch tang v : tang w = a : b, also $\text{tang } w = \frac{b}{a} \cdot \text{tang } v$, woraus sich der Winkel w für jeden Werth von v bestimmen lässt.

Nach diesen Gleichungen sind für die Werthe v = 0, 30, 45, 60 und 90 Grad, die Coordinaten der Elypse MR = a . Sin v und MN = b . Cos v, dann der Krümmungshalbmesser $r = \frac{(a^2 . \text{Cos}^2 v + b^2 . \text{Sin}^2 v)^{3/2}}{a . b}$, die Tangenten der Stellungswinkel w und zuletzt die Coordinaten der Entwicklungslinie CP = r . Cos w — b . Cos v und PO = a . Sin v — r . Sin w berechnet worden.

Winkel v.	Coordinaten der Elypse		Krümmungshalbmesser r.	Tangente des Stellungswinkels w.	Coordinaten der Entwicklungslinie	
	MR	MN			CP	PO
0	0	b	$\frac{a^2}{b}$	0	$\frac{a^2}{b} - b$	0
30	0,5 a	0,8660 b	$\frac{\left(\frac{3a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)^{3/2}}{a.b}$	$0{,}5774\ \frac{b}{a}$	r . Cos w — 0,8660 b	0,5 a — r . Sin w
45	0,7071 a	0,7071 b	$\frac{\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{3/2}}{a.b}$	$\frac{b}{a}$	r . Cos w — 0,7071 b	0,7071 a — r . Sin w
60	0,8660 a	0,5 b	$\frac{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{3b^2}{4}\right)^{3/2}}{a.b}$	$1{,}7321\ \frac{b}{a}$	r . Cos w — 0,5 b	0,8660 a — r . Sin w
90	a	0	$\frac{b^2}{a}$	unendl. gross	0	$a - \frac{b^2}{a}$

Um über den Gebrauch dieser Tabelle ein **Beispiel** zu geben, wollen wir b = ⅓ a setzen, oder annehmen, dass die Höhe des Gewölbes dem dritten Theile der ganzen Spannweite gleich sey. Für diesen Fall haben wir

Winkel v	Coordinaten der Elypse.		Krümmungshalbmesser r.	Stellungswinkel w.	Coordinaten der Entwicklungslinie	
	MR	MN			CP	PO
0	0	0,6667 a	1,5000 a	0	0,8333 a	0
30	0,5000 a	0,5773 a	1,1986 a	21° 3 Min.	0,5413 a	0,0695 a
45	0,7071 a	0,4714 a	0,9207 a	33° 41 Min.	0,2946 a	0,1965 a
60	0,8660 a	0,3333 a	0,6633 a	49° 6 Min.	0,1042 a	0,3609 a
90	a	0	0,4444 a	90°	0	0,5556 a

Fig. 12. Tab. 19.

Ist z. B. die Spannweite des elyptischen Bogens, $2a = 120$ Fuss und die Höhe der 3te Theil der ganzen Spannweite oder $b = 40$ Fuss, so braucht man nur alle Zahlen der vorstehenden Tabelle mit 60 zu multipliciren, um alle Maasse, die zur genauesten Verzeichnung des Gewölbbogens nothwendig sind, zu erhalten.

Hiernach ist der Bogen in Fig. 13 und zwar im 360ten Theil der natürlichen Grösse verzeichnet, zugleich aber auch die Stützlinie, welche für diesen Fall Seite 431 berechnet wurde, zu dem Zwecke eingetragen worden, damit die Gewölbsteine, so wie es bereits von *Perronet* geschah, nicht winkelrecht auf den elyptischen Bogen, sondern winkelrecht auf diese Stützlinie behauen, zugerichtet und in das Gewölbe eingesetzt werden. Auf solche Art wird nun der ganze Druck an jedem Orte winkelrecht auf den verschiedenen Grundflächen stehen. Fig. 13.

§. 387.

Kuppelgewölbe gehören der höhern Baukunst an, und werden gewöhnlich bei öffentlichen Gebäuden in einem grössern Maasstabe ausgeführt; ihre feste Aufstellung verdient daher auch eine um so grössere Aufmerksamkeit. Von den Tonnengewölben sind sie hauptsächlich dadurch verschieden, dass ihre Rippen A B C,.... gegen einen gemeinschaftlichen Punkt A in der Höhe oder am Scheitel zusammenlaufen, demnach von unten aufwärts immer schmäler werden, wogegen die Tonnengewölbe bloss aus parallelen Streifen von gleicher Breite bestehen. Fig. 1. Tab. 20.

Da wir bereits den Grundsatz angenommen haben, dass bei der Stellung der Gewölbsteine auf Verbindungen durch Mörtel und wechselseitigen Zusammenhang keine Rücksicht genommen, und die letztere nur zur Vermehrung des festen Standes der Gewölbe vorbehalten werden soll, so müssen wir diese Rücksicht auch bei der gegenwärtigen Untersuchung beibehalten, und demnach annehmen, dass die Rippen von der Seite keine Haltbarkeit bekommen, sondern jede für sich allein ihren festen Stand nach §. 366 behauptet. Die Regeln, die wir dort für die wechselseitige Stellung der Prismen aufgestellt haben, sind allgemein und von der besondern Figur der Gewölbsteine unabhängig, wir müssen daher auch hier den Grundsatz aufstellen, dass ein jeder Gewölbstein unter dem andern eine solche Stellung erhalten soll, dass er mit seinem Ge-

wichte nicht nur den nächst darüber befindlichen, sondern auch allen, von welchen dieser Stein gedrückt wird, oder überhaupt der ganzen Masse der darauf sich stützenden Gewölbtheile bis an den Schlusstein Gleichgewicht zu halten im Stande ist, demnach muss sich auch der horizontale Druck an jedem Orte zum senkrechten Drucke, wie der Halbmesser zur Tangente des Stellungswinkels verhalten.

Da die meisten Kuppelgewölbe nach der Form einer hohlen Kugel, oder nach einer eyförmigen aufwärts gestreckten elyptischen Form gebaut werden, so wollen wir in dieser Hinsicht zuerst die Last untersuchen, mit welcher ein jeder Gewölbstein beschwert werden müsste, wenn die kreisförmige oder elyptische Form zugleich die Eigenschaft einer Stützlinie erhalten soll.

Fig. 2. Tab. 20. Zu dieser Absicht sey die Höhe der Kuppel in der Mitte $AC = a$, die halbe Spannweite im Lichten $BC = b$, die Höhe der Belastung für den willkührlich angenommenen Punkt M sey $MM'' = z$, und die Höhe der Belastung für den Winkel $v = 45^0$ sey $= f$, so ist nach der Lehre der höhern Analysis $z = \frac{f}{4 \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}^3 v}$ *). Nach dieser Gleichung sind nun für die Winkel von 10 zu 10 Graden die Höhen z der Belastungen berechnet worden:

für v = 0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
ist die Höhe z = unendlich gross	1,507 . f	0,881 . f	0,770 . f	0,865 . f	1,000 . f	1,229 . f	2,309 . f	6,650 . f	48,482 . f	unendl. gross.

Aus dieser Rechnung ist zu ersehen, dass ein freies elyptisches Kuppelgewölbe sowohl im Scheitel als auch in der Nähe der Widerlagen eine grössere Belastung

Fig. 2. *) Es sey B M′ A′ ein Kreisbogen, der mit der halben Spannweite B C beschrieben ist. Man nehme in diesem Bogen willkührlich den Punkt M′ an, welcher mit dem Mittelpunkte C verbunden, den Winkel $A'CM' = v$ gibt. Durch den Punkt M′ ziehe man die Senkrechte M″ L, bis sie dem elyptischen Bogen B M A begegnet, so ist $M'O' = b \,.\, \text{Sin}\, v = MO$ und $M'L = b \,.\, \text{Cos}\, v$, mithin $ML = a \,.\, \text{Cos}\, v$ und $mp = a \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v$. Der Winkel B C b sey $= w$, so ist $Ll = w \,.\, b \,.\, \text{Sin}\, v = M'm' = Mm$.

Das Element, welches auf dem Bogen M N liegt, hat zu seiner Basis die Länge $Ll = w \,.\, b \,.\, \text{Sin}\, v = np$, und die horizontale Breite $LK = b \,.\, dv \,.\, \text{Cos}\, v$, also die Fläche $w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v$. Nennen wir die Höhe, womit das Element M N belastet werden muss, $MM'' = z$, so ist der kubische Inhalt dieser Belastung $z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v$, und die ganze Belastung vom Scheitel A bis M ist $\int z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v$. Setzen wir nun den kubischen Inhalt der Belastung, welche den horizontalen Druck vorstellet $= Q$, so verhält sich $Q : \int z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v = np : mp = b \,.\, dv \,.\, \text{Cos}\, v : a \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v = 1 : \frac{a \,.\, \text{tang}\, v}{b}$, daraus ergibt sich $\int z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v = \frac{Q \,.\, a \,.\, \text{tang}\, v}{b}$. Das Differenzial dieser Gleichung ist $z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v = \frac{Q \,.\, a \,.\, dv}{b \,.\, \text{Cos}^2 v}$, woraus $z = \frac{Q \,.\, a}{b^3 \,.\, w} \,.\, \frac{1}{\text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}^3 v}$ folgt.

Setzen wir die Höhe z bei einem Winkel v von 45 Grad $= f$, so ist für diesen Fall $f = \frac{4 \,.\, Q \,.\, a}{w \,.\, b^3}$. Daraus folgt der horizontale Druck $Q = \frac{b^3 \,.\, w \,.\, f}{4a}$, und wenn wir diesen Werth statt Q in die Gleichung setzen, so ist $z = \frac{f}{4 \,\text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}^3 v}$.

erfordere, als die gleichförmige Dicke des Gewölbes allein zu geben im Stande ist. Die Ursache hievon ist, weil oben beim Scheitel die Rippen zu schmal werden, und nur in einen Punkt zusammen laufen, demnach dem übrigen Theile der Rippen das Gleichgewicht zu halten nicht im Stande sind. In der Nähe der Widerlagen aber ist die beinahe senkrechte Stellung der Gewölbsteine nicht im Stande dem horizontalen Drucke der übrigen das Gleichgewicht zu halten.

Dem erstern Umstande am Scheitel wird dadurch abgeholfen, dass das gesammte Gewicht, womit das Kuppelgewölbe bis zu einer bestimmten Entfernung vom Scheitel belastet werden muss, eine bestimmte Grösse erhält. *) Dieses Gewicht wird nach der unten angeführten höhern Rechnung bestimmt, und man sieht von selbst, dass den Laternen, welche zur innern Beleuchtung in der Mitte der Kuppelgewölbe aufgesetzt zu werden pflegen, dieses nothwendige Gewicht ohne Anstand gegeben werden könne.

Dem zweiten Umstande kann nicht anders als durch eine angemessene Stellung der Gewölbsteine, oder durch eine entsprechende Stützlinie, welche innerhalb der Masse des Gewölbes verborgen werden muss, abgeholfen werden.

§. 388.

Die Bestimmung der Stützlinie für ein freies elyptisches Kuppelgewölbe kann nur durch höhere Rechnung aufgefunden werden. **) Bei dieser Rechnung

*) Wir haben nämlich die Gleichung $\int z \,.\, w \,.\, b^2 \,.\, dv \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v = Q \,.\, \frac{a}{b} \,.\, \text{tang}\, v$, und wenn wir statt Q den obigen Werth setzen, so ist das Gewicht des Gewölbetheiles vom Scheitel anzufangen, bis zu dem Winkel v für eine Rippe $= \frac{b^2 \,.\, w \,.\, f \,.\, \text{tang}\, v}{4}$ und für alle Rippen zusammen $= \frac{b^2 \,.\, \pi \,.\, f \,.\, \text{tang}\, v}{2}$. Weil aber die mit dem Halbmesser b . Sin v beschriebene Kreisfläche $= \pi \,.\, (b \,.\, \text{Sin}\, v)^2$ ist, so wird das einzusetzende Gewölbstück den kubischen Inhalt $\pi \,.\, (b \,.\, \text{Sin}\, v)^2 \,.\, \frac{f}{2 \,.\, \text{Sin}\, v \,.\, \text{Cos}\, v} = \pi \,.\, (b \,.\, \text{Sin}\, v)^2 \,.\, \frac{f}{\text{Sin}\, 2\, v}$ haben. Fig. 2. Tab. 20.

**) Wir wollen zu diesem Behufe vorläufig nur die Querschnittsfläche des elyptischen Bogens betrachten. Es sey für das elyptische Gewölbe Fig. 3, AMD derjenige Bogen, welcher durch die Mitte aller Gewölbsteine geht; A'' M'' D'' sey der äussere, und A' M' D' der innere elyptische Gewölbbogen. Die Stützlinie des Gewölbes sey BNU, die Höhe des mittlern elyptischen Gewölbbogens $AC = a$ und die halbe Spannweite desselben mittlern elyptischen Bogens sey $CD = b$. Fig. 3.

Setzen wir die Höhe der Gewölbsteine $A'A'' = \alpha$ und $D'D'' = \beta = F'F''$, so ist die Höhe des äusseren Bogens $A''C = a + \frac{1}{2}\alpha$, und des innern $A'C = a - \frac{1}{2}\alpha$. Auf gleiche Art ist die Weite des äussern elyptischen Bogens $CD'' = b + \frac{1}{2}\beta$ und des innern $CD' = b - \frac{1}{2}\beta$.

Man beschreibe mit dem Halbmesser $CD = b$ den Kreisbogen FRD und eben so mit dem Halbmesser $b + \frac{1}{2}\beta$ den äussern, und mit $b - \frac{1}{2}\beta$ den innern Kreisbogen. Durch einen willkührlichen Punkt M des elyptischen Bogens ziehe man die Senkrechte M'' G, verbinde die Durchschnittspunkte R, R', R'' der gezogenen Kreise mit dem Mittelpunkte C und setze die Winkel $RCF = v$, und $R''CF = \varphi$. Hiernach ist $RT = MQ = NP = b \,.\, \text{Sin}\, v = (b + \frac{1}{2}\beta)\, \text{Sin}\, \varphi$ und $GR = b \,.\, \text{Cos}\, v$, dann $GR'' = (b + \frac{1}{2}\beta)\, \text{Cos}\, \varphi$.

ist die Annahme zum Grunde gelegt, dass das elyptische Kuppelgewölbe von dem Scheitel bis zu dem Winkel v = 45 Grad so belastet wird, wie es das Gleichgewicht erfordert und dass von 45 Grad abwärts die weitere Unterstützung in einer angemessenen Stützlinie mit Beibehaltung der elyptischen Form gesucht werden müsse.

Fig. 3. Tab. 20. Aus der ersten Gleichung $(b + \frac{1}{2}\beta)$ Sin φ = b . Sin v folgt $\text{Sin}^2\varphi = \frac{b^2 . \text{Sin}^2 v}{(b + \frac{1}{2}\beta)^2}$ oder $1 - \text{Cos}^2\varphi = \frac{b^2}{(b + \frac{1}{2}\beta)^2}(1 - \text{Cos}^2 v)$; daraus ergibt sich weiter $(b + \frac{1}{2}\beta)^2 \text{Cos}^2\varphi = b^2 . \text{Cos}^2 v + (b + \frac{1}{2}\beta) - b^2 = b^2 . \text{Cos}^2 v + b . \beta + \frac{1}{4}\beta^2$ und wenn man die höhern Potenzen von $\frac{\beta}{2b}$ vernachlässigt $(b + \frac{1}{2}\beta)$ Cos φ = b . Cos v + $\frac{\beta}{2 \text{Cos } v}$ = R″ G.

Nun ist aber M″ G : R″ G = a + ½ α : b + ½ β, daher

$M'' G = R'' G \left(\frac{a + \frac{1}{2}\alpha}{b + \frac{1}{2}\beta}\right) = \left(b . \text{Cos } v + \frac{\beta}{2 \text{Cos } v}\right)\left(\frac{a + \frac{1}{2}\alpha}{b + \frac{1}{2}\beta}\right)$. Auf gleiche Art findet man auch, wenn $-\beta$ statt $+\beta$ und $-\alpha$ statt $+\alpha$ gesetzt wird, $M' G = \left(b . \text{Cos } v - \frac{\beta}{2 \text{Cos } v}\right)\left(\frac{a - \frac{1}{2}\alpha}{b - \frac{1}{2}\beta}\right)$ und wenn von M″ G die Grösse M′ G abgezogen wird, so bleibt

$$M'' M' = \left\{\left(\frac{a + \frac{1}{2}\alpha}{b + \frac{1}{2}\beta}\right) - \left(\frac{a - \frac{1}{2}\alpha}{b - \frac{1}{2}\beta}\right)\right\} b . \text{Cos } v + \frac{a . \beta}{b . \text{Cos } v} = a\left\{\frac{\beta}{b . \text{Cos } v} - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \text{Cos } v\right\},$$

wenn nämlich die höhern Potenzen von $\frac{\beta}{b}$ und $\frac{\alpha}{a}$ vernachlässigt werden.

Die Breite der Fläche M″ M′ m′ m″ ist n o = d . N P = b . d v . Cos v, demnach die Fläche $M'' M' m' m'' = a . b . dv \left\{\frac{\beta}{b} - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \text{Cos}^2 v\right\}$. Wird nun diese Fläche noch mit der Tiefe w . b . Sin v multiplicirt, so ergibt sich der kubische Inhalt dieses Elementes $w . a . b^2 . d v . \text{Sin } v \left\{\frac{\beta}{b} - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \text{Cos}^2 v\right\}$.

Bevor wir diese Gleichung integriren, ist zu bemerken, dass das Gleichgewicht der Kuppelgewölbe bis zu einem Winkel v = 45 Grad durch eine entsprechende Belastung herzustellen ist.

Wir haben zu dieser Absicht in der obigen Note bereits den Kubik-Inhalt des elyptischen Gewölbes sammt seiner Belastung = $\frac{1}{4}$ w . b^2 . f . tang v gefunden. Setzen wir nun den Winkel v = 45 Grad, so ist tang v = 1, folglich der Kubik-Inhalt des Kuppelgewölbes $\frac{1}{4}$ w . b^2 . f. Für denselben Punkt ist der horizontale Druck $Q = \frac{w . b^3 . f}{4 a}$; demnach ist die Tangente des Stellungswinkels in diesem Punkte = $\frac{a}{b}$. Von diesem Punkte aus haben wir nun die **Gleichung für die Stützlinie und den Stellungswinkel** aufzusuchen.

Zu diesem Zwecke dient die oben gefundene Differenzialgleichung, vermöge welcher der Kubik-Inhalt des elyptischen Gewölbbogens $= \int w . a . b^2 . d v . \text{Sin } v \left\{\frac{\beta}{b} - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \text{Cos}^2 v\right\}$, welches nun so integrirt werden muss, dass es bei v = 45 Grad verschwindet. Daraus ergibt sich für die Bestimmung des Gewichtes der kubische Inhalt vom Scheitel bis zum Winkel v

$$= \tfrac{1}{4} w . b^2 . f + w . a . b^2 \left\{\frac{\beta}{b}\left(\text{Cos } 45^\circ - \text{Cos } v\right) - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\text{Cos}^3 45^\circ - \text{Cos}^3 v}{3}\right)\right\}.$$

Da nun der horizontale Druck $= \frac{w . b^3 . f}{4 a}$ ist, so ergibt sich aus der Division des senkrechten Drucks mit dem horizontalen für den Stellungswinkel λ die Gleichung

$$\text{tang } \lambda = \frac{a}{b} + \frac{4 a^2}{b . f}\left\{\frac{\beta}{b}\left(\text{Cos } 45^\circ - \text{Cos } v\right) - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\text{Cos}^3 45^\circ - \text{Cos}^3 v}{3}\right)\right\} \text{ (I).}$$

Die unter dem Texte erscheinende Gleichung I. gibt die Tangenten für den Stellungswinkel λ, welchen die Stützlinie des elyptischen Kuppelgewölbes an jedem Punkte mit dem Horizonte macht; die Gleichung II. enthält die Tiefe z, wie viel ein jeder Punkt dieser Stützlinie unter der bei 45 Grad (in dieser Linie) gezogenen Horizontalen liegt. Der Winkel v wird hier, wie bei den frühern Berechnungen vom Scheitel an gerechnet.

Es wäre zu weitläufig die ganze Stützlinie in jedem Falle durch eine Rechnung zu bestimmen und zu verzeichnen. Da es aber hiebei nur darauf ankommt, den Ort zu wissen, wo die Stützlinie der Widerlage begegnet, so hat man den Werth von z nur für diejenigen Winkel v berechnet, wo die Stützlinie in die Widerlage einfällt. Um diess auf eine allgemeine Art zu thun, wurden für das Verhältniss der Breite der Anlage des elyptischen Kuppelgewölbes am Kämpfer (β) zum Durchmesser oder zur Spannweite an demselben Orte (2 b) die Werthe $\frac{3}{72}$, $\frac{4}{72}$, $\frac{4{,}5}{72}$, $\frac{5}{72}$ und $\frac{6}{72}$ angenommen, d. h. die Fälle berechnet, wo für eine Spannweite von 72 Fuss die Anlage oder Dicke des elyptischen Gewölbes auf dem Kämpfer 3, 4, 4,5, 5 und 6 Fuss beträgt. Fig. 4. Tab. 20.

Für diese Annahmen wurde der Winkel v, wo das Kuppelgewölbe in die Widerlage trifft, aus der Gleichung $\text{Sin}\, v = \frac{CD'}{CJ} = \frac{b - \frac{1}{2}\beta}{b}$ (III) bestimmt.

Für diesen Winkel hat man sodann sowohl die Linie $z = KU$ aus der Gleichung II, als auch die Höhe $D'i = a \left\{ \frac{\beta}{b\,.\,\text{Cos}\, v} - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \text{Cos}\, v \right\}$ (IV.) berechnet. Da die Höhe $D'K = ES = \frac{a}{b}\,.\,LE = a\,.\,\text{Cos}\, 45^0 = 0{,}7071068\,.\,a$ ist, so finden wir die Linie i U, wie weit die Stützlinie bei U den äussern Gewölbbogen überschreitet, wenn wir von K D' die Summe K U + D' i abziehen. Hiernach wurde die vorletzte Columne in der unten folgenden Tabelle berechnet.

Man hat diesen Rechnungen noch in der letzten Columne den Werth $f = 0{,}7071068\,.\,a \left(\frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a}\right)$ zu der Absicht beigesetzt, weil man diesen Werth zur Be-

Ziehen wir nun durch den Punkt K der Mittellinie des Gewölbes bei 45 Grad eine horizontale Fläche S K, von welcher die Ordinaten $KU = z$ gerechnet werden, so ist auch Fig. 4.

$$\text{tang}\, \lambda = \frac{dz}{b\,.\,dv\,.\,\text{Cos}\, v}.$$

Wird nun statt tang λ dieser Werth $\frac{dz}{b\,.\,dv\,.\,\text{Cos}\, v}$ gesetzt, so erhalten wir

$$dz = a\,.\,dv\,.\,\text{Cos}\, v + \frac{4a^2}{f} \left\{ \frac{\beta}{b} \left(\text{Cos}\, 45^0 - \text{Cos}\, v\right) - \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \left(\frac{\text{Cos}^3 45^0 - \text{Cos}^3 v}{3}\right) \right\} dv\,.\,\text{Cos}\, v.$$

Das Integral dieser Gleichung ist z =

$$a\left(\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, 45^0\right) + \frac{4a^2\,.\,\beta}{f\,.\,b} \left\{ \text{Cos}\, 45^0 \left(\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, 45^0\right) - \left(\frac{v + \text{Sin}\, v\,.\,\text{Cos}\, v}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\text{Sin}\, 45^0.\,\text{Cos}\, 45^0}{2}\right) \right\}$$
$$- \frac{4a^2}{f}\left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \left\{ \text{Cos}^3 45^0 \left(\frac{\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, 45^0}{3}\right) - \left(\frac{v}{8} + \frac{\text{Sin}\, v\,.\,\text{Cos}\, v}{8} + \frac{\text{Sin}\, v\,.\,\text{Cos}^3 v}{12} - \frac{\pi}{32} - \frac{\text{Sin}\, 45^0.\,\text{Cos}\, 45^0}{8} - \frac{\text{Sin}\, 45^0.\,\text{Cos}^3 45^0}{12}\right) \right\} \text{(II.)}$$

Fig. 4. Tab. 20. stimmung des Gewichtes der Belastung des elyptischen Gewölbes von 0 bis zu 45 Grad, so wie auch zur Bestimmung der Grösse des horizontalen Druckes bedarf. Der kub. Inhalt des Gewölbraumes von 0 bis 45 Grad beträgt der frühern Rechnung zu Folge $\frac{\pi \,.\, b^2 \,.\, f}{2}$; der horizontale Druck für jede Rippe, welche den Winkel w an dem Mittelpunkte bildet, ist nach derselben Rechnung $= \frac{w \,.\, b^3 \,.\, f}{4\,a}$.

Da der Raum zwischen dem Gewölbebogen und der Stützlinie U i p nicht leer bleiben darf, sondern eben so wie bei den Tonnengewölben ausgemauert werden muss, so ist es dem Zwecke zuträglich, die Verhältnisse $\frac{\beta}{b}$ und $\frac{\alpha}{a}$ so auszumitteln, dass dieser Raum ein Minimum werde. Hiezu dient der Umstand, dass alle Gewölbe in der Nähe der Widerlagen eine grössere Stärke, als am Scheitel erhalten müssen; es wird demnach vortheilhaft seyn, $\frac{\beta}{b}$ gross und dagegen $\frac{\alpha}{a}$ klein zu machen. Da man jedoch diese Verhältnisse auch nicht zu weit von einander entfernen darf, so wurde in der folgenden ersten Tabelle $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{4\,b}$ angenommen, wo, wie in der Note unter dem Texte bemerkt wurde, α die Höhe ist, welche die Gewölbsteine im Scheitel in dem Falle erhalten würden, wenn das Kuppelgewölbe nach der Verzeichnung der beiden (äussern und innern) Elypsen ganz ausgeführt werden könnte; a aber ist die vertikale Höhe von der Mitte dieses Gewölbsteines bis zur Horizontallinie durch die Kämpfer. Wir erhalten für diesen Fall folgende Werthe:

Für $\frac{\beta}{2\,b}$	Nach der Gleichung III ist v	Tiefe der Stützlinie nach der Gleichung II, K U = z.	Höhe des äussern Bogens über dem Kämpfer D′ i nach IV.	Summe der beiden letzten K U + D′ i.	Höhe der Stützlinie über dem äussern Bogen i U.	Werth für f
$\frac{3}{72} = \frac{1}{24}$	73° 24 Min. 8 Sec.	0,3949 . a	0,2739 . a	0,6688 . a	0,0383 . a	0,0737 . a
$\frac{4}{72} = \frac{1}{18}$	70° 48 Min. 43 Sec.	0,3610 . a	0,3107 . a	0,6717 . a	0,0354 . a	0,0982 . a
$\frac{4\frac{1}{2}}{72} = \frac{1}{16}$	69° 38 Min. 9 Sec.	0,3449 . a	0,3266 . a	0,6715 . a	0,0356 . a	0,1105 . a
$\frac{5}{72} = \frac{1}{14{,}4}$	68° 31 Min. 18 Sec.	0,3294 . a	0,3412 . a	0,6706 . a	0,0365 . a	0,1228 . a
$\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$	66° 26 Min. 37 Sec.	0,2998 . a	0,3671 . a	0,6669 . a	0,0402 . a	0,1473 . a

Die zweite Tabelle ist für den Fall berechnet, dass $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{2b}$ ist.

Für $\frac{\beta}{2b}$	Nach der Gleichung III ist v	Tiefe der Stützlinie nach der Gleichung II, KU = z.	Höhe des äussern Bogens über dem Kämpfer D'i nach IV.	Summe der beiden letzten KU + D'i.	Höhe der Stützlinie über dem äussern Bogen. i U.	Werth für f.
$\frac{3}{72} = \frac{1}{24}$	73° 24 Min. 8 Sec.	0,3850 . a	0,2798 . a	0,6648 . a	0,0423 . a	0,0884 . a
$\frac{4}{72} = \frac{1}{18}$	70° 48 Min. 43 Sec.	0,3530 . a	0,3198 . a	0,6728 . a	0,0343 . a	0,1179 . a
$\frac{4\frac{1}{2}}{72} = \frac{1}{16}$	69° 38 Min. 9 Sec.	0,3378 . a	0,3375 . a	0,6753 . a	0,0318 . a	0,1326 . a
$\frac{5}{72} = \frac{1}{14{,}4}$	68° 31 Min. 18 Sec.	0,3230 . a	0,3539 . a	0,6769 . a	0,0302 . a	0,1473 . a
$\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$	66° 26 Min. 37 Sec.	0,2947 . a	0,3837 . a	0,6784 . a	0,0287 . a	0,1768 . a
$\frac{7}{72}$	64° 31 Min. 32 Sec.	0,2680 . a	0,4103 . a	0,6783 . a	0,0288 . a	0,2062 . a

§. 389.

Aus diesen zwei Tabellen sehen wir, dass die Tiefe z der Stützlinie an den Kämpfern von oben herab abnimmt, wie es die dritte Columne zeigt, und dagegen die Höhe des erstern Bogens über den Kämpfern nach Verhältniss der Werthe in der vierten Columne von oben herab zunimmt. Da nun die Summe dieser beiden Grössen immer von a . Cos 45° = a . 0,7071068 abgezogen werden muss, so sieht man aus der vorletzten Columne der Tabelle, dass die Höhe der Stützlinie über dem äussern Bogen, folglich der Raum, der an der Widerlage über dem elyptischen Bogen ausgemauert werden muss, anfangs ab- und dann wieder zunimmt. Fig. 4. Tab. 20.

Das Minimum dieser Höhe liegt in der ersten Tabelle bei dem Werthe $\frac{\beta}{2b} = \frac{4}{72}$, d. h. bei $\frac{1}{18}$ der Spannweite. In der zweiten Tabelle liegt dieses Minimum bei $\frac{\beta}{2b} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$, welches schon daraus erhellet, indem die Anlage des Gewölbes auf den Kämpfern breiter seyn muss, wenn es in der Höhe stärker gehalten wird.

In Hinsicht auf die Bestimmung der Widerlagen ist hier noch zu bemerken, dass der Ort oder die Höhe, wo die Stützlinie an die Widerlagen anläuft, sich über dem Kämpfer befindet, und zwar ist diese Höhe = KD' — KU = a . Cos 45° — z.

Der senkrechte Druck, oder der diesem Drucke entsprechende kubische Inhalt wird gefunden, wenn man die aus der Gleichung I berechnete tang λ mit dem horizontalen Drucke multiplizirt.

§. 390.

Es ist merkwürdig, dass die Baue der Alten und vorzüglich des Römischen Pantheons mit dieser Theorie so sehr übereinstimmen, wie sich jedermann aus der Ansicht des in mehreren Werken bekannt gemachten Profiles von diesem Bauwerke überzeugen kann.

Bereits früher haben wir bemerkt, dass es nicht nothwendig sey, dem Gewölbe von 0 bis 45 Grad eine durchaus gleiche Dicke zu geben, und dass es hinreiche, wenn dieses Gewölbe bis zum Winkel von 45 Grad vom Scheitel gerechnet, den kubischen Inhalt $\frac{\pi . b^2 . f}{2}$ hat, weil dieser zum Gleichgewichte für den untergesetzten Theil von 45 bis 90 Grad erfordert wird.

Bei den neuern Kuppelgewölben hat man oben auf das Gewölbe eine Laterne gesetzt, und die Verhältnisse derselben so angenommen, dass eine Beleuchtung des innern Raumes der Kuppel von oben statt finden könne. Da diese Laternen verhältnissmässig ein grösseres Gewicht haben, als der übrige Raum des Kuppelgewölbes bis zum Winkel von 45°, so ist dafür dieser Raum schwächer gehalten.

Bei dem Römischen Pantheon hingegen, auf welchem oben keine solche Laterne aufgesetzt ist, ist der obere Theil dieses Gewölbes stärker gehalten, als von 30 bis 45° abwärts (von oben herabgerechnet); von 45° bis zu den Kämpfern hat diess Gewölbe aber eine grössere Stärke, als die neuern Kuppeln dieser Art besitzen.

§. 391.

In mehreren Schriften über diesen Gegenstand ist die Bemerkung vorhanden, dass man sich bei dem Baue der Kuppeln um die verhältnissmässige Unterstützung derselben gar nicht zu bekümmern brauche, indem die im Kreise herumgelegten Gewölbsteine gegen das Hineinfallen in den innern Raum des Gewölbes durch diese kreisförmige Bauart hinlänglich gesichert sind. Allein die Erfahrung hat bewiesen, dass bei einem unzweckmässigen Verhältnisse, besonders wenn die Kuppeln sehr flach gebaut werden, der untere Theil des Gewölbes dem Drucke des obern nicht hinlänglich widerstehen könne, und auswärts getrieben wird. Diess erklärt zum Theil die Gebrechen, welche sich bei einigen Bauwerken dieser Art, und vorzüglich bei der Peterskirche in Rom gezeigt haben.

§. 392.

Zur Beendigung der Theorie der Gewölbungen bleibt uns noch übrig, die Stärke der Widerlagen zu bestimmen, welche sowohl dem berechneten horizontalen, als auch dem senkrechten Drucke hinlänglich zu widerstehen im Stande sind. Unter den Widerlagen versteht man nämlich diejenigen Mauern oder Pfeiler, auf welche das Gewölbe gestellt wird, in denen demnach die bis auf den Grundbau fortgeführte Stützlinie hinlängliche Stabilität erhalten muss.

Es ist bereits §. 348 gezeigt worden, dass in dem Falle, wenn der Druck an die Stützmauer so gross wird, dass dadurch das Gewicht dieser Mauer überwältigt oder die aus beiden zusammengesetzte mittlere Kraft in den äussern Endpunkt der Basis oder ausserhalb der Basis ins Freie fallen würde, auch die Mauer nothwendig sammt dem Gewölbe zusammenfallen müsste. Auch haben wir bereits daselbst angeführt, dass die Stabilität nur aus der Grösse der Linie u B, wie weit nämlich der zusammengesetzte mittlere Druck innerhalb der Basis fällt, beurtheilt und gemessen werden könne. Fig. 6. Tab. 20.

In den bisherigen Schriften über Baukunst befindet sich zur Bemessung der Stärke der Widerlagen die Regel, dass die statischen Momente des Gewölbedruckes und der Widerlagsmauer einander gleich seyn müssen, demnach der Widerlagsmauer eine so grosse Basis A B gegeben werden müsse, als zur Gleichheit dieser Momente nothwendig ist. Wir wollen demnach annehmen, dass die Stützlinie des Gewölbes die Widerlage bei J trifft, folglich daselbst der horizontale Druck H und der senkrechte oder das Gewicht des Gewölbes vom Schlussteine bis zur Widerlagsmauer (= G) gestützt werden müsse. Hiezu sey die nöthige Breite der Widerlagsmauer A B = x, ihre Höhe B D = $\mathfrak{H}$, endlich die Länge des Gebäudes nach der horizontalen Richtung = L, so ist der kubische Inhalt der Mauer = $\mathfrak{H}$. x . L, und wenn wir das Gewicht eines Kubikfusses mit g benennen, und alle Dimensionen in Fussen ausdrücken, so ist das Gewicht der Mauer = g . $\mathfrak{H}$. x . L. Auf gleiche Art ist das Gewicht des horizontalen Druckes = g . H . L. Fig. 6.

Das Gewicht des Gewölbes oder G wird gefunden, wenn die Querschnittsfläche F des Gewölbes mit der Länge L und mit dem Gewichte eines Kubikfusses g multiplicirt wird, demnach ist G = F . L . g.

Da das Gewicht der Mauer in der Mitte senkrecht herabdrückt, so ist sein Hebelsarm $= \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$ und sein statisches Moment $= g . \mathfrak{H} . L . \frac{x^2}{2}$. Weil das Gewicht des Gewölbes nach der Richtung J A senkrecht herabdrückt, so ist sein Hebelsarm offenbar = A B = x und sein statisches Moment = g . F . L . x. Da nun der horizontale Druck in J nach der horizontalen Richtung J L wirkt, so ist sein Hebelsarm offenbar = L B = A E + E J, und wenn wir die Höhe der Widerlagsmauer bis an den Kämpfer A E = A und die Höhe des Stützpunktes vom Kämpfer aufwärts E J = e setzen, so ist auch L B = A + e, folglich das statische Moment des horizontalen Druckes = g . H . L (A + e).

Werden nun die entgegenwirkenden Momente einander gleich gesetzt, so erhalten wir $g . \mathfrak{H} . L . \frac{x^2}{2} + g . F . L . x = g . H . L \left(A + e\right)$. Aus der Auflösung dieser Gleichung folgt die gesuchte Stärke der Widerlage

$$x = \sqrt{\left\{\frac{F^2}{\mathfrak{H}^2} + 2 H \left(\frac{A + e}{\mathfrak{H}}\right)\right\}} - \frac{F}{\mathfrak{H}}.$$

§. 393.

Eine andere Methode die Stärke der Widerlagsmauern zu finden, gibt uns das Parallelogramm der Kräfte. Setzen wir nämlich den horizontalen Druck g . H . L = J L und den senkrechten g . F . L = J M oder nehmen wir an, dass J L : J M wie H : F sich verhält, so ist offenbar, dass das Gewicht der Mauer A B C D = g . $\mathfrak{H}$. L . x in Fig. 6.

Fig. 6. Tab. 20. der Mitte derselben, folglich nach der Richtung JA nur mit der Hälfte in Anschlag zu bringen ist, sonach dem schon vorhandenen senkrechten Drucke $JM = g . F . L$ noch das halbe Gewicht der Mauer oder $\frac{1}{2} . g . \mathfrak{H} . L . x$ beizusetzen kommt, welches wir durch die Linie MN vorstellen wollen. Setzen wir diese Kräfte JL und JN durch das Parallelogramm JLKN zusammen, so gibt die Diagonale JK die Richtung und Grösse des aus allen vorhandenen Kräften zusammengesetzten mittlern Druckes. Wenn nun diese Richtung die Basis AB nicht überschreiten, sondern dieselbe noch wenigstens bei B erreichen soll, so haben wir die Proportion $JN : NK = JA : AB$ und wenn wir an die Stelle dieser Linien die dadurch bezeichneten Kräfte oder ihre algebraischen Werthe setzen, so ist $g . F . L + \frac{g . \mathfrak{H} . L . x}{2} : g . H . L = A + e : x$. Diese Proportion gibt $g . F . L . x + \frac{1}{2} . g . \mathfrak{H} . L . x^2 = (A + e) g . H . L$ oder $F . x + \frac{1}{2} . \mathfrak{H} . x^2 = (A + e) H$, welches genau dieselbe Gleichung ist, die wir oben gefunden haben, woraus demnach auch dieselbe Stärke der Widerlagen gefunden wird.

Aus der bei dieser Berechnung angewendeten letzten Methode geht hervor, dass durch die Zusammensetzung der Kräfte der gesammte Druck der Widerlagsmauer und des Gewölbes nur auf den Endpunkt B gestellt werde, folglich hiedurch noch keine Stabilität, welche auf der Grösse Bu beruht, erreicht werden könne; demnach auch der Breite der Mauer noch eine Zulage Bu gegeben werden müsse. Um diese zu bestimmen, ist zu bemerken, dass, vorzüglich wenn das Gewölbe nicht frei ist, sondern zu beiden Seiten horizontal angeschüttet oder ausgemauert, mit einem Fussboden oder Pflaster bedeckt oder mit andern zufälligen Lasten beschwert wird, die Grösse der Zulage B u nach Verhältniss dieser zufälligen Gewichte bemessen werden müsse. Weil aber diese zufälligen Belastungen keinem Gesetze unterliegen, sondern nur nach Verhältniss der Bestimmung des Gebäudes in Antrag gebracht werden müssen, so wollen wir in dieser Hinsicht das Gewicht des Gewölbes $g . L . F$ um die Grösse $m . g . L . F$ vermehren und auf gleiche Art auch dem horizontalen Drucke $g . H . L$ noch das Gewicht $m . g . L . H$ zusetzen. Wir müssen demnach in der obigen Gleichung an die Stelle von $g . F . L . x$ die Grösse $(1 + m) g . F . L . x$, und an die Stelle von $g . H . L$ die Grösse $(1 + m) g . H . L$ setzen.

§. 394.

Eine weitere Rücksicht fordert noch der Umstand, dass in der angeführten Proportion die Widerlagsmauer als ein vereintes Ganzes betrachtet, folglich die ganze Masse der Widerlagsmauer bis auf die Grundlinie AB als an der Stützlinie hängend betrachtet wird. Da man der Verbindung durch Mörtel besonders bei hohen Mauern keinen so festen Zusammenhang zutrauen kann, so wollen wir diesem Umstande dadurch begegnen, dass wir nur denjenigen Theil der Mauer, welcher sich oberhalb der Stützlinie befindet, als darauf drückend betrachten, den darunter befindlichen Theil aber ausser der Rechnung lassen. *)

Fig. 7. *) Es sey JOB diejenige Stützlinie, welche dem horizontalen und senkrechten Drucke des Gewölbes und dem Drucke der darauf liegenden Mauer angemessen ist; $JN = u$ sey die Abscisse, $NO = y$

In dieser Hinsicht zeigt die unten angeführte Rechnung, dass wir in der allgemeinen Gleichung $g.L.F.x + g.L.\mathfrak{H}.\frac{x^2}{2} = g.L.H(A+e)$ an die Stelle von $g.L.\mathfrak{H}.\frac{x^2}{2}$ die Grösse $g.L.\mathfrak{H}.\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{2(A+e)}{3\mathfrak{H}}\right)$ zu setzen haben.

Bei der bisherigen Berechnung haben wir die Widerlagsmauern als voll oder massiv angenommen; da sich aber in denselben gewöhnlich Fenster, Thüren und andere unausgefüllte Räume befinden, welche keiner festen Bestimmung fähig sind, sondern von dem Baumeister nur nach Massgabe der Zwecke des Gebäudes bemessen werden können, und da auch selbst in den Gewölben Lunetten und Gurten angebracht zu werden pflegen, wodurch die ganze Last des Gewölbes nur auf die zwischen den Fenstern und Thüren übrigbleibende Zwischenpfeiler gestellt wird; so wird es darauf ankommen noch den kub. Inhalt dieser Pfeiler auszumitteln. Zu dieser Absicht wollen wir von dem kub. Inhalte der massiven Widerlagsmauer $\mathfrak{H}.L.x$ den kub. Inhalt $f.x$ abziehen, wo nämlich f die Wandfläche der unausgefüllten Räume bedeutet. Diese Rücksicht fordert, dass wir an die Stelle von $g.L.\mathfrak{H}.x$ die Grösse $g.L.\mathfrak{H}.x\left(1-\frac{f}{L.\mathfrak{H}}\right)$ setzen. Dadurch erhält nun die

die Ordinate dieser Stützlinie, die Höhe der Mauer über dem Punkte J, wo der Druck des Gewölbes in die Widerlagsmauer einfällt, sey $JC = c$. Das Gewicht des Elements $MNOonm$ ist offenbar $= g.L(c+y)\,du$, folglich das ganze Gewicht der auf der Stützlinie liegenden Mauer von J bis $O = g.L\int(c+y)\,du$. Fig. 7. Tab. 20.

Wollten wir nun mit diesem Gewichte $g.L\int(c+y)\,du$ eine Gleichung für die Stützlinie JOB suchen, so würde man auf denselben Ausdruck kommen, den wir bereits bei den steinernen Brückengewölben umständlich abgehandelt haben. Da jedoch jene Rechnung für den gegenwärtigen Fall zu weitläufig seyn würde, so wollen wir hiezu das folgende annähernde Verfahren wählen und annehmen, dass die Stützlinie bei ihrer Fortsetzung durch die Widerlagsmauer nur noch diejenige Last zu tragen habe, welche sich über der Diagonallinie JpB befindet. Nach dieser Voraussetzung lässt sich die Grösse y durch folgende Proportion bestimmen, $JN : Np = JQ : QB$ oder wenn $AB = x$ gesetzt wird, $u : y = x : A + e$, woraus $y = u\left(\frac{A+e}{x}\right)$. Substituiren wir diesen Werth für y in das $\int(c+y)\,du$, so ist die Fläche der Widerlagsmauer $CJpM = \int\left\{c + \left(\frac{A+e}{x}\right)u\right\}du = c.u + \left(\frac{A+e}{x}\right)\frac{u^2}{2}$. Wir erhalten demnach zur Bestimmung der Stützlinie folgende Proportion:
$g.L.F + g.L.c.u + g.L.\left(\frac{A+e}{x}\right)\frac{u^2}{2} : g.L.H = dy : du$, woraus sich die Gleichung $g.L.F.du + g.L.c.u.du + g.L.\left(\frac{A+e}{x}\right)\frac{u^2}{2}.du = g.L.H.dy$ ergibt. Wird diese Gleichung integrirt, so erhalten wir $g.L.F.u + g.L.c.\frac{u^2}{2} + g.L.\left(\frac{A+e}{x}\right).\frac{u^3}{6} = g.L.H.y.$ Für die ganze Stützlinie wird $u = x$ und $y = A + e$, wir erhalten daher zur Bestimmung der Stärke der Widerlage x die Gleichung $g.L.F.x + g.\frac{L}{2}\left(c + \frac{A+e}{3}\right)x^2 = g.L.H.(A+e)$ oder $g.L.F.x + g.L\left\{\mathfrak{H} - \frac{2}{3}(A+e)\right\}\frac{x^2}{2} = g.L.H(A+e)$.

allgemeine Gleichung für die Widerlagsmauern folgende Gestalt:

$$(1+m)\,g.L.F.x + g.L.\mathfrak{H}.\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{2(A+e)}{3\,\mathfrak{H}}\right)\left(1-\frac{f}{L.\mathfrak{H}}\right) = (1+m)\,g.L.H\,(A+e).$$

Bevor wir aus dieser Gleichung die Grösse x berechnen, wollen wir noch über die Bestimmung der Grössen F und H (A + e) Folgendes bemerken. An die Stelle von F ist die Querschnittsfläche des Gewölbes vom Scheitel bis an die Widerlage zu setzen. Diese ist für ein elyptisches Gewölbe $(h+b)\,a - \frac{\pi.a.b}{4} = a\left(h+\frac{3}{14}.b\right)$. Zur Bestimmung der Grösse H dient die bereits angeführte Bemerkung, dass der horizontale Druck H dem Produkte aus dem Krümmungshalbmesser im Scheitel $\left(\frac{a^2}{b}\right)$ und der Höhe des Gewölbes beim Schlussteine (h) gleich ist, folglich haben wir $H = \frac{a^2.h}{b}$. Zur Bestimmung der Höhe der Stützlinie über den Kämpfern (e) ist zu bemerken, das wir bereits oben §. 382 gezeigt haben, dass die Stützlinie die krumme Linie des elyptischen Bogens bei v = 60 Grad berühren müsse. Die Höhe dieses Punktes ist aber $b.\mathrm{Cos}\,60^0 = \frac{1}{2}\,b$. Da es bei diesen Rechnungen, wobei so vieles geschätzt werden muss, nicht auf eine mathematische Genauigkeit ankommt, so können wir in jedem Falle die Grösse $e = \frac{1}{2}\,b$, und wenn wir die Stützlinie durch die Mitte des Schlussteines gehen lassen, $e = \frac{1}{2}(b+h)$ setzen.

Nach diesen Bemerkungen haben wir zur Bestimmung der Stärke der Widerlagsmauern (x) mit Hinweglassung des gemeinschaftlichen Faktors g.L folgende allgemeine Gleichung

$$\left(1+m\right)a\left(h+\frac{3}{14}b\right)x + \frac{\mathfrak{H}.x^2}{2}\left(1-\frac{(2A+b+h)}{3\,\mathfrak{H}}\right)\left(1-\frac{f}{\mathfrak{H}.L}\right) =$$

$$= \left(1+m\right)\frac{a^2.h}{b}\left(A+\tfrac{1}{2}(b+h)\right).$$

Zu einem Beispiele wird angenommen, dass ein 120 Fuss (= L) langes und 30 Fuss (= 2 a) breites Wirthschaftsgebäude mit einem elyptischen Tonnengewölbe zu überwölben sey, bei welchem die Höhe über dem Kämpfer b = 10 Fuss betragen soll. Hiebei ist:

Die Höhe des Kämpfers über der ebenen Erde A = 4 Fuss.
Die Höhe des Schlussteines h = 1 Fuss.
Die Höhe der Widerlagsmauer $\mathfrak{H} = A + b + h =$ 15 Fuss.
Die Fläche der Fenster und Thüren nach einem vorläufigen Uiberschlage f = 216 Qdr. Fuss.
Das Verhältniss der auf das Gewölbe zu legenden Belastung . m = $\frac{1}{3}$.

demnach $$\frac{4}{3}.15\left(1+\frac{30}{14}\right)x + 15\,\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{(8+11)}{3.15}\right)\left(1-\frac{216}{15.120}\right) = \frac{4}{3}.\frac{225}{10}\left(4+5{,}5\right)$$

hieraus folgt die Stärke der Widerlage $x = 3{,}7$ Fuss.

Wir bemerken schliesslich, dass der Mangel bestimmter Regeln zur Bemessung der Stärke der Widerlagsmauern wahrscheinlich die Ursache sey, dass man hiezu bisher nur praktische, von bestehenden Gebäuden entlehnte Vorschriften gebrauchte, deren Unzulänglichkeit jedoch aus so vielen verunglückten Gebäuden bekannt ist. Die hier aufgestellten Grundsätze dürften Jedermann einleuchten, und bei ihrer Anwendung dem Zwecke entsprechen.

§. 395.

Unter die wichtigern Gegenstände der neuern Mechanik und Baukunst gehören die Hänge- oder Kettenbrücken. Die einfachste Art dieser Brücken besteht bereits seit Jahrhunderten in Asien und Südamerika, wo sie zur Uebersetzung von Flüssen und Abgründen angewendet wurde; man spannte nämlich quer über dieselben hinreichend starke Seile, und hing eine Brückenbahn daran, welche gewöhnlich nur für Fussgänger bestimmt war. Aehnliche Brücken sind laut den hierüber erhaltenen Nachrichten schon seit langer Zeit auch in China erbaut, und daselbst auch eiserne Ketten statt der Seile angewendet worden. Ueber den Fluss *Sampoo* in *Hindostan* soll sich, Reisebeschreibungen zu Folge, eine an fünf eisernen Ketten, deren jede aus 500 Gliedern besteht, hängende Brücke von 160 *Yards* Länge befinden.

In Nordamerika waren, dem Berichte des Architekten *Thomas Pope* zu *New-York* zu Folge, im Jahre 1811 bereits 8 Kettenbrücken ausgeführt, worunter die, um das Jahr 1809 in *Massachusets* über den Fluss *Marimack* erbaute, eine Spannung von 244 Fuss hat.

Den Engländern gehört inzwischen der Ruhm, die grössten und vollkommensten Bauwerke dieser Art ausgeführt zu haben. Die älteste Kettenbrücke in England ist die über den Fluss *Tees* angelegte *Winchbrücke*, welche im Jahre 1741 errichtet wurde; diese Brücke führt über einen beinahe 60 Fuss tiefen Abgrund, sie hat 70 Fuss Länge, beiläufig 2 Fuss Breite, und die Ketten sind in den zu beiden Seiten vorhandenen Felsen befestigt.

Im Jahre 1814 machte Herr *Telford* in Verbindung mit den Ingenieurs *Donkin*, *Chapmann* und *Rennie*, dann Hrn. Professor *Barlow* eine Reihe von Versuchen mit geschmiedeten Eisenstangen und Ketten, wovon die letztern eine Länge von 30 bis 900 Fuss hatten, an zwei Enden aufgehängt, und an verschiedenen Punkten derselben belastet wurden. Die Resultate der Versuche, welche derselbe über die absolute Festigkeit des Schmiedeeisens anstellte, haben wir bereits S. 256 angeführt. Die Versuche mit belasteten Ketten finden sich umständlich in dem Werke: *An Essay on the Strength and Stress of Timber, also an Appendix on the Strength of Iron, and other Materials, by Prof. Barlow; London* 1817, beschrieben. Das Resultat dieser weitläufigen Versuche, welche hier umständlich anzuführen, der Raum nicht gestattet, lieferte dem Berichte der oben genannten Ingenieurs zu Folge den Beweis, dass Kettenbrücken für die grössten Spannungen ausführbar seyen, dass sie dieselbe Sicherheit wie die bisherigen steinernen oder gusseisernen Brücken gewähren, und dass sie in den meisten Fällen einen weit geringern Kostenaufwand als die letztern verursachen.

In der That gewähren Kettenbrücken in jenen Fällen, wo es wegen der Tiefe der Abgründe, oder wegen der Tiefe und Schnelligkeit der zu übersetzenden Ströme unmöglich, oder doch ausserordentlich kostspielig wäre, Mittelpfeiler zu erbauen, die grössten Vortheile, indem man sie mit weit grössern Spannweiten anlegen kann, als es bei hölzernen, steinernen oder gusseisernen Brücken für möglich erachtet wird. *Navier* stellt in seinem, über diesen Gegenstand bekannt gemachten Werke: *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, Paris* 1823, *chez Carilian Goeury*, die Meinung auf, dass eine

Kettenbrücke ohne Anstand in einem Bogen von 500 Metres (1582 N. Oe. Fuss) Spannung erbaut werden könnte, wenn nur die Unterstützung der Ketten durch 30 Metres (95 N. Oe. Fuss) hohe Tragpfeiler geschieht, und es waltet kein Grund ob, dieser Ansicht zu widersprechen. Kettenbrücken gewähren aber überdiess noch den Vortheil, dass ihre Aufstellung selbst bei den grössten Spannweiten in einer viel kürzern Zeit bewirkt werden kann, als es bei der Aufstellung steinerner Brückenbögen der Fall ist, dass sonach die Schiffahrt in Flüssen hiebei weit weniger als bei dem Baue anderer Brücken unterbrochen wird. Sollte endlich, was jedoch bisher noch nirgends statt gefunden hat, mit der Zeit eine oder die andere Kette schadhaft werden, so können ohne Anstand nicht bloss einzelne Glieder aus einer Kette herausgenommen und durch neue ersetzt, sondern auch die Ketten verkürzt und der Fahrweg erhöht werden, ohne desshalb die Communikation, wie es bei Vornahme solcher Reparaturen an steinernen oder gusseisernen Bögen der Fall ist, zu hemmen.

Seit jener Zeit, als Herr *Telford* den genannten Bericht erstattete, wurde die öffentliche Aufmerksamkeit in England immer mehr und mehr auf diesen Gegenstand gerichtet, und mehrere der grössten Bauten dieser Art ausgeführt. Obwohl man sich in diesem Werke auf eine Beschreibung mehrerer solcher Bauten nicht einlassen kann, so dürfte es doch für unsere Leser sehr erwünscht seyn, hier die Beschreibung und die Zeichnungen einiger Kettenbrücken zu finden, welche bei ähnlichen Anlagen zum Grunde gelegt werden können, oder auch dazu dienen, Irrthümer zu vermeiden, über die sich die Erfahrung bereits ausgesprochen hat. Hiedurch wird auch die nachfolgende Theorie leichter verstanden werden.

§. 396.

Unter den neuern Bauten dieser Art zeichnet sich vorzüglich die *Hammersmith*-Kettenbrücke, welche beiläufig zwei deutsche Meilen oberhalb *London* über die *Themse* erbaut wurde, aus. Im Juny 1824 trat eine durch Parlamentsakte ermächtigte Aktiengesellschaft zum Baue dieser Brücke zusammen, und unterzeichnete einen Fond von 80000 Liv. st.; der Bau wurde bald hierauf begonnen, und die vollendete Brücke am 23ten August 1827 zum allgemeinen Gebrauche des Publikums eröffnet. Der Ingenieur, welcher den Entwurf für den Bau dieser Brücke verfasste, und den Bau nachher leitete, war Herr *William Tierney Clark*, allein die Unternehmungsgesellschaft glaubte sicherer vorzugehen, wenn sie vorläufig den Plan dieses Ingenieurs Hrn. *Telford* und andern Bauverständigen zur Beurtheilung und Verbesserung vorlegte *), wor-

*) Als ein Belege, wie liberal die Arbeiten der Ingenieurs in England belohnt werden, wird angeführt, dass die Aktiengesellschaft laut ihrem am 28. May 1829 gedruckten Rechnungsabschlusse für diese Berathungen und vorgeschlagenen Abänderungen den genannten Ingenieurs den Betrag von 1065 Liv. 13 sh. bezahlt, und Hrn. *Clark* ausserdem für seinen Entwurf und die Bauführung mit 1778 Liv. 16 sh. entschädiget hat.

nach dann erst der Bau ausgeführt wurde. Man kann daher diese Brücke als das Resultat der Erfahrungen ansehen, welche man bis zum Jahre 1827 im Baue der Kettenbrücken in England gemacht hat. Die Dimensionen derselben in der nachfolgenden Beschreibung sind sämmtlich an Ort und Stelle in *Hammersmith* verificirt und daselbst vom Hrn. Clark die nothwendigen Aufklärungen in Betreff dieses Baues ertheilt worden. Die Dimensionen bei dieser und der hierauf folgenden *Menai*-Kettenbrücke sind in englischem Maasse angegeben.

Die Hammersmithkettenbrücke, welche Tab. 21 und 22 darstellt, ist für Fussgänger und Fuhrwerk aller Art bestimmt, und unterscheidet sich von allen bisher in England ausgeführten Kettenbrücken dadurch, dass sie aus drei Bogen besteht, welche mitsammen durch Ketten verbunden sind, die sich oberhalb zweier im Flusse erbauten Tragpfeiler auf Rollen hin- und herbewegen können, je nachdem ein Bogen oder Theil der Brücke mehr als der andere belastet ist. Während daher die über den *Tweed*-Fluss erbaute, und seit dem 28ten July 1820 eröffnete *Unions*-Kettenbrücke aus einer einzelnen 367 Fuss (354 N. Oe. Fuss) langen und 18 Fuss (17 N. Oe. Fuss) breiten Brückenbahn besteht, sind bei der Hammersmithbrücke drei einzelne Brückenbahnen oder Brückenfelder vorhanden, deren jedes für sich dem andern nachgeben kann. Tab. 21 und 22.

Ein zweiter Unterschied der Hammersmithbrücke gegen die bisherigen Construktionen dieser Art besteht darin, dass die Ketten, welche die zwei äussern Brückenfelder tragen, nicht durchaus oberhalb der Brückenbahn liegen, sondern auch unter dieselbe gehen. Während nämlich ein Theil dieser zwei Brückenfelder an den Ketten hängt, wird der andere Theil derselben von den Ketten von unten unterstützt oder getragen, wie diess Tab. 21 aus der Längenansicht und den Durchschnitten, so wie Tab. 22 aus dem im vergrösserten Maasse gezeichneten Durchschnitte ersichtlich ist. Bei diesem Systeme ist daher, statt die ganze Breite des Flusses mit einem Bogen zu überspannen, dieselbe in 5 Theile von beinahe gleicher Länge getheilt worden, wovon ein jeder äussere Bogen einen Theil, der mittlere aber 3 Theile zur Länge hat; es ergibt sich ferner, dass die Tragpfeiler, die eine Höhe von 48 Fuss über die Brückenbahn haben, wenn sie an den beiderseitigen Ufern aufgestellt worden wären, wie es bei den frühern Kettenbrücken der Fall war, bei demselben Verhältniss des Sinus versus zur Spannweite (hier $29{,}5 : 400\frac{1}{4}$) eine um 6 Fuss grössere Höhe erhalten hätten, (da $400\frac{1}{4} : 29{,}5 = 732\frac{2}{3} : 54$ und $54 - 48 = 6$); die Ketten hätten daher stärker seyn, und weil sie über die Pfeiler gehen, so hätten sie auch rückwärts auf eine bedeutende Weite bis zu ihrem Befestigungspunkte verlängert werden müssen. Durch die angenommene Construktion wurde daher die Höhe der Tragpfeiler geringer, und es sind sowohl die Dimensionen, als auch die Baukosten der Brücke wesentlich vermindert worden.

Ausser diesen Verbesserungen ist das Detail der Construktion der Hammersmithbrücke eben so belehrend als neu, indem bei derselben Bestandtheile von Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz auf eine solche Art zusammenwirken, dass hiedurch eine Festigkeit des Ganzen erzielt wird, welche keine andere bestehende Kettenbrücke in demselben Grade besitzt.

§. 397.

Tab. 21. und 22.

Die ganze Länge der *Hammersmith*kettenbrücke beträgt:	Engl. Maass.
1tens. Der mittlere oder Hauptbogen misst	400 Fuss 3 Zoll
2tens. Die zwei Tragpfeiler oder Thürme zu beiden Seiten desselben, ein jeder 22 Fuss stark	44 „ — „
3tens. Die aufgehängte Brückenbahn hinter dem Tragpfeiler gegen die Grafschaft *Middlesex*	142 „ 11 „
4tens. Der aufgehängte Theil der Brückeubahn hinter dem Tragpfeiler gegen die Grafschaft *Surrey*	145 „ 6 „
5tens. Die 2 Landwiderlagen, eine jede von 45 Fuss Stärke .	90 „ — „
Demnach beträgt die Länge von der Rückseite eines Landpfeilers zur Rückseite des andern Landpfeilers gemessen . . .	822 Fuss 8 Zoll,

oder 793,2 N. Oe. Fuss. Zieht man jedoch die Stärke der zwei Landpfeiler ab, so ergibt sich die Weite der Brücke für das Strombett = 732 Fuss 8 Zoll oder 706,4 N. Oe. Fuss.

Die Brückenbahn ist in 3 Theile getheilt; der mittlere Theil oder die Fahrbahn beträgt 20 Fuss auf der Brücke und 14 Fuss in den Thoren der zwei Tragpfeiler; zu beiden Seiten derselben sind Fusswege, wovon jeder 5 Fuss breit ist; sonach beträgt die Breite der Brücke, so weit sie von Wägen und Fussgängern benützt wird, 30 Fuss; wenn man jedoch die Breite, welche die Ketten sammt Geländern einnehmen, hinzuschlägt, so beträgt die ganze Breite der Brückenfelder 33½ Fuss.

Die Brückenbahn liegt 16 Fuss oberhalb dem Wasserspiegel des höchsten Wasserstandes zur Zeit der Fluthen der Themse, weil hier Dampf- und andere Schiffe, die ihre Masten oder Rauchröhren umlegen, durchgehen, und sie erhebt sich von den Thoren der Tragpfeiler sanft gegen die Mitte, wo sie um 8 Zoll höher als an den Ufern liegt. Die Haupt- oder Tragpfeiler (*principal piers, or suspension towers*), welche im Flusse erbaut sind, haben von der Oberfläche der Brückenbahn gemessen, eine Höhe von 48 Fuss; die Länge, welche sie winkelrecht auf die Richtung der Brücke einnehmen, beträgt 42 Fuss, und ihre Stärke, welche sie im Flusse haben, 22 Fuss, wie bereits oben bemerkt wurde. Diese Pfeiler sind von Bruchsteinen erbaut, an ihrer Aussenseite jedoch ganz mit Quadersteinen verkleidet, und ausserdem laufen 6 Lagen starker Quadern in angemessenen Entfernungen durch die ganze Fläche derselben hindurch. Hievon liegt die erste Lage auf dem Grundroste, die zweite in der halben Höhe bis zur Fahrbahn, die dritte in der Fahrbahn, die vierte unter den Pilastern, die fünfte in der halben Höhe bis zu den gusseisernen Satteln und die oberste Lage Quadern, welche durchaus gehen, unter diesen Satteln. Die Verankerung der Quadern unter einander geschah durch gusseiserne Röhren von 3 Zoll Durchmesser und ½ Zoll Stärke, die immer drei Lagen Steine mitsammen verbanden. Der ganze Bau dieser Pfeiler wurde mit aller möglichen Sorgfalt und Fleisse vorgenommen.

Die Widerlagen oder Haltpfeiler sind aus Steinen und Ziegeln von der besten Qualität aufgeführt, und mit Oeffnungen oder Kanälen zum Durchlassen der Ketten versehen. Die Verbindung der Quadern geschah hiebei auf gleiche Art und diese Pfeiler haben 45 Fuss Länge in der Richtung der Brücke und 38 Fuss Breite.

§. 398.

Die Brückenbahn hängt an 4 Hauptketten, die auf der Entfernung von beiläufig 1 Fuss doppelt über einander laufen, demnach eigentlich an 8 Haupt- oder Spannketten. Am Rande der Brücke lauft zu jeder Seite ein solches Paar Ketten und zwischen dem Fuss- und Fahrwege befindet sich abermals zu jeder Seite ein Paar Ketten. Diese 8 Hauptketten sind an der Rückseite der Widerlagsmauern befestigt, gehen durch dieselben und in den zu diesem Behufe angebrachten Oeffnungen durch das Mauerwerk der Tragpfeiler, laufen daselbst auf eisernen Rollen und senken sich in der Mitte des 400 Fuss 3 Zoll langen Feldes auf 29 Fuss 6 Zoll herab, welches daher der sogenannte Pfeil oder Sinus versus ist. Eine jede der 4 innern Hauptketten, welche den Fahrweg begränzen, besteht aus 6 einzelnen, nebeneinander liegenden, mitsammen verbundenen Schienenreihen, welche im Grundrisse Fig. 2 dargestellt sind; eine jede von den 4 äussern Ketten, welche am Rande der Brücke fortlaufen, besteht aus 3 solchen Schienenreihen, demnach bilden 36 Schienenreihen die 8 Hauptketten. Jede einzelne Schiene hat 5 Zoll Höhe und 1 Zoll Breite; es beträgt daher der Querschnitt aller Spannketten 36 . 5 = 180 engl. Quad. Zoll (167,3 N. Oe. Quad. Zoll).

Tab. 21. und 22. — Fig. 2. Tab. 22.

Von diesen Spannketten gehen Tragstangen, an welchen die Brückenfelder hängen und deren jede einen Quad. Zoll im Querschnitt hat, in der Entfernung von 5 zu 5 Fuss senkrecht herab, das mittlere 400 Fuss 3 Zoll lange Brückenfeld hängt daher an 4mal 81 = 324 Tragstangen; ein jedes von den Seitenfeldern aber hängt an 4mal 23 = 92 schmiedeisernen Tragstangen von demselben Querschnitte, und wird von 4mal 7 = 28 gusseisernen Stützen, welche sich unter der Bahn befinden, getragen oder gestützt. Die Construction dieser Stützen ist aus Fig. 3 ersichtlich. Wo die Ketten die Brückenbahn durchschneiden, sind sie unmittelbar an dieselbe befestigt.

Fig. 4. — Fig. 3.

Zur Verfertigung der Glieder der obigen 8 Hauptketten wurde möglichst reines Roheisen nach der *Puddlings* Methode gefrischt, die Theile ausgewalzt, zerschnitten und so wie bei dem Raffiniren des Stahles zusammengebunden, dann abermals geschweisst und ausgewalzt, und nachdem diese Operation zweimal wiederholt worden, sind erst die Stäbe zu den Kettengliedern unter dem Streckhammer verfertigt worden.

Die Länge eines solchen Kettengliedes beträgt von Mitte zu Mitte der an ihrem Ende vorhandenen gebohrten Bolzenlöcher 8 Fuss 9¾ Zoll. Diese Bolzenlöcher haben 2¾ Zoll im Durchmesser, und die Kettenglieder sind bei denselben verhältnissmässig breiter, damit das Eisen um etwas mehr als seine Stärke von 5 Quad. Zoll im Querschnitte behalte.

Die einzelnen Schienen sind durch abgerundete, 8 Zoll hohe, 15 Zoll lange und 1 Zoll dicke Blätter von gewalztem Eisen, wovon Fig. 7 die Ansichten zeigt, zu einer Kette verbunden. Bei der Verbindung der Glieder der mittlern Hauptketten liegen daher 6 Schienen und 7 Blätter neben einander, die eine Breite von 13 Zoll einnehmen; bei den äussern Ketten 3 Schienen und 4 Blätter, die zusammen 7 Zoll breit sind. Diese Blätter haben an jedem Ende eine Oeffnung von 2¾ Zoll Durchmesser zum Durchstecken der zur Verbindung der Schienen nöthigen Bolzen, und etwas über ihrer Mitte eine 1½ zöllige Oeffnung zum Anhängen der vertikalen Tragstangen. Um gleiche Längen der Kettenglieder und Blätter zu erhalten, wurden alle Oeffnungen für die Bolzen so gebohrt, dass

Fig. 7.

immer 3 oder 6 zu einer Hauptkette gehörige Schienen übereinander gelegt und gemein-
Fig. 8. Tab. 22. schaftlich durchbohrt wurden. Die runden $1\frac{1}{2}$ und $2\frac{3}{4}$ zölligen Bolzen Fig. 8 wurden alle abgedreht, an den Enden schraubenförmig eingeschnitten und mit gusseisernen Muttern versehen.

Fig. 9. Die Form der Hängestangen zeigt Fig. 9; die obern und untern Ketten sind so gelagert, dass die Hängstangen der obern Kette zwischen den Räumen, welche die Verbindungsblätter der untern Kette bilden, senkrecht durchgehen; zu diesem
Fig. 6. Behufe wurden die Gehänge abcdef bei den äussern, und ghik bei den mittlern Hauptketten angewendet.

§. 399.

Die acht beschriebenen Hauptketten sind nicht auf den Tragpfeilern befestigt,
Fig. 1. sondern laufen daselbst wie Fig. 1 zeigt, über zwei Reihen gusseiserner genau abgedrehter Walzen, die einen für die obern und die andern für die untern Ketten; diese Walzen haben 11 Zoll Durchmesser, und 3zöllige schmiedeiserne Zapfen, die in metallenen Lagern ruhen; die letztern sind auf einem massiven, gusseisernen Gerüste oder Satteln, welche in die Tragpfeiler eingelassen, und fest an dieselben angeschraubt sind, befestigt. Da die Achsen dieser Walzen, wie die Figur zeigt, in der Peripherie eines Kreises liegen, so ergibt sich die leichte Beweglichkeit derselben und der darauf ruhenden Ketten; die letztern haben einen grössern Durchschnitt als 5 Quad. Zoll.

Die Hauptketten laufen, wie schon bemerkt wurde, paarweise übereinander, und sind innerhalb vier Oeffnungen oder Kanälen durch die Widerlagen geführt, an deren Rückseite sie an sehr starken gusseisernen Platten von der Form wie der Durch-
Fig. 5. schnitt Fig. 5 zeigt, befestigt sind. Diese Platten sind an das Mauerwerk angeschraubt; damit jedoch die Spannketten um mehrere Zolle verlängert oder verkürzt, und ihnen bei der Einhängung oder auch später die gehörige Spannung gegeben werden könne, sind die letzten Glieder derselben viel stärker und mit einer 6 Zoll langen Oeffnung versehen, in welche ein ebenfalls stärkerer Bolzen c eingesetzt wird. Dieser Bolzen ruht auf dem Lager ab, welches durch die von zwei Seiten gegen einander getriebenen eisernen Keile m und n vom Boden der Platte mehr oder weniger entfernt, und dadurch eine jede Kette gehörig gespannt werden kann.

§. 400.

Fig. 4. u. 6. Das untere Ende einer jeden Hängestange, welche daselbst $2\frac{1}{4}$ Zoll im Gevierten hat, ist mit einer Oeffnung versehen, durch welche ein eiserner Keil getrieben, und dadurch der von einer jeden Stange getragene Theil der Brückenbahn gehörig angezogen werden kann. Auf diesem Keile liegen nämlich starke gusseiserne, an ihrem Umfange auf 2 Seiten mit Rändern versehene Platten pr, die zwei paarweise neben einander liegende Unterzüge von 4 Zoll Stärke und 12 Zoll Höhe tragen, zwischen welchen letztern die Hängeeisen durchgehen. Um der Fahrbahn möglichst viel Festigkeit und Sicherheit gegen Seitenschwankungen zu geben, sind diese Un-

terzüge durch diagonale Verstrebungen, welche in Fig. 3 in der untern Ansicht dargestellt sind, mitsammen verbunden. An die Unterzüge sind nämlich an den gehörigen, in der Richtung der Diagonalen liegenden Orten gusseiserne Platten oder Schuhe m angeschraubt, die theils auf 3, theils auf 4 Seiten mit hervorstehenden Rändern versehen sind. Von der vierten oder offenen Seite wurden nun eichene Streben n, die mit möglichst grosser Genauigkeit zugerichtet waren, eingeschoben, und gut angetrieben, wodurch dann die Brückenbahn, im Falle die Arbeit mit dem gehörigen Fleisse vorgenommen wird, wie es in *Hammersmith* wirklich der Fall war, eine ungemeine Festigkeit gegen Schwingungen nach der Seite erhält. Fig. 3. Tab. 21.

Um nun der Brückenbahn auch möglichst viel Festigkeit gegen vertikale Schwingungen zu geben, liegen winkelrecht über den Unterzügen als Begränzung des Fahr- und Fussweges der ganzen Länge der Brücke nach zwei Lang-Schwellen A, A (also 4 auf der ganzen Brücke), deren jede 15 Zoll hoch und 6 Zoll breit ist; diese Schwellen liegen nur so weit von einander entfernt, dass sie die Hängestangen zwischen sich durchlassen, und sind durch Schrauben mit einander verbunden; oberhalb denselben sind aber Hängewerke von einer eigenen Construktion aufgestellt. Fig. 4 und 6. Tab. 22.

Es sind nämlich gusseiserne Säulen osmn mit einer Sohlenplatte mn auf die Schwellen geschraubt, der Kopf o t s oder die gusseiserne Kappe dieser Säulen kann jedoch abgenommen werden, und ist zu beiden Seiten mit viereckigen Oeffnungen x, x für die zwei neben einander liegenden hölzernen Streben l o, s v von 5 Zoll Höhe und 4 Zoll Breite versehen. Diese Streben sind an ihrem untern Ende in gusseiserne Schuhe l, v die sie genau umfassen, eingesetzt. Durch jede Säule geht eine schmiedeiserne, oben mit Schraubengewinden und Mutter versehene Stange t u, deren unterer Kopf die unter den Bohlen angebrachte eiserne Platte wy umfasst. Wird nun die Mutter bei t angezogen, so geht die Kappe der Säule und mit ihr auch die hölzernen Streben herab, die letztern werden demnach auch in dem Maasse gespannt. Es erhellet von selbst, dass man, wenn die Spannung der Streben und des Hängewerkes mit der Zeit nachlassen sollte, durch Anziehen der Schrauben diese Spannung wieder vermehren, folglich die Brückenbahn immer in einer festen Lage erhalten könne. Eben so leuchtet es auch ein, dass dieses aus einer Verbindung von Holz, Guss- und Schmiedeeisen bestehende Hängwerk die vertikalen Schwingungen auf ähnliche Art vermindere, wie es bei den Verstrebungen unterhalb der Brücke hinsichtlich der horizontalen Schwingungen der Fall ist.

Die Scheidewände zwischen der Fahrbahn und den Fusswegen werden auf diese Art durch die Langschwellen, die gusseisernen Hängesäulen mit den hölzernen Streben und die senkrecht herabgehenden Hängestäbe gebildet. Am Rande der Brücke sind gusseiserne mit rosettenförmigen Kappen bedeckte Säulen B C aufgestellt, die mit dem Geländer ein ähnliches, obgleich weit minder festes, Hängewerk bilden, wie es zwischen der Fahrbahn und den Fusswegen angebracht ist. Fig. 6.

§. 401.

Der übrige Theil der Brückenbahn besteht aus einer doppelten Bebrückung, die auf den Unterzügen, die eine der Länge, die andere, und zwar die obere der Fig. 6.

Fig. Breite der Brücke nach von 3 Zoll starken Bohlen aufgenagelt wurde. Zwischen diese
6. Tab. zwei Bohlenlagen wurde ein mit Theer und Pech getränkter Filz (*Borrodale's* Patent-
22. Filz) gelegt. Diese obere Bohlenlage in der Fahrbahn besteht aber aus Klötzen (einem Stöckelpflaster) von 3 Zoll Höhe, die senkrecht auf die Jahresringe abgeschnitten wurden und mit dem Kerne aufwärts liegen. Auf diese Klötze wurde ein feiner durchgesiebter Granit mit einer Mischung von Theer, Pech und Kalk gelegt, um das Holz vor Fäulniss zu bewahren, und um den Pferden einen festern Eingriff, als es auf den Bohlen der Fall wäre, zu gewähren.

Alle eisernen Theile der Brücke sind, wie bereits §. 274 bemerkt wurde, zur Verminderung der durch die Sonnenstrahlen bewirkten Ausdehnung mit weisser Oehlfarbe angestrichen, und dieser Anstrich wird von Zeit zu Zeit sorgfältig erneuert.

Die zu beiden Seiten stehenden Zollhäuser bilden Achtecke. Die Beleuchtung der Brücke geschieht durch gusseiserne Gas-Lampen.

§. 401.

Den mündlichen Mittheilungen zu Folge, welche Herr *Clark in Hammersmith* in Bezug auf mehrere Gegenstände dieses Brückenbaues ertheilte, haben wir noch Folgendes beizufügen:

Um die Bewegungen der Ketten auf den gusseisernen Rollen der Tragpfeiler zu prüfen, brachte Herr *Clark* einen Zeiger im Mauerwerke an, der mit einem gut bezeichneten Feilstriche der Ketten zusammen fiel. Wenn nun Wägen im scharfen Trabe über die Brücke giengen, betrug die Bewegung der Ketten ein Viertheil eines Zolles, und die beobachtete grösste Verschiebung derselben war überhaupt nie mehr als ein Zoll.

Auf gleiche Art wurde die Grösse des Sinus versus von 29 Fuss 6 Zoll in der Mitte der Brücke zu verschiedenen Zeiten von Herrn *Clark* auf die Art gemessen, dass derselbe mit einem am Ufer aufgestellten Nivellier-Instrumente die grösste Senkung der Ketten unter einem angenommenen Fixpunkte sowohl bei verschiedenen Temperaturen, als auch zur Zeit heftiger Winde und bei eingetretenen bedeutenden Belastungen der Brücke bestimmte. Der grösste Unterschied, welcher sich bei diesen Messungen der Senkungen der Kette in ihrer Mitte ergab, betrug 5 Zoll, womit eine Verschiebung von beiläufig 1 Zoll der Ketten auf dem Tragpfeiler übereinstimmt (Siehe die Note Seite 278).

Uiberdiess wird von Zeit zu Zeit die Auflage der Ketten in den Tragpfeilern vom Herrn *Clark* untersucht, und derselbe hat bisher noch nie eine Aenderung oder einen nachtheiligen Einfluss gefunden; die Bauart der Hammersmith-Brücke dürfte daher als durch die Erfahrung hinreichend bewährt, angesehen werden.

§. 403.

Es dürfte für viele unserer Leser interessant seyn, den Kostenausweis dieser Kettenbrücke und eine Vergleichung dieser Kosten mit jenen der gusseisernen und steinernen über die Themse erbauten Brücken zu erhalten.

Die Auslagen für den Bau der Hammersmith-Brücke betrugen laut dem gedruckten Rechnungsabschlusse der Akziengesellschaft vom 28ten May 1829 folgendes:

	Liv. st.	sh.	d.
1. Für die Herstellung der Fangdämme, Grundaushebung etc., für die Fundirung der zwei Landpfeiler (*Fixture piers*) und der zwei im Flusse errichteten Hauptpfeiler (*Principal piers*)	3385	4	7
2. Für das Stein und Ziegelmauerwerk in den 4 Pfeilern 18981 Liv. st. 2 sh. 4 d. Für die Ornamente an den Pfeilern, für Zollhäuser, für das Dach oberhalb der Rollen auf den Pfeilern und andere Gegenstände dieser Art . . 1332 — 13 — 5 —	20313	15	9
3. Für das Eisenwerk der Brücke laut Kontrakt	15636	0	1
4. Für die hölzerne Brückenbahn, das Brückengeländer etc. . . .	3788	13	11
5. Für die Gusseisentheile an den Geländern	451	8	7
6. Für das Kalfatern der hölzernen Brückenbahn	100	17	6
7. Für die Maschinerie unter den Zollhäusern, um die Fussgänger, welche über die Brücke gehen, zu zählen, für die gusseisernen Lampen etc.	194	16	0
8. Für das Anstreichen der ganzen Brücke mit Oehlfarbe . . .	149	1	7
9. Für Zimmermannsarbeiten, als Einfassung des Bauplatzes, Modelle für die Quadersteine, die Gusseisentheile etc.	291	17	11
10. Für die Beschotterung bei den Landpfeilern	231	12	11
11. Kleinere Gegenstände von Gusseisen	92	11	8
12. Für ein eisernes Geländer, um den Landpfeiler auf der *Surrey*-Seite gegen das Wasser einzuschliessen	120	4	2
13. Für die Dammanführung bei dem Landpfeiler auf der *Surrey*-Seite	84	11	3
14. Für verschiedene Schmidt- und Schlosserarbeiten, als für die Befestigung der Lampen etc.	195	4	6
15. Für die Tafeln, die bei der Brücke aufgestellt sind, und die Zoll-Tariffe nebst andern Vorschriften enthalten, dann für verschiedene kleinere Auslagen	213	2	5
Sonach betrugen die eigentlichen Kosten der Brücke . . oder 452491 Gulden 25 kr. Conv.-Münze.	45249	2	10

Zu diesem Rechnungsabschlusse hat Herr *Clark* noch folgende mündliche Erklärungen beigefügt:

Die zwei Kontrahenten, welche die Pfeiler herstellten, und das Eisenwerk lieferten, waren verpflichtet, alle Gerüste ohne weitere Entschädigung beizuschaffen, und alle Auslagen jeder Art, die sich bei dem Baue ergaben, zu tragen, indem sie nur für die fertige Arbeit nach dem Kubik-Maasse zu den kontraktmässig festgesetzten Preisen bezahlt wurden. Unter diesen Bedingnissen erhielt der Kontrahent der Mauerwerke den Betrag von 10 d. bis 11 d. für einen Kubik-Fuss Ziegelmauerwerk (105 fl. C. M. für die N. Oe. Kubik-Klafter) und 4 sh. für einen Kubik-Fuss Steinmauerwerk (482 fl. C. M. für eine N. Oe. Kubik-Klafter), worunter jedoch auch die Ornamente begriffen sind, die nicht höher gezahlt wurden. Der Preis von

4 sh. zerfiel nun wieder in 2 sh. 3 d. für den Kubik-Fuss Stein, rauh abgearbeitet, von *Bramley Fall* bei *Leeds* in der Grafschaft *York* zugeführt und an die Ufer der Themse in *Hammersmith* abgelegt; dann in 1 sh. 9 d. für das Zuführen vom Ufer zu den Pfeilern, das Aufstellen, den Mörtel, das reine Abarbeiten, und der Rest blieb endlich dem Kontrahenten als Gewinn.

Die Ziegeln, die man bei dem Baue verwendete, hatten die in England gewöhnlichen Dimensionen von 9 Zoll Länge, 4 Zoll Breite und 2½ Zoll Dicke; hievon kostete das Tausend zur Brücke an das Ufer geliefert 38 *sh.* (19 fl. C. M.), wobei aber zu bemerken ist, dass die *Hammersmith*-Ziegeln in England als ganz vorzüglich bekannt sind. Der Kalk musste 40 englische Meilen weit auf einer Strasse und 60 solche Meilen zu Wasser beigeführt werden, und es kamen 8 *bushels* gebrannten Kalk in *Hammersmith* geliefert, auf 20 *sh.* (Der N. Oe. Metzen auf 2 fl. 9 kr. C. M.) Der Sand, welcher zu dem Mörtel verwendet wurde, musste sämmtlich von *Woolwich*, etwa 4 deutsche Meilen weit auf der Themse stromaufwärts zugeführt werden, weil bei *Hammersmith* kein guter Sand zu finden war; ein Kubik-*Yard* Sand kam auf 4 *sh.* zu stehen. (Die N. Oe. Kubik-Klafter auf 17 fl. 51 kr. C. M.)

Die schmiedeisernen Theile der ganzen Brücke wurden laut Kontrakt um 36 *Liv. st.* für die Tonne (19 fl. 51 kr. C. M. für den N. Oe. Zentner) geliefert, wofür jedoch der Kontrahent verbunden war, alle Gerüste für das Aufhängen der Ketten und Aufstellen der Bögen herbeizuschaffen, diese Aufstellung zu bewirken, die Ketten zu adjustiren, und alle hieher gehörige Arbeiten zu verrichten, ohne hiefür eine weitere Entschädigung ansprechen zu können.

§. 404.

Zu den im vorigen §. speziell angeführten Auslagen von 45249 *Liv. st.* 2 *sh.* 10 *d.*, welche die eigentliche Brücke verursachte, kamen noch folgende Summen, die in dem gedruckten Rechnungsabschlusse der Akziengesellschaft vom 28ten May 1829 angegeben sind:

Laut der Parlamentsakte war die Gesellschaft verpflichtet, auf dem rechten Themse-Ufer eine Strasse von beiläufig 3 engl. Meilen Länge herzustellen, ohne hiefür eine andere Begünstigung als die für die Brücke bemessenen Zölle zu erhalten. Die Auslagen für diesen Strassenbau betrugen 14508 *Liv.* 4 *sh.* 9 *d.* Die Grundeinlösung verursachte der Gesellschaft eine Auslage von 5783 *Liv.* 17 *sh.* 7 *d.* Die Parlaments- und andere durch die Gesetze vorgeschriebene Auslagen betrugen 3939 *Liv.* 11 *d.*; die Auslagen für die Ingenieurs, wie S. 450 bemerkt wurde, 2844 *Liv.* 9 *sh.*; die Auslagen für die Direktion und sämmtliche Beamte, für das Kanzley-Lokale, für Stämpeln und Ankündigungen und für diverse Gegenstände betrugen während 5 Jahren 4046 *Liv.* 19 *sh.* 7 *d.*, wozu endlich noch die Interessen für ausgeliehene Gelder kamen. Auf diese Weise ergibt sich, wie die Gesellschaft ihren ganzen Fond, der in 1600 Akzien, eine jede zu 50 *Liv.*, oder im Ganzen in 80000 *Liv. st.* bestand, für die Ausführung der Unternehmung ausgelegt hat. Wenn man jedoch zu den §. 403 ausgewiesenen Kosten des eigentlichen Brückenbaues noch die Kosten für die Inge-

nieurs und für die Direktion während des Baues der Brücke zuschlägt, so ergibt sich, dass dieselben zusammen beiläufig 50000 *Liv. st.* oder eine halbe Million Conv. Mze. betragen haben.

§. 405.

Die Vergleichung der Kosten dieser Brücke mit den in London ausgeführten gusseisernen und steinernen Brücken ergibt sich auf folgende Art:

Die *Vauxhall*-Brücke, deren Bau im Jahre 1813 begonnen, und im Jahre 1816 beendigt wurde, besteht aus 9 Bögen von Gusseisen, deren jeder die Spannung von 78 Fuss hat; die Breite der Brücke beträgt im Lichten 36 Fuss. Die Themse fliesst daher unterhalb dieser Brücke mit 9mal 78 = 702 Fuss Breite ab, wogegen bei der *Hammersmith*-Kettenbrücke der Wasserabfluss eine Breite von 688 Fuss 8 Zoll hat. Die Kosten dieses Brückenbaues wurden durch 6000 Akzien gedeckt, deren jede mit 70 *Liv. st.* 10 *sh.* 3 *d.* eingezahlt wurde. Das ganze Kapital betrug demnach 423075 *Liv. st.*

Die *Southwark*-Brücke, deren Bau im September 1814 begonnen und im April 1819 beendigt wurde, besteht aus 3 grossen Bögen von Gusseisen, von welchen der mittlere 240 Fuss, und ein jeder der zwei äussern 210 Fuss Spannung hat; die zwei Mittelpfeiler haben eine Stärke von 24 Fuss; demnach beträgt die Länge der Brücke, zwischen den zwei Landpfeilern gemessen, 708 Fuss. Das Gewicht des Eisens für die drei Bögen macht über 5308 Tonnen oder über 100000 Zentner aus. Die Kosten dieser Brücke, mit Inbegriff der Gebäude, welche abgetragen werden mussten, betrugen über 800000 *Liv. st.*

Die *Waterloo*-Brücke, deren Bau im Jahre 1811 begonnen, und im Juny 1817 beendigt wurde, besteht aus 9 elyptischen Bögen von Stein, deren jeder 120 Fuss Spannung hat; die Pfeiler haben eine Stärke von 20 Fuss; die Breite des Fahrweges ist 28 Fuss, die Breite eines jeden Fussweges 7 Fuss, sonach die gesammte Breite 42 Fuss, und die Länge dieser Brücke zwischen den beiderseitigen Landpfeilern 9 . 120 + 8 . 20 = 1240 Fuss, wozu noch die bedeutenden Auffahrten zur Seite kommen. Die Kosten dieses Baues betrugen sammt der Entschädigung für die abgetragenen Gebäude 1100000 *Liv. st.*

Die neue Londoner Brücke, deren Bau im Jahre 1826 begonnen wurde, besteht aus 5 elyptischen Bögen von Stein, wovon die zwei äussersten eine Spannung von 130 Fuss, die zwei gegen die Mitte 140 Fuss und der mittlere 150 Fuss Spannung erhielt. Ein jeder von den zwei mittlern Pfeilern hat 24 Fuss und die zwei äussern Pfeiler 22 Fuss Stärke, demnach haben die fünf Bögen sammt den 4 im Strome erbauten Pfeilern eine Länge von 782 Fuss. Die Kosten dieses Brückenbaues betragen 500000 *Liv. st.*, wozu noch beiläufig dreimal so viel als Entschädigung für die abzutragenden Gebäude kommt. Die Ausführung dieser Unternehmung verursacht demnach einen Kostenaufwand von 20 Millionen Conv. Gulden, welcher durch die Stadt London gedeckt wird.

Vergleicht man nun die oben nachgewiesenen Kosten der Kettenbrücke mit den Auslagen für diese 4 Brücken, so ergibt sich, wie bedeutend wohlfeiler die erstere ge-

wesen sey, und es ist nicht zu zweifeln, dass ein ähnliches Verhältniss zwischen den Kosten steinerner oder gusseisener und den Kosten der Kettenbrücken sich in den meisten Fällen darstellen werde.

§. 406.

Zu den imposantesten Bauwerken, die sich in England vorfinden, gehört die Kettenbrücke über den Meeresarm *Menai-strait* zur Verbindung der Insel *Anglesey* bei *Bangor* mit dem festen Lande von England. Der kürzeste Weg von London nach Dublin führt nämlich über diesen Meeresarm und *Holyhead* auf der Insel *Anglesey*; da nun die Verbindung mit dieser Insel bisher durch eine beschwerliche und gefahrvolle Ueberfahrt getrennt wurde, so war die Anlage einer Brücke über diesen Meeresarm schon seit vielen Jahren in Verhandlung. Der Umstand, dass Seeschiffe hier ungehindert passiren müssen, machte es nothwendig, der Brücke eine Höhe von 100 Fuss zu geben. Nach dem Plane des Hrn. *Telford* vom Jahre 1810 sollte die Brücke einen Bogen aus Gusseisen von dieser Höhe und 500 Fuss Spannung erhalten; ähnliche Projekte wurden auch von andern Ingenieurs vorgelegt. Die bedeutenden Kosten des Baues einer solchen Gusseisenbrücke (127331 *Liv. st.*) und die Schwierigkeit ihrer Ausführung bestimmten endlich das Parlament im Jahre 1818, für den Bau einer *Kettenbrücke* nach dem Projekte des Hrn. *Telford* zu entscheiden; der Bau wurde unter seiner Leitung in demselben Jahre begonnen, am 26. April 1825 die erste Hauptkette (binnen einer Stunde und 35 Minuten) eingehängt, und die Brücke am 30ten Jänner 1826 eröffnet, wo sie jedoch noch nicht ganz beendigt war.

Es ist bekannt, dass die wenigsten Bauwerke in England von den dortigen Civil-Ingenieurs öffentlich mit ihrem Detail bekannt gemacht werden; eine Ausnahme hievon macht jedoch die *Menai*-Kettenbrücke, deren umständliche Beschreibung in folgendem Werke enthalten ist: „*An historical and descriptive account of the Suspension brigde, constructed over the Menai-Strait in North Wales, from designs by, and under the direction of Thomas Telford, by W. A. Provis, the resident engineer; London, printed for the author.* 1828.“ (Preis 7 Guineen, und auf besonders feinem Papier 10 Guineen oder 105 fl. C. M.)

Die vorzüglichsten Bestandtheile dieser Brücke, woraus sich das hiebei angewandte Bausystem beurtheilen lässt, sind in unsern Kupfern auf der mit Nro. 23 und 24 bezeichneten Doppelplatte enthalten.

§. 407.

Die *Menai*-Kettenbrücke besteht aus einem Hauptbogen, welcher 579 Fuss 10½ Zoll (93,2 N. Oe. Klafter) zwischen den Aufhängspunkten der Kette oder von Mitte zur Mitte der Tragpfeiler gemessen zur Länge hat. Um den Durchgang der Seeschiffe unter der Brücke zu gestatten, liegt die untere Fläche dieses Bogens in ihrer Mitte 102 Fuss, bei den Tragpfeilern aber 100 Fuss über dem höchsten Wasserspiegel zur Zeit der Frühjahrsfluthen. Da die Aufdämmung der Strasse zu beiden Seiten der Tragpfeiler zu hoch und zu kostspielig geworden wäre, so sind diese Pfeiler mit den Dämmen am Ufer durch sieben steinerne Bögen von 52½ Fuss Spannung verbunden.

Der Tragpfeiler (*Main Pier*) auf der Seite der Insel *Anglesey* ist auf dem Felsenriffe *Ynys-y-Moch* genannt, erbaut und hat, so wie der entgegengesetzte Tragpfeiler, eine Höhe von 52 Fuss von der Brückenbahn bis zur Befestigung der Ketten, im Fundamente eine Breite von 52¼ Fuss, und in der Oberfläche der Brückenbahn eine Breite von 28 Fuss, beides in der Richtung der Brücke gemessen; winkelrecht auf diese Richtung beträgt die Tiefe der Pfeiler im Fundamente 66¼ Fuss. Man ersieht aus den Durchschnitten Fig. 1 und 2, dass diese Trag- oder Hauptpfeiler nicht ganz massiv sind, sondern in ihrem Innern Kammern haben. Tab. 23 und 24.

Die Brückenbahn hängt, wie der Durchschnitt Fig. 5 zeigt, an 16 Spannketten *Main Chains*), wovon immer vier übereinander laufen. Von diesen 16 Ketten besteht eine jede aus 5 Gliedern von 3¼ Zoll Höhe, 1 Zoll Dicke und 9 Fuss 1¼ Zoll Länge von Mitte zur Mitte der Endöffnungen oder 10 Fuss Länge von Mitte zu Mitte der Verbindungsglieder. Der Querschnitt aller 16 Spannketten, an welchen die Brückenbahn hängt, ist daher $= 80 . 3\frac{1}{4} . 1 = 260$ Quad. Zoll. Der Sinus versus oder Pfeil der Spannketten beträgt 43 Fuss auf die obige Länge von beiläufig 580 Fuss. Die Gestalt einer einzelnen Schiene (*Chain bar*) zeigt Fig. 6; die Oeffnungen am Ende derselben haben 3$\frac{1}{16}$ Zoll Durchmesser; ein Verbindungsblatt (*Connective plate*) zeigt Fig. 7; einen Bolzen (*Bolt*) aber Fig. 8; derselbe hat 3 Zoll Stärke und ist auf einer Seite mit einem Kopfe, auf der andern Seite aber mit Gewinden und Mutter versehen.

Von den Spannketten gehen in der Entfernung von 5 zu 5 Fuss die vertikalen Tragstangen (*Suspending rods*) von einem Quadratzoll im Querschnitte herab. Die Verbindung der Hauptketten untereinander und mit den Tragstangen zeigt Fig. 12. Die letztern sind wegen ihrer bedeutenden Länge, wie man in Fig. 1 sieht, aus mehreren Stäben zusammengesetzt. Zur Bestimmung der Länge dieser Stäbe liess Herr *Telford* eine Kette im vierten Theile jener Grösse verfertigen, in welcher die Ketten später bei der Brücke eingehängt wurden. Die Länge dieser Probekette betrug 142 Fuss 6 Zoll, und die Länge ihrer Glieder 2 Fuss 6¾ Zoll. Diese Kette wurde nun auf den Pfeil von 10 Fuss 9 Zoll herabgelassen und ihre Senkung für eine jede Tragstange abgemessen. Dieses Maass gab viermal genommen die Länge für die hiernach ausgefertigten Tragstangen.

§. 408.

An den Tragstangen hängt die Brückenbahn, welche in zwei Fahrbahnen für die hin- und herfahrenden Wägen und einen dazwischen liegenden Fussweg abgetheilt ist. Die Entfernung von Mitte zu Mitte der Spannketten über den Fahrbahnen beträgt 12 Fuss; die Entfernung von Mitte zu Mitte der zwei innern Kettenreihen 4 Fuss, demnach die Breite der Brücke von Mitte zu Mitte der zwei äussersten Ketten gemessen, 28 engl. Fuss oder 27 N. Oe. Fuss; die Länge der ganzen aufgehängten Brückenbahn misst 560 engl. Fuss oder 540 N. Oe. Fuss.

Die Brückenbahn liegt auf den schmiedeisernen Querstangen a b, deren Verbindung im Grundrisse a′b′ ersichtlich ist. Hierauf ruhen zwei Lagen Bohlen (*Fir plank*); die untere c d ist 3 Zoll, die obere e f ist 2 Zoll stark und diese Bohlen liegen der Länge der Brücke nach; in den Fahrbahnen liegt noch eine dritte Lage Fig. 5.

Tab. 23 und 24. zweizölliger Bohlen m, m in der Quer der Brücke. Zwischen diesen Bohlenlagen ist wie bei der *Hammersmith*-Brücke ein Patent-Filz zur Bewahrung des Holzes aufgelegt. Die Fig. 5 zeigt sowohl die Befestigungsart dieser Bohlen, als auch die zur grössern Festigkeit der Brückenbahn unterhalb angebrachten schmiedeisernen Sprengwerke. Die Brückenbahn hat in der Mitte, ihrer Länge nach, eine Erhöhung von 2 Fuss.

Der Durchschnitt Fig. 2 zeigt das Geländer oder Gitter der Brücke von 6 Fuss Höhe; dieses besteht aus dünnen Schienen von gewalztem Eisen, ist in seinem untern Theile doppelt durchflochten, und mit den vertikal herabgehenden Hängestäben verbunden.

§. 409.

Die Spannketten sind nicht auf den Tragpfeilern befestigt, sondern laufen daselbst auf beweglichen gusseisernen Satteln (*Moveable Cast Jron Saddles*), welche Fig. 9 und 10 dargestellt sind. Diese Sattel bestehen aus 4 übereinander liegenden kastenförmigen Stücken N, O, P und Q, wovon das unterste Q auf 8 Rollen oder Walzen (*Rollers*) o, o, o . . . von geschmiedetem Eisen ruht, welche letztern sich auf einer gusseisernen Sohlenplatte, deren Durchschnitt RR' zeigt, etwas hin und her bewegen können, je nachdem die Ketten entweder durch die Aenderung der Temperatur oder durch eine grössere Belastung etwas nachgeben. Diese schmiedeisernen Rollen haben 8 Zoll im Durchmesser, und wurden an ihrer Oberfläche gut abgedreht; sie können sich auf der gusseisernen Platte RR' zwischen den daselbst angegossenen Rippen 4½ Zoll weit bewegen, jedoch aus eben dieser Ursache aus den Satteln nicht herauslaufen. Um das Eindringen des Regenwassers zu verhindern, sind die Sattel mit einer gusseisernen Platte M bedeckt. Um endlich die 4 Sattel, welche zur Leitung der 4 Hauptketten auf den Tragpfeilern ruhen, gegeneinander zu stützen, wurden 4 schmiedeiserne Stangen oder Streben m, m, m und m Fig. 10 von 3 Zoll im Quadrat zu jeder Seite dieser Sattel angebracht.

Damit die Gusseisenplatten genau mit dem Mauerwerke zusammenfallen, und gar kein Abstand oder Zwischenraum übrig bleibe, wurden sowohl unter die Platten, als in allen Ecken und auch bei jeder Berührung zweier eisernen Flächen Flanelle eingelegt, die in heissem Oehl mit Bleiweiss getränkt waren. Derselbe Flanell wurde zwischen alle Glieder der Ketten gelegt, um das Ausreiben derselben zu vermindern.

Aehnliche gusseiserne Sattel sind Fig. 1 auf der *Anglesey*-Seite bei B angebracht, wo die Spannketten in den Stollen eintreten und ihre Richtung ändern; ingleichem auf der entgegengesetzten Seite bei C, wo die Spannketten oberhalb dem Zollhause geleitet sind, und ebenfalls ihre Richtung ändern.

Die über den Satteln liegenden Kettenglieder sind stärker als die Glieder in der übrigen Länge der Kette. Zunächst den Tragpfeilern befindet sich in einer Reihe Verbindungsblätter und Kettenglieder statt der gewöhnlichen Oeffnung von 3¼₆ Zoll Durchmesser ein Schlitz a b (Fig. 2) von 13½ Zoll Länge, um durch Antreiben mit Keilen den Ketten bei ihrer Einhängung die gehörige Spannung geben zu können.

Um die Spannketten, so weit sie über den gewölbten steinernen Bögen fortlaufen, vor Schwingungen möglichst zu bewahren, wurden oberhalb dieser Bögen (Fig. 2) auf beiden Aussenseiten des Mauerwerkes gusseiserne Platten n, n.... von 5 Fuss Länge

8 Zoll Breite und 2 Zoll Dicke, deren äusseres Ende durchbohrt war, eingemauert, und durch dieselben ein starker schmiedeiserner, mit einem Kopfe versehener Bolzen, welcher die obere Brückenbahn auf dem Mauerwerke festhält, durchgesteckt. Tab. 23 und 24.

§. 410.

Die ganze Länge einer Spannkette, zwischen ihren beiderseitigen Endpunkten gemessen beträgt 1740 Fuss. Die Verankerung der Ketten ist aus dem Durchschnitte Fig. 1. ersichtlich. Zu jeder Seite der Brücke wurden nämlich drei Stollen ausgesprengt, in deren mittlerem die zwei Kettenreihen, welche die Fussbahn begränzen, und in jedem äussern eine Kettenreihe, die an der Aussenseite der Brücke fortlauft, geführt ist. Diese Stollen erweitern sich an ihrem Ende zu 9 Fuss breiten Kammern, an deren Seitenwänden massive gusseiserne Platten, die Fig. 3 und 4 dargestellt sind, angelehnt wurden. Die Endglieder der Spannketten sind mit Bolzen von Schmiedeisen befestigt, welche in die Vertiefungen der gusseisernen Platte eingelegt sind, und auf diese Weise die Ketten festhalten. Diese Bolzen haben 9 Fuss Länge und 6 Zoll im Durchmesser. In die Kammern führt eine steinerne Treppe herab, in welcher die vorgenannte eiserne Platte mit den Stützen A, B, C, die gegen den Felsen gestellt sind, befestigt ist.

Die Kettenglieder in den Kammern sind ebenfalls stärker als in der übrigen Länge der Ketten und zwar haben sie 4 Zoll Höhe und 1½ Zoll Dicke.

Die Glieder aller Spann- und Tragketten wurden vor ihrem Gebrauche einer Prüfung unterworfen und dabei mit 11 Tonnen auf den engl. Quad. Zoll oder mit 215 N. Oe. Zentner auf einen N. Oe. Quad. Zoll belastet.

Zum Behufe der Zufuhr der Baumaterialien wurden, wie es gewöhnlich bei den grössern Bauten in England der Fall ist, einige Eisenbahnen auf jeder Seite der Brücke angelegt, wovon zwei Fig. 11 angezeigt sind; man sieht daselbst auch die Baugerüste, welche zur Aufstellung der Bögen zwischen den Tragpfeilern und dem festen Lande errichtet wurden.

§. 411.

Als diese Brücke ihrer Vollendung nahe war, bemerkte man während eines ungemein heftigen Sturmes am 6ten Februar 1826, dass die Schwingungen der Kettenreihen sehr bedeutend waren, dass man daher bedacht seyn müsse, dieselben zu vermindern. Zu diesem Zwecke wurden zwischen die Spannketten in 8 Punkten A, A^1, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, eiserne Rahmen (*Transverse braces*), welche Fig. 5 dargestellt sind, befestigt. Diese Rahmen bestehen aus 2 übereinander fortlaufenden hohlen gusseisernen Röhren von 3 Zoll Stärke, durch welche schmiedeiserne, an ihrem Ende durchbohrte Stangen gehen, welche mit den Röhren durch Bolzen verbunden sind. Andere schmiedeiserne Stangen wurden in diagonaler Richtung zwischen die gusseisernen Röhren eingepasst, und dadurch dem Ganzen die gehörige Festigkeit gegeben.

Durch diese Einrichtung hat man die Schwingungen so vermindert, dass sie, wenn Postkutschen im scharfen Trabe über die Brücke fahren, kaum mehr bemerkbar sind; allein bei Stürmen, die von der Seite kommen, erhebt sich die 560 Fuss lange Brückenbahn in ihrer Mitte noch immer um 1 bis 2 Fuss. Es leuchtet übrigens von selbst ein,

dass dieselbe Brücke nach gleichen Grundsätzen und mit denselben Dimensionen an einem andern Orte erbaut, wo die Stürme nicht so heftig als an diesem Meeresarme sind, auch weit geringern Schwankungen unterliegen würde.

§. 412.

In dem oben genannten englischen Werke, welches die Geschichte und Beschreibung dieses merkwürdigen Brückenbaues enthält, befindet sich auch folgender Ausweiss über das ganze Gewicht der Spannketten, Tragstangen, der Brückenbahn etc., welches zwischen den 2 Trag- oder Hauptpfeilern aufgehängt ist.

		Tonnen.	Zentn.	¼ Zent.	℔.
4520	Stück Kettenglieder	245	3	1	20
5520	Verbindungsblätter der Kettenglieder . . .	79	12	2	17
1872	Schraubenbolzen von 3 Zoll Durchmesser . . .	45	1	3	5
1332	kurze Vertikalstangen zur Verbindung der übereinander fortlaufenden Hauptketten	3	18	1	11
1332	Schraubenbolzen von 12 Zoll Länge und 1¼ Zoll Durchmesser zu gleichem Zwecke	3	7	3	10
	Andere kleine Eisentheile	12	3	1	23
8000	Quad. Fuss Patentfilz in die Verbindungen der Glieder	2	7	2	14
	Bleiweiss zur Sättigung dieses Filzes . . .	2	10	0	0
	Gesammtgewicht der 16 Hauptketten zwischen den zwei Tragpfeilern	394	5	0	16
111	schmideiserne Stangen quer unter der Brückenbahn sammt Verbindungsgliedern	25	5	1	1
1364	vertikale Tragstangen von verschiedenen Längen .	20	17	0	4
	Verbindungsblätter und Bolzen zum Anhängen der Vertikalstangen	6	0	0	2
6666	Kubikfuss Föhrenholz von Danzig und Memel zu 37 ℔. den Kubikfuss für die Brückenbahn . .	110	2	0	18
1379	Kubikfuss amerikanisches Fichtenholz für die obern Bohlen zu 32 ℔. den Kubikfuss	19	14	0	0
916	Kubikfuss afrikanisches Eichenholz zur Begränzung der Fahrbahn von den Fusswegen, der Kubik-Fuss zu 64 ℔.	26	3	1	20
24795	Quad. Fuss Patentfilz mit Pech und Theer getränkt, zwischen die Holzlagen der Brückenbahn .	7	7	2	0
222	Stücke für das eiserne Geländer, zu 89 ℔. jedes .	8	16	1	18
4	eiserne Rahmen zwischen den Spannketten zur Verminderung der Schwingungen derselben . . .	3	16	2	20
	Die andern zur Brückenbahn gehörigen Theile als Nägel, Schrauben etc.	21	6	3	20
	Totalgewicht, welches zwischen den zwei Hauptpfeilern aufgehängt ist	643	15	2	7
	oder 11678 N. Oe. Zentner.				

§. 413.

Die Wichtigkeit und Grösse der neuern Kettenbrückenunternehmungen in England hat auch die Aufmerksamkeit der Französischen Regierung erregt, und es wurde bereits im Jahre 1821 und später wieder im Jahre 1823 von Seite derselben Herr *Navier*, *engénieur en chef des ponts et chaussées*, zu dem Behufe nach England gesendet, um dort den Bau der Kettenbrücken zu untersuchen und bei seiner Rückkehr öffentlichen Bericht hierüber zu erstatten. Diess geschah in dem vom Herrn *Navier* im Jahre 1823 bekannt gemachten, bereits S. 449 erwähnten Werke. Hierin befindet sich ohne Zweifel die vollständigste theoretische Behandlung dieses Gegenstandes, welche bisher noch erschienen ist; zugleich hat aber Herr *Navier* den Entwurf einer Kettenbrücke für eine Strasse und einer solchen Brücke für eine Wasserleitung seinem Werke beigefügt. Die erste Kettenbrücke sollte über die *Seine* zu Paris zwischen der *Esplanade* der Invaliden und den elyseeischen Feldern erbaut werden; es fand sich auch bald nach Bekanntmachung dieses Projektes eine Akziengesellschaft, welche den zu diesem Baue erforderlichen Fond von 800000 Franken (320000 Gulden C. M.) zusammenlegte, und der Bau wurde unter der Leitung des Herrn *Navier* begonnen; allein nachdem die Pfeiler erbaut, die Spannketten und Tragstangen eingehängt und der grösste Theil der Brückenbahn aufgelegt war, traten Beschädigungen dieses kostspieligen Bauwerkes ein, wodurch dessen Vollendung unmöglich war, die Brücke demnach abgetragen und von der Gesellschaft an diesem Orte ganz aufgegeben wurde.

Da das obengenannte theoretische Werk des Herrn *Navier* mit vielem Beifalle von dem wissenschaftlichen Publikum aufgenommen wurde, so ist es um so wichtiger, die Gründe zu kennen, welche den Ruin dieser Kettenbrücke herbeiführten, als diess sonst zu Missdeutungen führen und über die angeführten Vortheile des Kettenbrückenbaues Zweifel veranlassen könnte. Wir haben daher auf der Tafel Nro. 25 sowohl die Zeichnung dieser vom Herrn *Navier* projektirten Kettenbrücke, als auch die Zeichnung jener Kettenbrücke aufgenommen, welche die Akziengesellschaft später nach dem Muster der Hammersmithbrücke in England etwa 100 Schritt vom Orte der frühern Brücke entfernt durch den Ingenieur Herrn *de Vèrges* erbauen liess, und die seit dem Monathe November 1829, wo sie eröffnet wurde, mit voller Sicherheit besteht.

§. 414.

Die vom Herrn *Navier* entworfene Kettenbrücke, welche Fig. 1 bis 6 dargestellt ist, hatte eine Länge von 170 *Meter* (537,8 Nied. Oesterr. Fuss), von Mitte zu Mitte der Säulen gemessen, über welche die Ketten geführt wurden; die Entfernung zwischen den *Kay*-Mauern oder die Breite des Rinnsales der *Seine* unter der Brücke betrug 150 *Met.*, und für diese letztere Spannweite war der Pfeil oder *Sinus versus* mit 10 *Met.* bemessen. Der Abstand der Vertikalebenen, welche durch die zwei am Rande der Brücke fortlaufenden Kettenreihen gingen, oder die Entfernung der von diesen Kettenreihen herabgehenden Tragstangen betrug 9,5 *Met.*; der Abstand der beiderseitigen äussern Geländer Fig. 2 war 8,7 *Met.* (27,5 N. Oe. Fuss.) Dieser Zwischenraum war in 3 Theile getheilt, nämlich in einen Fahrweg von 5,7 *Met.* und zu jeder Seite einen Fussweg von 1,5 *Met.*

Tab. 25.

Fig. 2. Tab. 25. Unter der Brückenbahn sollte dem ersten Projekte zu Folge ein gusseiserner, aus 3 Stücken bestehender Rahmen liegen, welcher an den Tragstangen aufgehängt, eine Art Sprengwerk bilden, und der Bahn die nöthige Festigkeit geben sollte. Hierauf kamen Längenbalken (*solives longitudinales*) von 0,5 *Met.* Breite und 0,19 *Met.* Höhe, welche der Länge der Brücke nach, und Bohlen von 0,1 *Met.* Stärke, welche der Quer nach gelegt und für den Fahrweg mit eisernen Schienen benagelt wurden.

§. 415.

Die Spann- oder Tragketten (*Chaines de support*) bestanden aus 9 Reihen länglicher Kettenglieder von geschmiedetem Eisen, welche in 3 Lagen angeordnet wurden. Diese Glieder hatten 4,9 *Met.* äussere Länge, eine Höhe von 0,08 *Met.* und Dicke von 0,04 *Met.*; demnach einen Querschnitt von 0,0032 *Quad. Met.* (4,6 N. Oe. Quad. Zoll.) Die Verbindung dieser Kettenglieder geschah durch Ringe und Bolzen, wovon die letztern aus 2 Hälften bestanden, zwischen welche Keile eingetrieben wurden, um die Länge der Ketten hiernach reguliren zu können. Der Querschnitt aller Spann- oder Tragketten, an welchen die oben beschriebene Brückenbahn hing, betrug 115200 *Quadratmillimeter* (166 N. Oe. Quad. Zoll).

Fig. 5 u. 6.

Fig. 4. Um die 9 Gliederreihen einer jeden Kette vereinigen zu können, wurden dieselben mit gusseisernen Querstangen a b, c d zusammengehalten, die dort, wo die Ketten zu liegen kamen, eingeschnitten waren und mit Schraubenbolzen angezogen wurden; hiedurch sind die 9 Kettengliederreihen in einen Bund oder Körper von 0,58 *Met.* Breite und 0,32 *Met.* Höhe vereinigt worden; Fig. 4 enthält den Querdurchschnitt einer solchen vereinigten Kette; Fig. 5 die Bolzen und Fig. 6 die Ringe.

Die vertikalen Tragstangen waren rund und hatten einen Durchmesser von 0,04 *Met.*; auf jede Länge von 1,667 *Met.* der Brückenbahn kamen 4 solche Stangen, indem sie je zwei und zwei angebracht waren. Diese Tragstangen trugen an ihrem untern Ende zwei Tragschienen von 0,1 *Met.* Höhe und 0,03 *Met.* Dicke, welche unterhalb der ganzen Brückenbahn ihrer Länge nach zu beiden Seiten fortliefen, und auf denen die vorgenannten gusseisernen Rahmen in der Quere lagen.

Die Spannketten auf der Rückseite der runden Tragpfeiler, vom Herrn *Navier Chaines de retenue* genannt, waren auf gleiche Art wie die Spannketten zwischen den Tragpfeilern gebildet, allein sie waren stärker und der Querschnitt beider Kettengliederreihen betrug 135360 *Quadratmillimeter* (195 N. Oe. Quad. Zoll).

§. 416.

Fig. 3. Die Tragpfeiler der Ketten waren zwei runde Säulen, wie aus der vorderen Ansicht Fig. 3 ersichtlich ist; sie wurden aus Quadersteinen aufgeführt und hatten unten, wo sie auf einem Sockel standen, 3,3 *Met.*, oben hingegen nur 2,5 *Met.* Durchmesser. Der Durchmesser des Kranzes oder obersten Theiles des Kapitäls betrug 4 *Met.* und auf diesem Kranze ruhte ein quadratförmiger Sockel von 1 *Met.* Höhe. In der Mitte dieses Sockels war ein gusseisernes Gehäuse eingelassen, welches mit mehreren Scheidewänden versehen war und zur Aufnahme der Ketten diente; der un-

tere Boden dieses Gehäuses war nach einem Kreisbogen gekrümmt, und die Kette bestand hier aus kurzen Gliedern, welche durch horizontale Bolzen mit einander vereinigt waren. Fig. 3. Tab. 25.

Zur Verstärkung des Mauerwerkes der Säulen waren in denselben in der durch die Mitte der Ketten gehenden Vertikalebene Bänder aus Gusseisen angebracht, welche von der Grundmauer durch das Kapitäl bis zum Boden des erwähnten Gehäuses gingen; diese Bänder wurden durch schmiedeiserne Bolzen, welche durch die Säulen gingen, mit einander verbunden.

Die zwei Säulen zu jeder Seite der Brücke waren noch, wie Fig. 3 zeigt, unter sich durch einen gusseisernen hohl gegossenen Balken verbunden, der eine Länge von 7,8 *Met.* hatte, und in seinem Innern mit einer senkrechten Scheidewand versehen war. Dieser Querbalken diente dazu die Säulen gegen einander zu stützen.

§. 417.

Die Verankerung der Ketten zeigt Fig. 1, sie gingen nämlich von den Tragsäulen in schiefer Richtung herab, bogen sich über das gusseiserne auf dem Mauerwerke liegende Segment o p und gingen von p senkrecht hinab bis q, wo sie an einer starken gusseisernen Querplatte durch Bolzen befestigt waren. Um das Gewicht des vertikalen Schachtmauerwerkes und den Widerstand, welchen dasselbe einer Bewegung entgegensetzt, zu vergrössern, wurden zwei Flügel m q n angemauert, und man hoffte das Gleichgewicht durch das Gewicht dieses Mauerwerks und des Erdreichs, welches darauf lag, herzustellen. Um aber auch der bedeutenden Pressung, welche die Ketten auf dem kreisförmigen Segmente o p verursachen, den gehörigen Widerstand zu leisten, wurde, wie Fig. 1 ebenfalls zeigt, ein gemauerter auf einem Pfahlwerke stehender Strebepfeiler in der Richtung der mittlern Spannkraft der beiden Theile der Kette angebracht und mit dem übrigen Mauerwerke verbunden. Fig. 1.

§. 418.

Herr *Navier* berechnete die Belastung dieser Brücke auf folgende Art. Die beständige Last bestand aus:

1. Die Glieder der beiden Hauptketten auf eine Bogenlänge von 151,76 *Met.* oder horizontale Länge von 150 *Met.* . . .	134992 Kil.	169342 Kil.
Verbindungsringe der Kettenglieder für dieselbe Länge .	14455	
Bolzen und Vorsteckkeile	9536	
Querstücke aus Gusseisen zu Trägern für die Hängstäbe .	10359	
2. Vertikale Hängestäbe		26734
3. Tragschienen nach der Länge der Brücke, die an den Hängestäben aufgehängt sind und worauf die Querträger des Brückenweges ruhen	7437	388356
Balken aus Guss- und Schmiedeeisen	156330	
Balken und Bohlen von Eichenholz	175119	
Gegossene Streifeisen, Schmiedeeisenschienen zur Bedeckung des Brückenweges, Schrauben und Nägel . .	35000	
Geländer	14470	
Totalgewicht	.	584432 Kil.

oder 10436 N. Oe. Zentner.

Wird dieses Gewicht mit 150 dividirt, so kommt auf jeden *Metre* - Länge der Brückenbahn eine Last von 3896$^{Kil.}$ (auf einen N. Oe. Fuss Länge die Last von 22 N. Oe. Zentner).

Zur Bestimmung der zufälligen Belastung nahm Hr. *Navier* an, dass bei einem Menschengedränge 195$^{Kil.}$ auf den *Quad. Met.* entfallen. (Diess gibt 12,5 N. Oe. Zentner auf eine N. Oe. Quad. Klafter). Da nun der Abstand der Geländer 8,7 *Met.* betrug, so ergab sich für jeden *Met.* Länge eine Belastung von 1697$^{Kil.}$

Die beständige und zufällige Belastung addirt, gibt eine Totallast von 5593$^{Kil.}$

§. 419.

Fig. 1. Tab. 25. Wir haben bereits erwähnt, dass diese Brücke noch vor ihrer gänzlichen Aufstellung solche Gebrechen zeigte, dass sie abgetragen werden musste. Nach den hierüber an Ort und Stelle gesammelten Erkundigungen wurde das Mauerwerk unterhalb des Bogens o p durch die Zugkraft der Ketten aus seiner Lage gerückt oder gehoben, es bildeten sich zwischen allen daselbst vorhandenen Quadern grosse Fugen, und ein bedeutender Theil der Quadersteine zerbrach. Herr *Navier* liess nun den Raum AB zwischen den Tragpfeilern und Widerlagen, welcher bisher gar nicht beachtet wurde, und mit Thon und Erdreich gefüllt war, ausheben und Bruchsteine hineinwerfen; allein nun ging der Strebepfeiler, welcher den Bogen o p stützte, noch mehr zurück; die Tragpfeiler oder Säulen verloren auch ihre vertikale Lage und man konnte die Brückenbahn nicht mehr einhängen, da die Hauptketten sich immer mehr senkten. Weil aber das Mauerwerk bedeutende Beschädigungen erlitten hatte, und keine Verbesserung desselben möglich war, so musste es ganz abgetragen und die neue Brücke in einiger Entfernung hievon errichtet werden.

§. 420.

Die Akziengesellschaft, welche die beschriebene Kettenbrücke über die *Seine* unternommen hatte, entschloss sich, ein Jahr, nachdem der Bau derselben aufgelassen wurde, eine neue Kettenbrücke zu erbauen, und schickte zu diesem Behufe den Ingenieur *de Verges* nach England, um daselbst die Construction der Hammersmithbrücke genau kennen zu lernen. Nach seiner Rückkehr wurde die neue Brücke beiläufig hundert Schritte von dem Orte, wo die frühere gestanden war, unter seiner Leitung erbaut, und im November 1829 beendigt. Die Darstellung derselben enthält Fig. 7 bis 10 auf der Tafel Nro. 25.

Fig. 7 bis 10. Nach der Längenansicht Fig. 7 beträgt die Entfernung zwischen den zwei Landwiderlagen 125 *Met.* (395,4 N. Oe. Fuss) und ist in fünf gleiche Theile getheilt. Die Mitte der zwei Tragpfeiler befindet sich genau auf der Entfernung von ein Fünftheil der ganzen Spannweite oder 25 *Met.*; es bleiben daher für die Entfernung der zwei Tragpfeiler von Mitte zu Mitte derselben gemessen 3^{mal} 25 = 75 *Met.* (237,3 N. Oe. Fuss) übrig. Die Tragpfeiler sind gleich jenen in Hammersmith erbaut, wie es aus der Ansicht Fig. 10 zu ersehen ist. Da die Spannweite dieser Brücke beiläufig halb so gross, als bei jener in Hammersmith ist, so hielt es der Ingenieur nicht für nothwendig, einen Theil der Brückenbahn durch die Tragketten von unten zu stützen,

welches noch mehr dadurch begründet wurde, weil unter den Landwiderlagen zu jeder Seite eine gewölbte Oeffnung für die ungehinderte Passage entlängst den *Quays* bleiben musste. Um jedoch den Spannketten mehr Auflagspunkte zu geben, sind dieselben bei A und A′ über massive gusseiserne Walzen (*Chevalets*), welche auf den Landpfeilern ruhen, geführt. Diese Walzen sind von ähnlicher Construction, wie die gusseisernen Sattel, über welche die Hauptketten der *Menaibrücke* bei ihrem Eintritte in die Stollen geführt sind. Ohne diese Sattel würde sich die Brückenbahn, wenn die Ketten im Sommer durch die Hitze ausgedehnt werden, zunächst den Landwiderlagen bei A und A′ um mehrere Zolle senken, und eine für die Befahrung nachtheilige Stuffe bilden, während bei Anwendung der Sattel die Brückenbahn sich zwischen den Landwiderlagen und den Mittelpfeilern nur bogenförmig senken kann. Fig. 7. Tab. 25.

Die Anordnung der Ketten zeigt Fig. 8 und 9 und da diese Brücke mit jener in Hammersmith beinahe ganz übereinkommt, so haben wir nur noch zu bemerken, dass hiebei das Sprengwerk, welches das Geländer bildet, wie Fig. 9 zeigt, eine verbesserte Construction erhielt; es kreuzen sich nämlich die Streben, welche sich in den gusseisernen Geländersäulen stützen, einander durch und geben demnach mehr Festigkeit, als wenn bloss einfache Streben ab, bc, cd... wie in Hammersmith angebracht würden, bei denen wohl der Punkt e, nicht aber a und c gehörig gestützt sind. Fig. 8 und 9.

Ungeachtet der Verkehr über diese Brücke bedeutend ist, so fand man es dennoch hinreichend, dem Fahrwege in der Mitte eine Breite von 5,4 *Met.* (17,1 N. Oe. Fuss) und den zu beiden Seiten desselben angebrachten etwas erhöhten Fusswegen eine Breite von 1,3 *Met.* (4,1 N. Oe. Fuss), demnach der ganzen Brücke zwischen den beiderseitigen Geländern eine Breite von 8 *Met.* oder 25,3 N. Oe. Fuss zu geben. Wir glauben, dass diese Breite in den meisten Fällen hinreichen werde.

§. 421.

Die auf der Tafel Nro. 26 dargestellte zu Bamberg über die Regnitz erbaute, am 31[ten] Dezember 1829 eröffnete Kettenbrücke führen wir vorzüglich desshalb an, weil sie wie Fig 3 zeigt, ebenfalls nach Art des Projektes vom Herrn *Navier*, zu beiden Seiten zwei isolirte Pfeiler (*Pylonen*) hat, über welche die Ketten geleitet sind. Diese Pfeiler messen an ihrer Grundfläche 10,5 Fuss und unter dem Gesimse 8 Fuss im Gevierten, sie haben eine Höhe von 24,5 und einen Kubikinhalt von 2130 Kubikfuss; sie sind 20 Fuss im Lichten von einander entfernt und stützen die Ketten der 316,5 Fuss langen und 30 Fuss breiten Brückenbahn. Tab. 26.

Kurze Zeit nach Eröffnung der Brücke bemerkte man auch hier Risse an den Pfeilern, deren Grund wahrscheinlich in der gewählten Bauart und in dem Umstande liegt, dass die Ketten auf denselben nur auf einer mit dem Mauerwerke verbundenen festen Gusseisen-Platte unverrückbar ruhen; es müssen demnach den Pylonen dieselben Erschütterungen mitgetheilt werden, die wir bei dem Fahren der Wägen in unsern Wohngebäuden empfinden, obgleich deren ganze Grundfläche und zu bewegende Masse doch weit grösser als jene solcher einzelner Pfeiler ist.

Aehnliche Anstände als die erwähnten haben sich auch bei mehreren Ketten- und Drahtbrücken in Frankreich gezeigt. Die Drahtbrücke über die *Rhône* bei *Vienne* war kaum beendigt, und schon mussten die obgleich bogenförmig verbundenen Tragpfeiler, da sie bloss von Bruchsteinen ohne hinlänglichen Fleiss aufgeführt waren, an ihrem Umfange mit mehreren eisernen Schliessen umgürtet werden; dasselbe trat auch bei andern Brücken in Frankreich ein; es dürfte sonach bei jedem solchen Baue die grösste Sorgfalt auf die Herstellung der Tragpfeiler und die Beweglichkeit der Ketten über dieselben verwendet werden.

§. 422.

Tab. 26. Die letzte Kettenbrücke, welche sich auf unseren Tafeln dargestellt befindet, ist jene, welche im Jahre 1825 über die *Saale* bei *München-Nienburg* errichtet wurde. Die Construction derselben weicht von den in England, Frankreich und überhaupt bei den Kettenbrücken bisher angenommenen Grundsätzen wesentlich ab.

Die Tragpfeiler dieser Brücke bestanden in hölzernen Portalen oder in zwei Fig. 10. eichenen Säulen a, a, deren Höhe 40 Fuss, die untere Stärke 23, die obere aber 19 Zoll im Quadrate betrug. Diese Säulen waren auf 7 Fuss hohe Blöcke b, b von Sandstein gestellt, und durch starke eiserne Dippeln befestigt worden; sie waren ferner durch Querriegel c, c und c von weichem Holze, welche in dieselben eingezapft und Fig. 9. mit Eisenschienen befestigt waren, dann durch einige Andreaskreuze mitsammen verbunden, und das ganze Portal sodann mit Brettern von Aussen verkleidet.

Oben auf den eichenen Säulen wurden (Fig. 10) gusseiserne Platten e, e aufge- Fig. 10. schraubt, an welchen die Spannketten, sechs an der Zahl, festgemacht waren, und von hier auf der einen Seite zur Brückenbahn, auf der andern Seite zu den Landpfeilern herabgingen. Die Verankerung der Ketten in den Landpfeilern zeigt Fig. 6; die Verzweigung und Theilung der Hauptketten in mehrere Nebenketten zeigt der Durchschnitt Fig. 4. Die Fig. 7 enthält das Längenprofil der Klappe oder des Eröffnungsthores, welches in der Mitte der Brücke angebracht war, um die auf der *Saale* segelnden Schiffe mit Masten ungehindert durchlassen zu können; Fig. 8 enthält die äussere Ansicht dieses Thores, woraus man zugleich die Befestigung der Ketten und die der Länge der Brücke nach zu beiden Seiten liegenden Endsbäume ersieht.

Eine jede Brückenhälfte war 120 Fuss lang, 23,5 Fuss breit; und die daran befindliche Klappe hatte 4 Fuss 7 Zoll, demnach betrug die ganze Länge der Brücke mit Einschluss der Klappen 249 Fuss 2 Zoll Preuss. Maass. (247,4 N. Oe. Fuss.)

Die Ketten waren durchgehends von gleicher Stärke, nämlich in den einfachen Gelenken 1,5 Zoll, in den doppelten Gliedern aber 1 Zoll im Durchmesser. An ihrem Ende gingen dieselben durch Sandsteinquadern von 18 Zoll Stärke, welche mit Oeffnungen durchgearbeitet und die Ketten an vorgesteckte eiserne Riegel befestigt waren.

Am 27ten August 1825 wurde die Brücke geprüft, indem man einen mit 110 Zentner beladenen, und mit 10 Pferden bespannten Wagen über die Brücke gehen liess; da sie nun diese Probe aushielt, so fand ihre Eröffnung am 6ten September 1825 statt; allein 3 Monathe hierauf stürzte die Brücke ein.

Die hierüber öffentlich erschienenen: „Verhandlungen über die artistische Untersuchung des Baues der Hängebrücke über die *Saale* bei *München-Nienburg*, bekannt gemacht von dem Baumeister dieser Brücke Hrn. *G. Bandhauer*, herzoglich Anhalt-Köthen'schen Baurathe. Leipzig 1829" enthalten die Darstellung und Untersuchung der Ursachen des am 6ten Dezember 1825 erfolgten Einsturzes dieser Kettenbrücke. Man ersieht daraus, dass sie laut des von dem Baumeister am 1sten Jänner 1824 vorgelegten und von seiner Behörde genehmigten Anschlages nur auf ein Tragvermögen von 1650 Zentnern gleichmässiger Belastung (für eine Fläche von $249\frac{1}{6} \cdot 23{,}5 = 5855$ Quad. Fuss), demnach für 1100 Menschen zu 1,5 Zentner oder auch für einzelne, einander folgende, mit 100 Zentner belastete zehnspännige Wägen, nicht aber für die grösste Belastung, welche durch Menschengedränge entstehen kann, angetragen und berechnet war. Das letztere konnte allerdings auch bei den geringen Baukosten, welche für die ganze Brücke ursprünglich nur mit 4000 Rthlr. pr. Cour. berechnet waren, und sich bei der Ausführung beiläufig auf das Doppelte erstreckten, nicht gefordert werden. Aus diesen Gründen konnte auch dem Baumeister nach der hierüber eingeleiteten Untersuchung kein gegründeter Vorwurf gemacht werden.

§. 423.

Hinsichtlich der Stahl- und Drahtbrücken haben wir bereits S. 282 bemerkt, dass sie den Kettenbrücken von Stabeisen nachstehen, wenn man nicht bloss das Tragungsvermögen und die Kosten des Materials, sondern auch die Senkung und Schwingungen der Brücke bei zufälligen Belastungen berücksichtigt.

Die Erfahrung hat hierüber bei der in Wien erbauten Stahlbrücke bereits entschieden, indem jeder Fussgänger, welcher sie passirt, Schwingungen empfindet, welche man, auch ohne die neuern englischen Kettenbrücken gesehen zu haben, für bedeutend erachten muss. Nach der öffentlich erschienenen: „Beschreibung der ersten Stahlkettenbrücke in Wien von *J. E.* von *Mitis*, Wien 1829 Seite 74" hat aber die 303 Fuss lange Bahn dieser Brücke bei dem Orkane am 20. July 1828 sogar in schuhhohen Wellen geschwankt, woraus zur Genüge ersichtlich ist, warum man dem Vorschlage, Stahl zu Kettenbrücken zu verwenden, bisher keine weitere Folge gegeben hat.

Auch die Drahtbrücken, wovon mehrere von den Gebrüdern *Seguin* in Frankreich erbaut wurden, haben aus gleichen Gründen den Erwartungen, welche man Anfangs davon hegte, nicht entsprochen. Die Drahtbrücke in *Vienne*, ungefähr 2 *lieues* unter *Lyon* über die *Rhône* von den Herren *Seguin* und *Mignon* als Unternehmung in Folge einer vom Könige für 48 Jahre bewilligten *Concession* erbaut, wurde im April 1828 begonnen, und am 15ten May 1829 eröffnet. Diese Brücke besteht aus drei Trag- oder Stützpfeilern, wovon zwei an den Ufern, der dritte aber in der Mitte der *Rhône* erbaut wurde. Die erstern haben 3 *Met.*, der Mittelpfeiler aber 5 *Met.* Länge in der Richtung der Brücke gemessen, und die beiderseitigen Pfeiler sind mitsammen durch gewölbte Bögen verbunden. Die Entfernung von Mitte zu Mitte zweier Pfeiler beträgt 90 *Met.*, demnach die Entfernung von Mitte zu Mitte der an den Ufern erbauten Pfeiler 180 *Met.* (569,4 N. Oe. Fuss). Hinter diesen Pfeilern ist an jedem Ufer noch eine Kammer zur Aufnahme und Verankerung der Ketten erbaut worden. Der *Sinus versus*

für die Länge eines Brückenfeldes von 86 *Met.* (272 N. Oe. Fuss) beträgt 9,4 *Met.* Diese Brücke besteht eigentlich aus zwei einzelnen Brücken, indem Ketten oder Drahtbündel von jedem Uferpfeiler nur über den Mittelpfeiler hinüber, dann sogleich auf seiner Rückseite herabgeführt, und in seinem Fundamente befestigt wurden. Die Brückenbahn hängt zu jeder Seite an 6 nebeneinander liegenden Spannketten, demnach im Ganzen an 12 solchen Ketten. Eine jede derselben besteht aus 160, in einen Bündel vereinigten Drähten, deren Durchmesser 0,002 *Met.* (0,91 N. Oe. Linie) beträgt; der Querschnitt aller Spannketten beträgt sonach $12 . 160 . 3{,}14159 . (0{,}002)^2 . \frac{1}{4} = 0{,}00603$ Quad. *Met.* oder 8,69 N. Oe. Quad.-Zoll.

Die Brücke besteht aus einer Fahrbahn von 4,4 *Met.* Breite und zwei erhöhten Fusswegen von 0,8 *Met.*, demnach ist die ganze Breite der Brücke im Lichten 6 *Met.* (19 N. Oe. Fuss), welches man für den dortigen obgleich bedeutenden Verkehr als hinreichend erachtete. Das Geländer dieser Brücke bildet ein ähnliches Hängewerk, wie es bei der in Paris vom Herrn *de Vèrges* erbauten Kettenbrücke der Fall ist.

Die Baukosten der ganzen Brücke betrugen 300000 Franken, worunter 30000 Franken Entschädigung für die abgetragenen Gebäude begriffen sind. Bei diesem geringen Aufwande musste das ohnehin schwache Mauerwerk der Tragpfeiler ganz von Bruchsteinen hergestellt, und bloss die Ecken mit kleinern Quadern verkleidet werden.

Die Brücke wurde vor ihrer Eröffnung auf die in Frankreich vorgeschriebene gesetzliche Art einer Probe unterworfen, indem man sie auf ihrer ganzen Fläche und zwar von den Ufern gegen die Mitte zu mit Schotter und Steinen überführte, und darüber noch einen dreispännigen Wagen fahren liess. Die zwei Brückenfelder wurden auf diese Art mit 104 Kubik-Met. Schotter oder mit 208000 Kilogramm (3714 N. Oe. Zentner) belastet, als jedoch der Schotter wieder abgeräumt wurde, fand man die Erhöhung in der Mitte der Brückenfelder um 0,4 *Met.* geringer, das Mauerwerk über den Thoren der Pfeiler bekam Risse, und man musste um jeden Landpfeiler in der Nähe der Auflage der Ketten drei eiserne Ringe von 3 Zoll Höhe und ½ Zoll Dicke spannen.

Nach ähnlichen Grundsätzen ist die Drahtbrücke zwischen *Tournon* und *Tain* über die *Rhône* erbaut. Die Beschreibung derselben kommt in dem: „*Journal du Génie civil, des sciences et des arts, á l'usage des ingenieurs* 16^me^ *livraison* pag. 127" vor. Die Brücke hat 178 *Met.* (563,1 N. Oe. Fuss) Länge, einen im Fluss erbauten Mittelpfeiler und zwei Landpfeiler; sie besteht aus einer Fahrbahn von 2,2 *Met.* und zwei erhöhten Fusswegen von 1 *Met.* Breite; die ganze Breite derselben im Lichten beträgt demnach 4,2 *Met.* (13,3 N. Oe. Fuss). Damit sich die Wägen auf der Brücke ausweichen können, erweitert sich ihre Breite bei dem im Flusse erbauten Mittelpfeiler auf 6,2 *Met.* Die Herrn *Seguin* et Comp. erbauten diese Brücke gegen eine auf 99 Jahre ertheilte Concession, nach deren Ablauf die Brücke als Eigenthum dem Staate anheim fällt. Der Bau wurde im Jänner 1824 begonnen und schon am 22^ten^ August 1824 die Prüfung vorgenommen; hiebei wurde 1 *Met.* Länge der Brücke mit 500 Kilogramm (765 N. Oe. ℔. auf die N. Oe. Quad. Klafter) belastet, und noch mit schweren Wägen darüber gefahren.

Ausser diesen zwei beschriebenen Drahtbrücken wurden noch drei andere über die *Rhône* erbaut, und zwar eine in *Serrières* von 200 *Met.* Länge, die zweite in *Andence* von gleicher Länge, die dritte in *Beaucaire* von 400 *Met.* Länge; eine vierte von 320 *Met.* Länge sollte in *Bourg St. Andreol* erbaut werden.

§. 424.

Zur Bestimmung der krummen Linie, welche die Ketten annehmen, wenn sie nebst ihrer eigenen Last noch das Gewicht der Brückenbahn der darüber fahrenden Wägen etc. zu tragen haben, wollen wir vorläufig die Stellung der Seiten eines Polygons untersuchen, welche ein biegsamer Faden annimmt, wenn an denselben in den Punkten a, b, c..... die Gewichte P, Q, R... und eben so an der andern Seite in den Punkten b′, c′.... die Gewichte Q′, R′...... angehängt werden. Es leuchtet von selbst ein, dass das Polygon von dem Punkte a aus nach beiden Seiten symetrisch seyn müsse, wenn die Grösse und Entfernungen der angehängten Gewichte untereinander und von der Mittellinie zu beiden Seiten gleich angenommen werden. Es wird also hinreichend seyn, das Verhältniss der Stellungswinkel, welche die Polygonseiten mit dem Horizonte bilden, nur an einer Seite aufzusuchen. Zu dieser Absicht wollen wir vorerst das Gewicht P in dem Punkte a betrachten, welches an den beiden Fäden b a und b′ a hängt. Um diejenige Kraft zu finden, mit welcher jeder dieser Fäden nach seiner Richtung von dem Gewichte P gezogen wird, wollen wir die Kraft P durch die Linie ap vorstellen, und sie durch das Parallelogramm a n p m in die beiden äussern Kräfte a n und a m nach den Richtungen der gespannten Fäden b a und b′ a zerlegen. Fig. 8. Tab. 20.

Nennen wir die Spannung a m nach der Richtung des Fadens $=$ T, so erhalten wir nach der Theorie des Kräftenparallelogrammes die Proportion T : P $=$ a m : a p. In dem Punkte b wirkt also die Kraft b s $=$ a m $=$ T nach der Richtung b a. Zerlegen wir die Spannung b s $=$ a m durch das Parallelogramm b r s t in die senkrechte Kraft b t($=$P′) und in die Horizontale b r ($=$H), so folgt aus dem Parallelogramm b r s t die Proportion P′ : T $=$ b t : b s (oder a m). Durch die Multiplikation der beiden Proportionen erhält man P′ : P $=$ b t : a p. Ziehen wir in dem Parallelogramm a m p n die Diagonale m n, so ist das rechtwinklichte Dreieck a m o, wegen b s $=$ a m, mit dem rechtwinklichten Dreiecke b s t kongruent, daher t s oder b r $=$ o m und b t $=$ a o. Weil aber die Diagonallinien eines Parallelogramms sich wechselseitig halbiren, so ist a o $= \frac{1}{2}$ a p, also auch b t $= \frac{1}{2}$ a p. Dieses in die letzte Proportion gesetzt, gibt P′ : P $= \frac{1}{2}$ a p : a p $=$ 1 : 2, mithin P′ $= \frac{1}{2}$ P. Setzen wir den Stellungswinkel, welchen die erste Seite b a mit der Horizontalen b b′ bildet, b′ b a $= \alpha$, so ist im Dreiecke b t s auch b t : t s oder H : $\frac{1}{2}$P $=$ 1 : tang α, und hieraus für den Stellungswinkel tang $\alpha = \frac{\frac{1}{2}P}{H}$, und wenn der Winkel α gegeben ist, so folgt die **horizontale Spannung** $H = \frac{\frac{1}{2}P}{\text{tang}\,\alpha}$.

In dem Punkte b haben wir zur senkrechten Kraft $\frac{1}{2}$ P noch die Last Q ($=$t u) hinzuzusetzen. Durch diese Vermehrung haben wir also in b die senkrechte Kraft b u $= \frac{1}{2}$P $+$ Q und die horizontale $=$ b r $=$ H. Wenn nun diese beiden durch das Parallelogramm b r w u zusammengesetzt werden, so gibt die Diagonale b w sowohl die Richtung, als auch die Grösse der in b angebrachten mittlern Kraft. Da wir nun annehmen, dass diese von der Spannung des Fadens b c im Gleichgewichte erhalten wird, so folgt von selbst, dass c b in der Richtung der Diagonale b w liegen, folglich die Linie c b w eine gerade Linie seyn müsse. Ziehen wir nun durch c die horizontale Linie c c′, so ist diese zu der horizontalen b b′ parallel, folglich der Stellungswinkel c′ c b $= \beta =$ b′ b w. In dem rechtwinklichten

Fig. 8. Tab. 20. Dreiecke b r w erhalten wir daher auch die Proportion b r : r w oder $H : \frac{1}{2} P + Q = 1 : \tang \beta$ und hieraus für den Stellungswinkel der Seite b c die Gleichung $\tang \beta = \frac{\frac{1}{2} P + Q}{H}$. Durch die Spannkraft der Seite b c wirkt also in dem Punkte c die horizontale Kraft $b r = H$ ($= c k$) und die senkrechte $b u = \frac{1}{2} P + Q$ ($= c g$). Zu dieser letztern muss abermal die Last R hinzugesetzt werden. Dadurch erhalten wir im Punkte c die senkrechte Kraft $\frac{1}{2} P + Q + R = c f$ und die horizontale $H = c k$, welche durch das Parallelogramm c k e f zusammengesetzt die mittlere c e oder die Richtung der Seite c d geben.

Ziehen wir abermal durch den Punkt d die horizontale d d′ parallel zu c c′, so ist der Stellungswinkel der dritten Seite $c d d' = \gamma = e c k$ und in dem rechtwinklichten Dreiecke e c k ergibt sich die Proportion c k : k e oder $H : \frac{1}{2} P + Q + R = 1 : \tang \gamma$, woraus für den Stellungswinkel die Gleichung $\tang \gamma = \frac{\frac{1}{2} P + Q + R}{H}$ folgt. Auf gleiche Art würde man bei d zur senkrechten Kraft $\frac{1}{2} P + Q + R$ noch die Kraft S hinzuzusetzen haben, wo sonach durch die Verbindung dieser Kraft mit der horizontalen H für den Stellungswinkel der folgenden Seite die Gleichung $\tang \delta = \frac{\frac{1}{2} P + Q + R + S}{H}$ sich ergeben würde u. s. w.

Wir sehen aus dieser Theorie, dass in jedem Punkte des Polygons der horizontale Druck dieselbe Grösse behält, der senkrechte Druck aber für jeden Punkt dem Gewichte des daranhängenden belasteten Polygons bis zum tiefsten Punkte a gleichkommt, und dass endlich für die Grösse des Stellungswinkels sich die Tangente ergibt, wenn der gesammte senkrechte Druck an jedem Punkte durch den horizontalen dividirt wird. Bringen wir alle obigen Gleichungen in eine Proportion, so ist

$\tang \alpha : \tang \beta : \tang \gamma : \ldots\ldots = \frac{1}{2} P : \frac{1}{2} P + Q : \frac{1}{2} P + Q + R : \ldots\ldots$

Wenn nebst den Gewichten P, Q, R, ... noch die Kettenglieder a b, b c, c d die eigenthümlichen Gewichte A, B, C besitzen, so erhellet von selbst, da jedes Kettenglied die Endpunkte zu beiden Seiten mit dem halben Gewichte belastet, dass auf solche Art bei a zur Last $\frac{1}{2} P$ noch $\frac{1}{2} A$, bei b zur Belastung Q noch $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$, bei c zur Belastung R noch $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C$ u. s. w. zugesetzt werden müsse, dadurch erhalten wir $\tang \alpha : \tang \beta : \tang \gamma : \ldots = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} A : \frac{1}{2} P + Q + A + \frac{1}{2} B : \frac{1}{2} P + Q + R + A + B + \frac{1}{2} C : \ldots$ Hieraus ergibt sich von selbst, dass für den Fall, wenn die Kette nur durch ihr eigenes Gewicht belastet ist, folglich $P = Q = R \ldots = 0$ gesetzt werden, $\tang \alpha : \tang \beta : \tang \gamma : \ldots\ldots = \frac{1}{2} A : A + \frac{1}{2} B : A + B + \frac{1}{2} C \ldots\ldots$ statt finden werde, welches dieselbe Proportion ist, die wir §. 366 bei den Gewölben angegeben und mit dem Namen der Kettenlinie bezeichnet haben.

§. 425.

Es wäre zu weitläufig, für ein jedes Kettenglied die Spannung und die Stellungswinkel desselben berechnen, und hiernach den Kettenbogen verzeichnen zu wollen; in dieser Hinsicht betrachtet man die Kettenglieder als unendlich klein, wodurch ihre Stellungslinien in eine krumme Linie übergehen. Bevor wir aber eine Gleichung für diese krumme Linie aufsuchen, wollen wir vorläufig die horizontale Spannkraft bestimmen. Wir haben oben gezeigt, dass in dem Parallelogramme a m p n die Linie m o die beständige horizontale Spannung H, und a p die senkrechte Belastung P des Punk-

tes a mithin a o die Last $\frac{1}{2}$ P vorstellt; hiernach erhalten wir die Proportion $\frac{1}{2}$ P : H = a o : o m. Errichten wir aus den Mitten q und q′ der untersten Kettenglieder a b und a b′ die winkelrechten C q und C q′, so gibt ihr Durchschnittspunkt C den Mittelpunkt des Kreises an, der mit dem Halbmesser C a = r durch die Punkte b, a und b′ gezogen werden kann. Es ist aber das Dreieck a o m dem Dreiecke a C q ähnlich, weil C q winkelrecht auf a m und C a winkelrecht auf o m, folglich nebst dem rechten Winkel noch der Winkel a m o dem Winkel a C q gleich ist. Daraus folgt die Proportion a o : om = a q : Cq; dieses in die obige Proportion gesetzt, gibt $\frac{1}{2}$P : H = a q : C q. Offenbar findet nun auch von der andern Seite die Proportion $\frac{1}{2}$ P : H = a q′ : C q′ statt, und weil C q = C q′ ist, so folgt aus der Addition der beiden letzten Proportionen auch P : 2 H = a q + a q′ : 2 C q, woraus $H = \frac{P . Cq}{aq + aq'} = \frac{P . Cq}{qaq'}$. Betrachtet man hier die Kettenglieder unendlich klein, so ist C q = C q′ = C a = r dem Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkte a, und wenn man noch die Länge des Bogens daselbst q a q′ = 1 Fuss setzt, und daher unter P das gesammte Gewicht eines Kurrentfusses in der Mitte der Brücke versteht, so erhält man für die horizontale Spannung die einfache Gleichung H = P . r. Fig. 9. Tab. 20.

Die Auffindung der krummen Linie, welche die Kette durch ihr eigenes Gewicht und durch die Last der angehängten Brückenbahn und der zufälligen Belastung im Zustande des Gleichgewichtes annimmt, lässt sich nur durch die höhere Analysis bewerkstelligen. *)

*) Es sey für einen willkührlichen Punkt M der Kettenkurve, A B = x die Abscisse und B M = y die Ordinate, ferner der Bogen A M = s; folglich B b = d x = M o, m o = d y und M m = d s, für das Kettenelement M m der Stellungswinkel b m M = v. Es wird zunächst darauf ankommen, das Gewicht zu bestimmen, welches an dem Punkte M hängt. Dieses besteht aus dem Gewichte der Kette von A bis M und aus dem Gewichte der Brückenbahn sammt der zufälligen Belastung von C bis D. Fig. 10. Tab. 20.

Zur Bestimmung des Gewichtes der Kette sey in dem Punkte A die Querschnittsfläche der Kette = f, welche der hier wirkenden Spannung der Kette H entspricht. In dem Punkte M erleidet die Kette eine grössere Spannung und es sey die ihr entsprechende Querschnittsfläche an diesem Orte f′. Im Punkte M wirkt aber die horizontale Kraft H und die senkrechte H . tang v, welche zusammengesetzt, die mittlere $= \sqrt{(H^2 + H^2 . \tang^2 v)} = \frac{H}{\cos v}$ geben. Sollen nun die Querschnittsflächen der mittlern Spannkraft der Kette proportional seyn, so haben wir hiefür die Proportion $f : f' = H : \frac{H}{\cos v}$, woraus $f' = \frac{f}{\cos v}$ folgt. Der kubische Inhalt des Kettenelementes M m ist daher $\frac{f}{\cos v} . ds$ und wenn g das Gewicht der kub. Einheit der Materie bezeichnet, das Gewicht desselben $\frac{g . f . ds}{\cos v}$; mithin das Gewicht des Bogens $AM = \int \frac{g . f . ds}{\cos v}$.

Ist auf gleiche Art F die Querschnittsfläche der belasteten Brückenbahn und G das Gewicht ihrer kubischen Einheit, so ist, weil das Gewicht derselben der Länge C D = B M = y proportional ist, das Gewicht der belasteten Brückenbahn = G . F . y. Es ist daher das von M getragene Gewicht $= G . F . y + \int \frac{g . f . ds}{\cos v}$. Die horizontale Spannung ist der oben angeführten Gleichung zu Folge H = (F . G + f . g) r. Nach dem oben aufgestellten allgemeinen Gesetze erhalten wir daher für den Stellungswinkel die Gleichung $\tang v = \frac{G . F . y + \int \frac{g . f . ds}{\cos v}}{H}$. Wird diese Gleichung differenzirt und $\frac{dy}{\cos v}$ statt d s gesetzt, so ist $H . d \tang v = G . F . dy + \frac{g . f . dy}{\cos^2 v}$. Weil aber $\frac{1}{\cos^2 v} = 1 + \tang^2 v$

Die in der untern Note gefundenen Gleichungen I bis VI dienen alle vorkommenden Abmessungen bei der Kettenlinie der Brücken zu bestimmen.

Fig. 10. Tab. 20. ist, so ergibt sich durch diese Substitution in den letzten Ausdruck, $dy = \frac{H . d \tan v}{G . F + g . f + g . f . \tan^2 v}$ und wenn statt H sein Werth $(G . F + g . f) r$ gesetzt und $G . F + g . f$ zum gemeinschaftlichen Faktor gemacht wird, so erhält man auch $dy = \frac{r . d \tan v}{1 + \frac{g . f . \tan^2 v}{G . F + g . f}}$, oder wenn wir der Kürze wegen $\frac{g . f}{G . F + g . f} = \mu$ setzen, $dy = \frac{r . d \tan v}{1 + \mu . \tan^2 v}$. Das Integral dieses Ausdruckes ist $y = \frac{r}{\sqrt{\mu}}$. Arc. tang $(\mu^{\frac{1}{2}} . \tan v)$. Weil aber $dx = dy . \tan v = \frac{r . \tan v . d \tan v}{1 + \mu . \tan^2 v}$ ist, so gibt das Integral dieses Ausdruckes für die Abscisse $x = \frac{r}{2\mu} . \log (1 + \mu . \tan^2 v)$.

Da die transcendentale Form dieser Integralien nicht die nöthige Uibersicht dieses Gegenstandes gewährt, und für die Anwendung zu unbequem ist, so finden wir es für angemessener, hier die Annäherung durch die steigenden Potenzen von $\tan^2 v$ zu wählen; welches um so mehr geschehen kann, als tang v bei den englischen Kettenbrücken immer nur eine sehr kleine Grösse (bei der Menaibrücke nur höchstens 0,331) ist, von welcher die höhern Potenzen noch kleiner werden. Diese kleinen Grössen können wir in unserer Rechnung um so mehr vernachlässigen, als sie durch ihre Coeffizienten noch mehr vermindert werden. Hiernach ist also $dy = r . d \tan v (1 - \mu . \tan^2 v + \mu^2 . \tan^4 v \ldots)$ Das Integral dieser Gleichung gibt für die Ordinate $\frac{y}{r} = \tan v \left(1 - \frac{\mu}{3} . \tan^2 v + \frac{\mu^2}{5} . \tan^4 v \ldots\right)$ (I.) Da aber $dx = dy . \tan v = r . \tan v . d \tan v (1 - \mu . \tan^2 v + \mu^2 . \tan^4 v \ldots..)$ ist, so erhalten wir durch Integration für die Abscisse die Gleichung $\frac{x}{r} = \frac{1}{2} \tan^2 v \left(1 - \frac{\mu}{2} . \tan^2 v + \frac{\mu^2}{3} . \tan^4 v \ldots..\right)$ (II.)

Wollte man für die Anwendung in den beiden Gleichungen für x und y sich bloss mit den ersten Gliedern begnügen und eine Gleichung zwischen x und y für die krumme Linie der Kette suchen, so wäre $y^2 = r^2 . \tan^2 v$ und diese durch die zweite $x = \frac{1}{2} r . \tan^2 v$ dividirt, gäbe $y^2 = 2 r . x$, also eine Gleichung für die Parabel; mithin entsprechen die ersten Glieder in den Gleichungen I und II der Parabel und die folgenden geben die Abweichungen der eigentlichen Gleichgewichtslinie von der Parabel. Für die Länge des Bogens ist $ds = \frac{dy}{\cos v}$ und weil $\frac{1}{\cos v} = \sqrt{(1 + \tan^2 v)} = 1 + \frac{1}{2} \tan^2 v - \frac{1}{8} \tan^4 v \ldots$ ist, so gibt die Multiplikation dieser Funktion mit jener für dy oben aufgestellten $\frac{ds}{r} = d \tan v \left(1 - \mu . \tan^2 v + \mu^2 . \tan^4 v \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 v - \frac{1}{8} \tan^4 v \ldots\right)$ oder $\frac{ds}{r} = d \tan v \left\{1 + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \tan^2 v - \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{2} - \mu^2\right) \tan^4 v \ldots\ldots\right\}$, welches integrirt für die Länge des Bogens $\frac{s}{r} = \tan v \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \mu\right) \tan^2 v - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{2} - \mu^2\right) \tan^4 v \ldots\right\}$ (III) gibt. Wird die Gleichung I zum Quadrat erhoben und mit II dividirt, und hiebei die Glieder mit den 6^ten^ Potenzen von tang v als unbedeutend vernachlässigt, so erhalten wir

$$\frac{y^2}{2r . x} = \frac{1 - \frac{2}{3} \mu . \tan^2 v + \frac{23}{45} \mu^2 . \tan^4 v}{1 - \frac{\mu}{2} . \tan^2 v + \frac{\mu^2}{3} . \tan^4 v} = 1 - \frac{1}{6} \mu . \tan^2 v + \frac{17}{180} \mu^2 . \tan^4 . v.$$

Nun gibt aber die Gleichung II durch Näherung $\tan^2 v = \frac{2x}{r}\left(1 + \frac{\mu . x}{r}\right)$ und $\tan^4 v = \frac{4x}{r^2}$. Diese Werthe in die letzte Gleichung gesetzt, geben $y^2 = 2r . x - \frac{2}{3} \mu . x^2 + \frac{4}{45} . \mu^2 . \frac{x^3}{r}$ (IV).

Wird auf gleiche Art die Gleichung III durch die Gleichung I dividirt und für $\tan^2 v$ und $\tan^4 v$ der Näherungswerth gesetzt, so erhält man die Gleichung $s = y\left\{1 + \frac{x}{3r} + \left(\frac{7\mu}{9} - \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{5 r^2}\right\}$ (V) und wenn man hierin mittelst der Gleichung IV den Krümmungshalbmesser r eliminirt, so ist auch $s = y\left\{1 + \frac{2x^2}{3y^2} + \frac{4}{5}\left(\frac{2\mu}{9} - \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{y^4}\right\}$ (VI).

§. 426.

Um von diesen Gleichungen Gebrauch zu machen, ist nöthig, vorläufig den horizontalen Druck H, den Coeffizienten μ und den Krümmungshalbmesser r zu bestimmen, wozu wir die *Menai* - Brücke als Beispiel wählen.

Im §. 407 wurde die Spannweite der *Menai*-Brücke = 580 Fuss, und §. 412 das Gewicht der Ketten und ihrer Verbindungsstücke = 394 Tonnen 5 Zent. = 7885 Zentner, dann das Gewicht der übrigen Brückenbestandtheile = (643 Tonnen 15½ Zent.) — (394 Tonnen 5 Zent.) = 4990½ Zentner angegeben. Wenn man nun das Gewicht der gesammten 16 Ketten (7885 Zentner) mit ihrer Länge (588,4 Fuss) dividirt, so ergibt sich das Gewicht eines Kurrentfusses der Ketten 13,4 Zentner = g . f. Auf gleiche Art findet man das Gewicht eines Kurrentfusses der Brückenbahn $G . F = \frac{4990{,}5}{580} = 8{,}6$ Zentner. Demnach ist die horizontale Zugkraft $H = (G . F + g . f)\, r = 22\, r$, und der Coeffizient $\mu = \frac{g . f}{G . F + g . f} = \frac{13{,}4}{22} = 0{,}6091$. Wird der für μ gefundene Werth in die obigen Gleichungen IV und VI gesetzt, so erhält man

$$y^2 = 2 r . x - \frac{2}{3} \cdot \frac{13{,}4}{22} x^2 + \frac{4}{45} \left(\frac{13{,}4}{22}\right)^2 . \frac{x^3}{r} \text{ (VII) und } s = y\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{y^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{361}{990} \cdot \frac{x^4}{y^4}\right) \text{(VIII)}$$

Bei der *Menai*-Brücke ist die grösste Ordinate y = der halben Spannweite 290 Fuss, und die zugehörige Abscisse x = dem Pfeil 43 Fuss; werden diese Werthe in die Gleichung VII gesetzt, so ist $(290)^2 = 2 r . 43 - \frac{2}{3} . \frac{13{,}4}{22} . (43)^2 + \frac{4}{45} \left(\frac{13{,}4}{22}\right)^2 \cdot \frac{43^3}{r}$, woraus der Krümmungshalbmesser im Scheitel r = 986,6 Fuss folgt. Mit Einführung dieses Werthes für r gibt VII die Gleichung für die Coordinaten der Kettenlinie

$$y^2 = 1973{,}2\, x - \frac{2}{3} . \frac{13{,}4}{22} \cdot x^2 + \frac{4}{45} \cdot \left(\frac{13{,}4}{22}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{986{,}6}$$

und für die horizontale Spannung erhalten wir H = 22 . r = 21705 Zentner.

Aus der vorhergehenden Gleichung sieht man, dass bei der Berechnung der Abscisse x aus der gegebenen Ordinate y das letzte Glied auf das Rechnungsresultat einen höchst unbedeutenden Einfluss habe; man kann es daher unbeschadet der nöthigen Genauigkeit zur Vereinfachung der Rechnung ausser Acht lassen, und man sieht, dass die Kettenlinie in unserm Falle zunächst mit einer Elypse übereinstimmt, deren grössere Achse horizontal liegt und 4860 Fuss und die kleinere senkrecht liegende Achse 3097 Fuss enthält. Mittelst der Gleichung $y^2 = 1973{,}2\, x - \frac{2}{3} \cdot \frac{13{,}4}{22} . x^2 + \frac{4}{45} \left(\frac{13{,}4}{22}\right) . \frac{x^3}{986{,}6}$ wurden für die in der ersten Columne der beiliegenden Tabelle angenommenen Werthe von y die zugehörigen Werthe von x berechnet und in die zweite Columne eingetragen; die dritte Columne dieser Tabelle enthält die Längen der Kette für die vom Scheitel gemessenen horizontalen Weiten der ersten Columne. Die Zahlen dieser Columne sind nach der Gleichung VIII berechnet. Da endlich bei der *Menai* - Brücke die Entfernung der Tragstäbe nach der schiefen Richtung des Kettenbogens gemessen genau 5 Fuss beträgt, so wurden die in der zweiten Columne berechneten Höhen x nach Maassgabe der in der vierten Columne angenommenen Bogenlänge berichtigt und in die fünfte Columne eingetragen.

§. 427.

Die Fahrbahn auf der *Menai*-Brücke ist aber nicht horizontal, sondern in der Mitte höher gelegt als an den Stützpfeilern. Da das Gesetz, nach welchem diese Erhöhung gegen die Mitte zu gemacht wurde, nicht angegeben ist, so hat man für die Convexität der Fahrbahn die parabolische Form und ihre grösste Erhöhung in der Mitte 2 Fuss angenommen, und hiernach von der Mitte der Brücke gegen die Stützpfeiler hin zu jeder berechneten Länge x der Hängestangen noch die Grösse, um welche die Fahrbahn unter dem *Niveau* des Scheitels liegt, hinzugesetzt. Weil nun für die Weite 290 Fuss die Senkung der Bahn 2 Fuss beträgt, so wird für jede andere Weite y die Senkung der Bahn nach dem Gesetze der Parabel die Grösse $u = \frac{y^2 . 2}{(290)^2}$ betragen. Nach dieser Gleichung wurden die zugehörigen Verlängerungen der Höhen x berechnet und in der VI[ten] Columne eingetragen. Die VII[te] Columne enthält die Summe der Zahlen aus beiden letztern Columnen, und also die Länge der Tragstangen von der untersten Kette bis an die durch den Scheitel der Kettenlinie gezogene Parabel. In der letzten Columne der Tabelle sind endlich die Werthe für dieselben Längen beigesetzt, wie sie Herr *Telford* durch Versuche an einem Modelle fand, welches um diese Rechnungen zu vermeiden, in einem Maasstabe von $\frac{1}{4}$[tel] der wirklichen Grösse erbaut wurde. Die Vergleichung der Zahlen in den beiden letzten Columnen zeigt genügend die grosse Uibereinstimmung unserer Rechnung mit den Erfahrungen des Herrn *Telford*. Da die Abweichungen höchstens nur einige Zolle, folglich im Modell nur $\frac{1}{4}$ hievon betragen, so können diese theils in der willkührlichen Form der Fahrbahn und ihrer Verschiedenheit von der hier angenommenen Parabel, theils auch in Messungsfehlern, welche bei der Vergleichung eines Modelles mit der wirklichen Grösse nicht wohl zu vermeiden sind, ihren Grund haben. Da übrigens die Tragstangen oben an den vier übereinander gehängten Ketten und unten an den Tragschwellen unter der Brückenbahn endigen, so versteht sich von selbst, dass man bei der Bemessung der ganzen Länge der Hängestäbe zu den in der folgenden Tabelle angegebenen Maassen noch die Höhe vom Scheitel der untersten Kette bis zu dem Orte der Befestigung an den Tragschwellen, nämlich die Höhe des Geländers, die Dicke der Fahrbahn und den Betrag, wie viel die Hängestäbe hinsichtlich der Befestigung noch unterhalb hervorstehen müssen, wie auch die zugehörige Entfernung der Tragketten unter einander hinzuzusetzen habe.

§. 428.

Wir kommen nun zur Bestimmung der nöthigen Stärke und des Gewichtes der Ketten. Zu dieser Absicht haben die englischen Baumeister sehr viele Versuche über die Festigkeit verschiedener Eisengattungen angestellt, welche bereits im III. Kapitel angeführt worden sind. Da jedoch hieraus noch keine bestimmte Regel für die nöthige Stärke der Ketten abgeleitet werden konnte, so wollen wir hierüber vorläufig nur dasjenige anführen, was bei den zwei grössten englischen Kettenbrücken für zweckmässig anzunehmen befunden wurde.

Bei der *Menai*-Brücke haben wir bereits oben die horizontale Zugkraft $H = (G.F + g.f)r = 21705$ Zentner gefunden. Der Querschnitt aller Ketten beträgt 260 Quad. Zoll; daraus folgt, dass ein Quad. Zoll nur eine Spannkraft von 83,5 Zentner zu

Zur Seite 478.

Tabelle

über die Länge der Hängestäbe bei der *Menai*-Brücke.

I. Ordinate y.	II. Grösse der Abscisse x.	III. Bogenlänge s.	IV. Bogenlänge für die Hängestäbe. s.	V. Länge der Hängestangen bis zum *Niveau* des Scheitels.	VI. Correction wegen convexer Fahrbahn u	VII. Corrigirte Länge der Hängstäbe. x + u	VIII. *H. Telford* fand bei dem Versuche für x + u
0	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,01	5,00	5	0,01	0,00	0,01	.
10	0,05	10,00	10	0,05	0,00	0,05	0,04
15	0,11	15,00	15	0,11	0,01	0,12	.
20	0,20	20,00	20	0,20	0,01	0,21	0,21
25	0,32	25,00	25	0,32	0,01	0,33	.
30	0,46	30,00	30	0,46	0,02	0,48	0,37
35	0,62	35,01	35	0,62	0,03	0,65	.
40	0,81	40,01	40	0,81	0,04	0,85	0,71
45	1,03	45,02	45	1,03	0,05	1,08	.
50	1,27	50,02	50	1,27	0,06	1,33	1,17
55	1,53	55,03	55	1,53	0,07	1,60	.
60	1,82	60,04	60	1,82	0,09	1,91	1,73
65	2,14	65,05	65	2,14	0,10	2,24	.
70	2,48	70,06	70	2,48	0,12	2,60	2,37
75	2,85	75,07	75	2,85	0,13	2,98	.
80	3,25	80,09	80	3,24	0,15	3,39	3,13
85	3,66	85,11	85	3,65	0,17	3,82	.
90	4,11	90,13	90	4,09	0,19	4,28	3,98
95	4,58	95,15	95	4,56	0,21	4,77	.
100	5,07	100,17	100	5,05	0,24	5,29	4,92
105	5,59	105,20	105	5,57	0,26	5,83	.
110	6,14	110,23	110	6,11	0,29	6,40	6,00
115	6,71	115,26	115	6,68	0,31	6,99	.
120	7,31	120,30	120	7,27	0,34	7,61	7,21
125	7,93	125,34	125	7,88	0,37	8,25	.
130	8,58	130,38	130	8,52	0,40	8,92	8,50
135	9,25	135,42	135	9,18	0,43	9,61	.
140	9,95	140,47	140	9,87	0,46	10,33	9,92
145	10,68	145,52	145	10,59	0,50	11,09	.

I. Ordinate y.	II. Grösse der Abscisse x.	III. Bogenlänge s.	IV. Bogenlänge für die Hängestäbe.	V. Länge der Hängestangen bis zum *Niveau* des Scheitels.	VI. Correction wegen convexer Fahrbahn u	VII. Corrigirte Länge der Hängestäbe x + u	VIII. *H. Telford* fand bei dem Versuche für x + u
150	11,43	150,58	150	11,32	0,53	11,85	11,42
155	12,21	155,64	155	12,09	0,57	12,66	.
160	13,01	160,71	160	12,87	0,60	13,47	12,96
165	13,84	165,77	165	13,68	0,64	14,32	.
170	14,69	170,85	170	14,52	0,68	15,20	14,71
175	15,57	175,92	175	15,37	0,72	16,09	.
180	16,48	181,01	180	16,26	0,76	17,02	16,50
185	17,41	186,09	185	17,16	0,80	17,96	.
190	18,36	191,18	190	18,09	0,85	18,94	18,42
195	19,35	196,28	195	19,04	0,89	19,93	.
200	20,36	201,38	200	20,02	0,93	20,95	20,42
205	21,39	206,48	205	21,02	0,99	22,01	.
210	22,45	211,59	210	22,04	1,03	23,07	22,50
215	23,54	216,71	215	23,09	1,08	24,17	.
220	24,65	221,83	220	24,16	1,13	25,29	24,77
225	25,79	226,96	225	25,25	1,18	26,43	.
230	26,96	232,09	230	26,37	1,24	27,61	27,08
235	28,15	237,23	235	27,51	1,29	28,80	.
240	29,37	242,38	240	28,67	1,34	30,01	30,08
245	30,61	247,53	245	29,85	1,40	31,25	.
250	31,88	252,69	250	31,06	1,45	32,51	32,04
255	33,18	257,86	255	32,29	1,51	33,80	.
260	34,50	263,03	260	33,54	1,57	35,11	36,62
265	35,85	268,21	265	34,81	1,63	36,44	.
270	37,23	273,39	270	36,11	1,69	37,80	37,33
275	38,63	278,59	275	37,43	1,75	39,18	.
280	40,06	283,79	280	38,77	1,81	40,58	40,17
285	41,51	288,99	285	40,13	1,88	42,01	.
290	43,00	294,21	290	41,51	1,94	43,45	42,96
295	44,51	299,43	295	42,91	2,01	44,92	.
300	46,04	304,67	300	44,33	2,07	46,40	.

tragen habe. Für die grösste zufällige Belastung können wir auf 36 engl. Quad. Fuss ($=1$ Quad. Klafter) 30 Ztr., nämlich 20 Personen, jede zu 168 engl. ℔ (oder 136 N. Oe. ℔) rechnen; weil aber die *Menai*-Brücke 28 Fuss breit ist, folglich ein Kurrentfuss dieser Brücke nur 28 Quad. Fuss enthält, so kommt auf jeden Kurrentfuss $23\frac{1}{3}$ Zentner. Werden diese zu dem obigen Gewichte $G.F+g.f=22$ Ztr. hinzugeschlagen, so ist das Gewicht eines Kurrentfusses der höchst belasteten Brücke $45\frac{1}{3}$ Ztr., demnach die horizontale Spannkraft $H=45\frac{1}{3}.986{,}6=44726$ Ztr. Wird nun diese mit 260 Quad. Zoll dividirt, so kommt auf einen Quad. Zoll 172 Ztr.

Nach den Seite 256 angeführten Erfahrungen des Hrn. *Telford* beträgt die Festigkeit eines engl. Quad. Zolles Eisen 587 engl. Zentner. Wird diese Zahl mit der Spannkraft der unbelasteten Brücke (83,5 Ztr.) dividirt, so sehen wir, dass die Last der Brücke und der Ketten an und für sich nur den 7ten Theil des Tragungsvermögens der Kette betrage; wird aber diese Zahl mit der Spannkraft der höchst belasteten Brücke (172 Ztr.) verglichen, so sieht man, dass die grösste Spannung der Kette noch nicht den 3ten Theil ihres Tragungsvermögens erreicht. Da überdiess alle Kettenglieder vor ihrem Gebrauche einer Spannkraft von 11 Tonnen oder 220 Ztr. auf jeden Quad. Zoll unterworfen wurden, welches die grösste Spannkraft von 172 Ztr. um 48 Ztr. übersteigt, so sehen wir, dass hiedurch für hinlängliche Festigkeit der Brücke gesorgt worden sey, und dass demnach ähnliche Verhältnisse für Brücken an andern Orten genügende Sicherheit gewähren.

Wir haben nun noch die Ausdehnung des Eisens und das davon abhängende Einsinken der Brücke in ihrer Mitte zu betrachten. Nach *Tredgold* beträgt das elastische Kraftverhältniss (*Modulus elasticitatis*) $\frac{Q.L}{F.\alpha'}$ für Stabeisen 24920000 ℔ oder 222500 engl. Ztr.; wird diese Grösse mit der Spannkraft der unbelasteten Brücke dividirt, so ist das Verhältniss der Länge zur Ausdehnung $\frac{1}{\alpha}=2665$. Die Länge des Brückenbogens beträgt 588,4 Fuss, also ist die Ausdehnung der Ketten bei der unbelasteten *Menai*-Brücke $\frac{588{,}4\,.\,12}{2665}=2{,}6$ Zoll. Auf gleiche Art findet man bei der grössten Belastung von 172 Ztr. auf jeden Quad. Zoll, die Ausdehnung der 588 Fuss langen Kette $=5{,}5$ Zoll. Der Unterschied von beiden ist daher 2,9 Zoll, welche Ausdehnung von der grössten Belastung mit $23\frac{1}{3}$ Ztr. für jeden Kurrentfuss bewirkt wird.

Zur Berechnung der Grösse, wie viel die Brücke in der Mitte einsinkt, dient die oben angeführte Gleichung VI, vermöge welcher mit Hinweglassung des letzten Gliedes die Länge des Bogens für die halbe Spannweite (y) aus der Gleichung $s=y+\frac{2}{3}.\frac{x^2}{y}$ berechnet werden kann; demnach ist für die ganze Spannweite $2s=2y+\frac{4}{3}.\frac{x^2}{y}$, und wenn wir für x die Grösse $x+u$ setzen, so ist $2S=2y+\frac{4}{3}\frac{(x+u)^2}{y}$, folglich der Unterschied $2S-2s=\frac{4}{3}\left(\frac{2u.x+u^2}{y}\right)$. Setzen wir nun $2S-2s=$ der letztgefundenen Ausdehnung $=2{,}6$ Zoll, $y=290$ Fuss und $x=43$ Fuss, so ist $2{,}6=\frac{4}{3}\left(\frac{86u+u^2}{290}\right)$. Hieraus folgt mit Vernachlässigung von u^2 die Tiefe der Einsenkung der Brücke in der Mitte $u=6{,}6$ Zoll. Diess wäre jedoch nur die Einsenkung in

der Mitte, wenn die Endpunkte der Ketten an den beiderseitigen Tragstützen **unbeweglich** befestigt wären; da man aber dieses in Hinsicht auf die Festigkeit der Pfeiler bedenklich gefunden, demnach die Ketten auf Rollen gelegt und an den beiderseitigen Ufern in eigenen Kammern befestigt hat, wodurch die Ketten eine Länge von 1740 Fuss erhielten, so müssen wir die Ausdehnung für die ganze Länge in Rechnung nehmen. Diese beträgt, auf gleiche Art wie oben berechnet, für die unbelastete Brücke $\frac{1740.12}{2665}=7{,}8$ Zoll und für die grösstbelastete $\frac{1740.12}{1294}=16{,}1$ Zoll. Es beträgt demnach die Ausdehnung, welche der Belastung allein zukommt $16{,}1-7{,}8=8{,}3$ Zoll. Wird dieser Werth für $2S-2s$ in obigen Ausdruck statt $2{,}6$ substituirt, so beträgt die Einsenkung der Brücke in der Mitte $u=\frac{3}{8}\cdot\frac{290}{43}\cdot 8{,}3=21$ Zoll. Dadurch erklärt sich die von mehreren Reisenden bereits angegebene Beobachtung, dass an der *Menai*-Brücke bei dem Darüberfahren grosser Lasten sehr bemerkbare Einsenkungen oder Oscillationen in der verticalen Richtung statt finden.

§. 429.

Wir wollen auf gleiche Art diese Verhältnisse noch **für die *Hammersmith*-Brücke** aufsuchen. Da bei dieser das Gewicht der Kette und der Fahrbahn nicht angegeben ist, so wurden diese nach den in der Beschreibung angegebenen Maassen (S. 450 und die folgenden) berechnet. Nach dieser Berechnung fand man für den mittlern Kettenbogen von 400 Fuss Spannweite und $29\frac{1}{2}$ Fuss Hängetiefe das Gewicht eines Kurrentfusses der Ketten $g.f=9{,}19$ Ztr. für ihren Querschnitt von 180 Quad. Zoll; das Gewicht eines Kurrentfusses der Fahrbahn sammt den Hängestangen $G.F=15{,}73$ Ztr. Nach diesen beiläufig ausgemittelten Werthen beträgt der Coeffizient $\mu=\frac{919}{2492}=0{,}3688$. Der Ausdruck IV gibt sodann für diese Werthe und für die halbe Spannweite $y=200$ Fuss, und die ganze Hängetiefe $x=29{,}5$ Fuss, die Gleichung $200^2=2.r.29{,}5-\frac{2}{3}.0{,}3688.(29{,}5)^2$, woraus der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie im Scheitel $r=681{,}6$ Fuss folgt. Die horizontale Spannkraft der Ketten ist daher $H=24{,}92.681{,}6=16985$ Ztr. für die blosse Belastung durch das eigene Gewicht der Brücke.

Wird nach denselben Grundsätzen, wie für die *Menai*-Brücke die grösstmögliche zufällige Belastung auch für die *Hammersmith*-Brücke berechnet, so findet man diese $=25$ Ztr. für jeden laufenden Fuss; der Coeffizient μ ist sodann $=\frac{919}{4992}=0{,}1841$ und die horizontale Spannkraft für die belastete Brücke $H'=49{,}92.681{,}6=34025$ Ztr. Die auf einen Quad. Zoll entfallende Spannkraft der Ketten beträgt daher bei der unbelasteten Brücke $\frac{16985}{180}=94{,}4$ Ztr., und bei der belasteten Brücke $\frac{34025}{180}=189$ Ztr. Werden diese beiden letzten Kraftanstrengungen mit dem oben angegebenen Kraftvermögen eines Quad. Zolles 587 engl. Ztr. verglichen, so findet man, dass bei der unbelasteten *Hammersmith*-Brücke nur der 6te Theil und bei der höchst belasteten nur höchstens der 3te Theil von dem Kraftvermögen des Eisens in Anspruch genommen wurde, welches beinahe dieselben Verhältnisse sind, wie sie sich aus den Betrachtungen für die *Menai*-Brücke ergaben.

Man sieht also hieraus, dass bei den grössten engl. Kettenbrücken **die Ketten bei ihrer grösstmöglichen Belastung beiläufig ein Drittheil derjenigen Last zu tragen haben, von welcher sie zerrissen würden.**

§. 430.

Um die Nachtheile zu verhüten, welche die Brückenpfeiler von den Erschütterungen der darüber fahrenden Wägen erleiden, hat man in letztern Zeiten auf die Pfeiler Rollen gelegt, über welche die Ketten sich frey hin und her bewegen können. Da jedoch auf solche Art die Brücke durch das zufällige Befahren mit schwereren und leichteren Wägen sehr vielen Veränderungen unterliegt, indem die grössere Last von einer Seite des Pfeilers ein Einsinken des mehr belasteten Brückenfeldes und dagegen an der andern Seite ein Aufsteigen des minder belasteten Feldes zur Folge haben muss, so ist noch die Grösse des wechselseitigen Einsinkens und Aufsteigens zu berechnen. Die Rechnung hierüber, welche auf elementare Art gemacht ist, befindet sich unter dem Texte. *)

Beispiel. Es sey die Länge der Brücke $2A = 400$ Fuss, die Höhe der Pfeiler

*) Um bei dieser Untersuchung von dem einfachsten Falle auszugehen, wollen wir zuerst annehmen, die Brücke besitze (nach dem Vorschlage des Cap. Brown) nur einen Pfeiler in ihrer Mitte, über welchen die an beiden Ufern angehängten Ketten hinweggehen. Es sey demnach B O G die horizontale Fahrbahn der Brücke, welche an den zwei Kettenbögen C B und C G auf die gewöhnliche Art aufgehängt ist. Auf dem Pfeiler O C befinden sich bei C eine oder mehrere Rollen, über welche die Ketten, wenn sie von einer Seite mehr als von der andern belastet werden, sich frei hin- und herbewegen können. Vermöge der Gleichheit der beiden Brückenhälften müssen wir annehmen, dass sie gleiche Maasse und gleiches Gewicht besitzen, demnach die Kettenbögen mit dem Mittelpfeiler auch von beiden Seiten gleiche Winkel bilden. Es sey demnach der Winkel, den die Kettenbögen CB und CG mit der horizontalen A C F im Punkte C bilden $= v$, das Gewicht einer Brückenhälfte sammt Ketten $= P$ und die horizontale Spannkraft in jedem Punkte der Kette $= H$. Eben so sey die halbe Länge der Brücke $BO = AC = A$ und der Pfeil des Bogens AB oder die Höhe des Punktes C über $O = B$. Nach §. 424 ist die horizontale Spannkraft der Ketten $H = \frac{P}{\text{tang } v}$. Weil aber die krumme Linie, welche die Ketten bilden, der Parabel sehr nahe kommt, so ist für den Punkt C nach der bekannten Eigenschaft der Parabel $\text{tang } v = \frac{2B}{A}$; daher für jede der gleichen Brückenhälften die horizontale Spannkraft H auch $= \frac{P.A}{2B}$ (I). Die Länge des parabolischen Kettenbogens für jede gleiche Brückenhälfte ist nach §. 425, Gleichung VI $= A + \frac{2}{3} \cdot \frac{B^2}{A}$ (II). Fig. 11. Tab. 20.

Es werde nun das eine Brückenfeld B O nebst seinem eigenen Gewichte P noch mit der zufälligen Last Z beschwert, welche wir auf der Länge B O gleichförmig vertheilt annehmen wollen. Durch diese zufällige Belastung Z wird das Brückenfeld B O nothwendig herabgedrückt und die Kette verlängert, dagegen aber das Brückenfeld G O gehoben und seine Kette verkürzt.

Es sey B E C der verlängerte Bogen des herabgedrückten Brückenfeldes, welcher wegen der gleichförmigen Vertheilung der zufälligen Belastung Z abermal eine Parabel bilden wird, deren Scheitel jedoch nicht mehr in B, sondern in dem tiefsten Punkte E auf der Entfernung $AD = e$ seyn wird. Eben so wird, wenn wir die Tiefe des Punktes E unter $B = b$ setzen, die Grösse des Pfeiles $DE = B + b$ seyn.

Aus der gleichförmigen Vertheilung der gesammten Last $P + Z$ über der Länge A C des herabgedrückten Brückenfeldes folgt, dass die Belastung $P + Z$ des Bogens B E C sich zur Belastung des Bogens C E verhält, wie $AC : DC = A : A - e$ und dass also die Last, welche im Punkte C senkrecht herabwirkt $= (P + Z)\left(\frac{A - e}{A}\right)$ ist. Hieraus ergibt sich, wenn wir in der obigen Gleichung I statt P die Grösse $(P + Z)\left(\frac{A - e}{A}\right)$, statt A die Grösse $A - e$ und statt B die Grösse $B + b$ set-

$B = 30$ Fuss $= 360$ Zolle, das Gewicht der Brücke sammt Ketten für jeden Kurrent-Fuss $= 25$ Ztr., also $P = 5000$ Ztr.; die zufällige Belastung oder die Uiberwucht des er-

Fig. 11. Tab. 20. zen, der durch die zufällige Belastung geänderte horizontale Zug in $C = \frac{(P+Z)(A-e)^2}{2A(B+b)}$ (III). Wird auf gleiche Art in der Gleichung II, $B+b$ statt B und $A-e$ statt A geschrieben, so ist die Länge des Bogens $EC = A - e + \frac{2}{3} \cdot \frac{(B+b)^2}{A-e}$, und eben so findet man die Länge des Bogens $BE = e + \frac{2}{3} \cdot \frac{b^2}{e}$, wenn e in der Gleichung II statt A, und b statt B gesetzt wird. Es ist demnach die Länge des geänderten Bogens $BEC = BE + EC = A + \frac{2}{3}\left\{\frac{(B+b)^2}{A-e} + \frac{b^2}{e}\right\}$ (IV.)

Es sey nun von der andern Seite CwG der durch die Belastung Z des erstern Brückenfeldes gespannte Bogen, so wird dieser abermal ein Theil einer Parabel CGK seyn, welche ihren Scheitel in K hat. Die Entfernung der beiden Scheitel FJ sey $= E$ und die Tiefe des neuen Scheitels K unter dem ersten G sey $= \beta$, also der Pfeil der neuen Parabel $JK = FG + \beta = B + \beta$. Da der Bogen CG mit dem Gewichte P belastet ist, so können wir auf gleiche Art wie zuvor die Belastung des Bogens CK nach der Proportion $CF : CJ = A : A + E$ berechnen; folglich den senkrechten Druck, welcher bei C durch den gespannten Bogen bewirkt wird $= P\frac{(A+E)}{A}$ setzen. Hiernach ergibt sich nach der Gleichung I für den gehobenen Bogen der horizontale Zug in $C = \frac{P(A+E)^2}{2A(B+\beta)}$ (V). Analog ergibt sich auch für den gespannten Bogen CK nach der Gleichung II die Länge des Bogens $CK = A + E + \frac{2}{3}\frac{(B+\beta)^2}{A+E}$, und eben so die Länge des Bogens $GK = E + \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta^2}{E}$, folglich die Länge des gespannten Bogens $CwG = CK - GK = A + \frac{2}{3}\left\{\frac{(B+\beta)^2}{A+E} - \frac{\beta^2}{E}\right\}$ (VI).

Um die weitern Rechnungen noch mehr abzukürzen, wollen wir statt der geänderten Brückenbögen zwei andere Hülfsbögen substituiren, die mit den ursprünglichen gleiche Spannweite und gleiche Belastung, und mit den geänderten gleiche horizontale Spannung und gleiche Bogenlänge besitzen, damit auf solche Art an den Bedingnissen des gleichen horizontalen Druckes und der gleichen Länge der Bögen nichts geändert werde. Es sey daher CB' der Hülfsbogen, welcher statt des herabgedrückten BEC substituirt werden kann und CG' der Hülfsbogen, der mit dem gespannten CwG gleichbedeutend ist.

Der Scheitel des ersten Hülfsbogens CB' sey in B' auf der Entfernung $BB' = p$ unter B, also sein Pfeil $AB' = B + p$, und der Scheitel des zweiten Hülfsbogens CG' befinde sich über G auf der Höhe $GG' = q$, daher sein Pfeil $B - q$. Analog mit der Gleichung I findet man für den Hülfsbogen CB' die horizontale Spannung $= \frac{(P+Z)A}{2(B+p)}$ (VII), welche demnach $= (P+Z)\frac{(A-e)^2}{2A(B+b)}$ seyn muss. Werden nun in dieser Gleichung beide Glieder mit $\frac{2(B+b)}{A(P+Z)}$ multiplizirt, so ist $\frac{B+b}{B+p} = \left(\frac{A-e}{A}\right)^2$, und wenn man $\frac{b}{B}$, $\frac{p}{B}$ und $\frac{e}{A}$ als sehr kleine Grössen behandelt, von welchen die zweiten und höhern Potenzen vernachlässigt werden können, so erhält man $1 - \left(\frac{p-b}{B}\right) = 1 - \frac{2e}{A}$, sonach $\frac{e}{A} = \frac{p-b}{2B}$. Auf gleiche Art findet man nach der Gleichung II die Länge des Bogens $CB' = A + \frac{2}{3} \cdot \frac{(B+p)^2}{A}$ (VIII), welche $= A + \frac{2}{3}\left\{\frac{(B+b)^2}{A-e} + \frac{b^2}{e}\right\}$ aus IV seyn muss. Wird diese Gleichung abgekürzt und mit $\frac{e(A-e)}{B^2 . A}$ multiplizirt, so findet man

$$\left(1+\frac{p}{B}\right)^2 \cdot \frac{e}{A} \cdot \left(1-\frac{e}{A}\right) = \frac{b^2}{B^2}\left(1-\frac{e}{A}\right) + \left(1+\frac{b}{B}\right)^2 \cdot \frac{e}{A} \text{ oder auch sehr nahe}$$

$$\left(1+\frac{2p}{B}\right)\frac{e}{A} - \frac{e^2}{A^2} = \frac{b^2}{B^2} + \left(1+\frac{2b}{B}\right)\frac{e}{A}, \text{ woraus auch } 2\left(\frac{p-b}{B}\right)\frac{e}{A} - \frac{e^2}{A^2} = \frac{b^2}{B^2} \text{ folgt.}$$

Wird in der letzten Gleichung für $\frac{e}{A}$ der oben gefundene Werth gesetzt, so erhält sie die

sten Bogens über den zweiten sey $\frac{1}{5}$ der ganzen Last der ersten Brückenhälfte, also $Z = 1000$ Ztr. und der Coeffizient für den Reibungswiderstand $m = \frac{1}{9}$. Diese Werthe

Form $\left(\frac{p-b}{B}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{p-b}{B}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{p-b}{B}\right)^2 = \frac{b^2}{B^2}$, und beiderseits die Wurzel gezogen, folgt sehr Fig. 11. Tab. 20.
nahe $\frac{7}{8}(p-b) = b$, mithin $\underbrace{b = \frac{7}{15}\, p}$.

Führen wir für den 2ten Hülfsbogen C G′ dieselbe Rechnung aus, so ist nach der Gleichung I seine horizontale Spannung $= \frac{P \cdot A}{2(B-q)}$ (IX), welche auch $= \frac{P\,(A+E)^2}{2A(B+\beta)}$ seyn muss. Diese Gleichung mit $\frac{2(B+\beta)}{P \cdot A}$ multiplizirt gibt $\frac{B+\beta}{B-q} = \left(\frac{A+E}{A}\right)^2$ oder sehr nahe $1 + \frac{\beta+q}{B} = 1 + \frac{2E}{A}$, mithin $\frac{E}{A} = \frac{\beta+q}{2B}$. Es ist aber auch die Länge des Bogens C G′ nach der Gleichung II $=$
$= A + \frac{2}{3} \cdot \frac{(B-q)^2}{A}$ (X), welche $= A + \frac{2}{3}\left\{\frac{(B+\beta)^2}{A+E} - \frac{\beta^2}{E}\right\}$ aus VI seyn muss. Diese Gleichung mit $\frac{(A+E)E}{A \cdot B^2}$ multiplizirt, gibt $\left(1-\frac{q}{B}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{E}{A}\right)\frac{E}{A} = \left(1+\frac{\beta}{B}\right)^2 \cdot \frac{E}{A} - \frac{\beta^2}{B^2}\left(1+\frac{E}{A}\right)$, oder weil $\frac{q}{B}$, $\frac{\beta}{B}$ und $\frac{E}{A}$ sehr kleine Grössen sind, auch sehr nahe
$\left(1-\frac{2q}{B}\right)\frac{E}{A} + \frac{E^2}{A^2} = \left(1+\frac{2\beta}{B}\right)\frac{E}{A} - \frac{\beta^2}{B^2}$ und abgekürzt $2\left(\frac{q+\beta}{B}\right)\frac{E}{A} - \frac{E^2}{A^2} = \frac{\beta^2}{B^2}$. In dieser Gleichung für $\frac{E}{A}$ den oben gefundenen Werth gesetzt, ist $\frac{\beta^2}{B^2} = \left(\frac{q+\beta}{B}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{q+\beta}{B}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{q+\beta}{B}\right)$ und beiderseits die Wurzel gezogen $\frac{\beta}{B} = \frac{7}{8}\left(\frac{q+\beta}{B}\right)$ sehr nahe, folglich $\underbrace{\beta = 7\, q}$.

Wir können nunmehr das Einsinken der einen Brückenhälfte, welches von der darauf gebrachten zufälligen Last Z bewirkt wird, auf folgende Art berechnen:

Die horizontale Zugkraft des herabgedrückten Bogens in VII oder $\frac{(P+Z)A}{2(B+p)}$ muss offenbar dem horizontalen Zuge des gehobenen Bogens in IX oder $\frac{P \cdot A}{2(B-q)}$ das Gleichgewicht halten, und zugleich den Widerstand der Reibung überwältigen, der auf den Rollen in C der Bewegung entgegensteht. Die Rollen werden aber von der einen Seite mit der Last $P + Z$ und von der andern Seite mit P senkrecht gedrückt, wir können den Widerstand der Reibung dem mten Theile der gesammten Last oder $= m(2P + Z)$ setzen. Für den Zustand des Gleichgewichtes erhalten wir daher die Gleichung
$\frac{(P+Z)A}{2(B+p)} = \frac{P \cdot A}{2(B-q)} + m(2P+Z)$ (XI).

Da nun die Länge der Kettenbögen für die belastete und unbelastete Brücke dieselbe bleibt, so ist die Summe der Ausdrücke VIII und X die ganze Länge der Kette für die belastete Brücke den beiden Bögen BC und CG gleich, welches die Gleichung
$\left\{A + \frac{2}{3} \cdot \frac{(B+p)^2}{A}\right\} + \left\{A + \frac{2}{3} \cdot \frac{(B-q)^2}{A}\right\} = 2\left(A + \frac{2}{3} \cdot \frac{B^2}{A}\right)$ gibt, woraus sich leicht die Gleichung $(B+p)^2 + (B-q)^2 = 2B^2$ oder $\left(1+\frac{p}{B}\right)^2 + \left(1-\frac{q}{B}\right)^2 = 2$ ableiten lässt, welche mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von $\frac{p}{B}$ und $\frac{q}{B}$ den Werth $\underbrace{p = q}$ gibt, d. h. das Einsinken p des einen Hülfsbogens ist dem Aufsteigen q des andern gleich.

Werden noch in der Gleichung XI alle Glieder mit $\frac{2B}{A}\left(1+\frac{p}{B}\right)\left(1-\frac{q}{B}\right)$ multiplizirt, so ist auch $(P+Z)\left(1-\frac{q}{B}\right) = P\left(1+\frac{p}{B}\right) + \frac{2m \cdot B}{A}(2P+Z)\left(1+\frac{p}{B}-\frac{q}{B}\right)$. Wird hierin statt q der gefundene Werth p gesetzt, und die Gleichung gehörig reduzirt, so ergibt sich $\frac{p}{B} = \frac{Z}{2P+Z} - \frac{2m \cdot B}{A}$, und weil $b = \frac{7}{15}\,p$ gefunden wurde, so beträgt das wirkliche Einsinken des belasteten Brückenfeldes $\frac{b}{B} = \frac{7}{15} \cdot \frac{p}{B} = \frac{7}{15}\left(\frac{Z}{2P+Z} - \frac{2m \cdot B}{A}\right)$.

61 *

Fig. 11. Tab. 20. geben das Einsinken des mehr belasteten Brückenfeldes nach der unten gefundenen letzten Gleichung $b = \frac{7}{15} . 360 \left(\frac{1}{11} - \frac{2}{9} . \frac{3}{20} \right) = 9{,}7$ Zoll.

Die Verschiebung der Ketten auf den Rollen in C ergibt sich aus dem Unterschiede der ursprünglichen Bogenlänge B C in II und dem verlängerten Bogen B E C oder B′ C in VIII und beträgt daher $\frac{2}{3} \left(\frac{(B + p)^2}{A} - \frac{B^2}{A} \right)$ oder sehr nahe $\frac{4}{3} \cdot \frac{B}{A} \cdot p$ und weil $p = \frac{15}{7} \cdot b$, so ist die Verschiebung der Ketten auch $= \frac{20}{7} \cdot \frac{B}{A} \cdot b$.

Im obigen Beispiele war $\frac{B}{A} = \frac{3}{20}$ und $b = 9{,}7$ Zoll. Für diesen Fall würde daher die Verschiebung der Ketten $\frac{20}{7} \cdot \frac{3}{20} \cdot 9{,}7$ oder 4,2 Zoll betragen.

§. 431.

Wir wollen nunmehr zu der im vor. §. betrachteten und Fig. 11 dargestellten Brücke Fig. 12. eine vollkommen gleiche hinzufügen, wobei jedoch die mittlern an einander stossenden Kettenende nicht befestigt, sondern die Ketten bloss zusammengehängt sind (wie in Fig. 12 C N C′) und wollen die Grösse des Einsinkens untersuchen, wenn das mittlere Brückenfeld C C′ mit der zufälligen Last 2 Z oder jede Hälfte, wie C M oder C′ M mit Z beschwert wird. Durch die grössere Belastung des mittlern Brückenfeldes wird der mittlere Bogen C N C′ sich verlängern und das Brückenfeld herabsinken. Der herabgesenkte Bogen nehme die Gestalt C n C′ an, wobei sein Pfeil um die Grösse N n = p zunehme, also auf die Grösse M n = B + p herabsinkt. Hiedurch werden nothwendig die beiden äussern Bögen C B und C′ G, und zwar jeder um dieselbe Grösse verkürzt und vollkommen auf gleiche Art gespannt und gehoben werden. Wir wollen hier für die gespannten Bögen C B und C′ G ähnliche Hülfsbögen wie bei der einfachen Brücke des vorigen §. C B′ und C′ G′ mit der Eigenschaft substituiren, dass sie mit den zugehörigen gespannten Bögen gleiche Belastung, gleiche Längen und gleiche horizontale Spannkraft besitzen, und die Erhöhung ihrer Scheitel B B′ = q und G G′ = q′, also ihre Pfeile A B′ = B — q und F G′ = B — q′ setzen.

Bei den Untersuchungen der Kraftanstrengungen in dem Punkte C kommt aber von der einen Seite nur der herabgedrückte Bogen C n und von der andern Seite der substituirte Hülfsbogen C B′ in Betrachtung. Vergleichen wir also die Brückenhälfte A M mit der §. 430 Fig. 11 betrachteten Brücke, so stehen offenbar die Bögen C B′ und C n des gegenwärtigen Falles gegeneinander genau in denselben Beziehungen wie die Bögen C G′ und C B′ des früher betrachteten Falles. Es gilt also die dort geführte Rechnung auch für die Brückenhälfte A M, und wir erhalten also auch hier, wie dort zunächst p = q.

Die zweite Brückenhälfte M F ist aber in Bezug auf die Wirkungen mit der ersten A M identisch, daher sind auch hier die Resultate dieselben, und wir erhalten aus denselben Gründen, wie §. 430, p = q′.

Es ist sonach p = q = q′, d. h. das wirkliche Einsinken p des mittlern Bogens ist gleich dem Aufsteigen q oder q′ eines jeden der äussern Hülfsbögen.

§. 432.

In dem Ausdrucke für das Einsinken des mittlern Brückenfeldes durch die zufällige Belastung 2 Z zeigt das erste Glied $\frac{Z}{2P + Z} = \frac{2Z}{4P + 2Z}$, dass das Verhältniss des Einsin-

kens $\frac{p}{B}$ dem Verhältnisse der zufälligen Belastung 2 Z zum Gewichte der ganzen Brücke 4 P+2 Z proportional sey, welches auch daraus begreiflich ist, weil durch das Einsinken des einen Theiles eigentlich die ganze Brücke aus ihrer Stelle bewegt wird. Das zweite Glied $\frac{2m.B}{A}$ dieses Ausdruckes zeigt, weil es negativ ist, dass durch die Reibung die Grösse des Einsinkens in jedem Falle vermindert werde. Aus Versuchen, die an Rollen und Flaschenzügen gemacht wurden, und im V^ten Kapitel angeführt werden, ergab sich für die Grösse des Widerstandes der Reibung $\frac{1}{3}$ des Druckes; dieses Verhältniss wird noch durch das Verhältniss der Durchmesser der Rollen und ihrer Achsen vermindert; setzen wir dieses, wie bei der *Hammersmith*brücke, 3:1, so ist in unserer Gleichung $m = \frac{1}{9}$. Behalten wir nebstdem B = 30 Fuss = 360 Zoll, A = 200 Fuss und P = 5000 Ztr., so erhalten wir nach dem vorigen §. für die Grösse des Einsinkens mit Rücksicht auf Reibung

$\frac{p}{B} = \frac{Z}{10000 + Z} - \frac{1}{30}$. Aus dieser Gleichung können wir nunmehr diejenige zufällige Last Z bestimmen, bei welcher keine Verschiebung der Ketten und folglich auch kein Einsinken des mehr belasteten Brückenfeldes erfolgt; diess ist nämlich der Fall, wenn in der obigen Gleichung p = 0 gesetzt wird, woraus sich sodann sehr nahe Z = 345 Ztr., folglich die zufällige Belastung des ganzen Brückenfeldes 2 Z = 690 Ztr. ergibt, welche sonach gar kein Einsinken bewirken. Setzen wir aber die zufällige Belastung oder die Uiberwucht des mittleren Brückenfeldes 2 Z = 2.690, also Z = 690, so gibt die obige Gleichung die Einsenkung des belasteten Brückenfeldes p = 11,2 Zoll.

§. 433.

Die absolute Grösse des Einsinkens wird, wie die hierüber gemachten Berechnungen deutlich zeigen, vermindert:

1^tens Durch die Verminderung der Pfeilhöhe B, wodurch jedoch der Krümmungshalbmesser und folglich auch die horizontale Spannung H vergrössert wird.

2^tens Durch Vermehrung der Reibung oder durch Verminderung des Verhältnisses der Durchmesser der Rollen und ihrer Achsen, u. dgl. m.

Da jedoch der Reibungswiderstand ganz allein von dem Pfeiler und zwar nach horizontaler Richtung gehalten werden muss, so ist es nöthig den Steinen, woraus der Pfeiler konstruirt wird, eine solche Verbindung zu geben, dass keine Abschiebung der obern Quadersteinlagen über die darunter liegenden statt finden könne. Die Art, wie diess geschieht, ist §. 397 erklärt.

Bei dem gewöhnlichen Befahren der Brücken finden aber keine so bedeutende Uiberwuchten der Brückenfelder unter einander statt, und es gibt auch verschiedene Maassregeln, dieses zu verhüten; wenn man nämlich dafür sorgt, dass sich Menschen und andere Lasten nicht an einem Orte zu sehr anhäufen, sondern über die ganze Länge der Brücke vertheilen, wesshalb man auch den Eingang auf die Brücke enger zu machen pflegt, wodurch, wenn auch am Eingange ein Gedränge entsteht, Menschen und Lasten sich nachher auf der Brücke auf einen grössern Raum verbreiten, und so von selbst die Brücke gleichförmiger belasten. Ist aber die ganze Brücke gleichförmig und selbst bis zur grösst möglichen Belastung beschwert, so findet abermal ein vollkommenes Gleichgewicht und von keiner Seite eine Uiberwucht, folglich auch kein Verschieben der Ketten und kein an-

deres Einsinken statt, als dasjenige, welches der Veränderung der Wärmegrade, der Ausdehnungsfähigkeit und Elasticität des Eisens angemessen ist. Eine weitere Verminderung des Einsinkens der Brückenfelder, vorzüglich von einzelnen grössern Lastwägen und dergleichen wird auch dadurch bewirkt, dass man der Fahrbahn eine grössere Straffheit gibt, wodurch die Lasten auf eine grössere Fläche vertheilt werden. Dieses wird bei den gewöhnlichen Brücken durch einfache oder doppelte Endsbäume, gespannte Röste u. dgl. bewirkt. Bei der *Hammersmith*brücke sind zu demselben Zwecke die oben beschriebenen Spreng- oder Hängwerke angewendet, und diese sind bei den neuen französischen Brücken durch ihre Verdopplung verstärkt worden; diese Hängwerke fordern aber immer eine ausserordentliche Genauigkeit in der Ausführung.

§. 434.

Wir kommen nun zu dem Hauptgegenstande unserer Abhandlung, nämlich zur Auflösung der Frage, wie für eine gegebene Breite des Flusses die Maasse der Brücke und aller ihrer Bestandtheile verlässig zu bestimmen sind. Da hiebei keine Willkühr statt finden darf, so wollen wir die Bedingniss voraussetzen, dass der Brücke verhältnissmässig dieselbe Festigkeit gegeben werden solle, worüber die Erfahrung an den grössten oben erwähnten englischen Kettenbrücken sich bereits ausgesprochen hat.

Um diese Beantwortung mit mehr Deutlichkeit zu geben, wollen wir dieses sogleich in einem Beispiele grösserer Art zeigen, und die Breite des mit einer Brücke zu übersetzenden Flusses oder die Länge zwischen den beiden Uferpfeilern $= 125$ Klafter setzen, wie es bei der pag. 259 erwähnten, in Prag zu erbauenden Kettenbrücke der Fall war.

1tens Eintheilung.

Diese wird nach dem Beispiele der Hammersmithbrücke in 5 gleiche Theile getheilt, und jedem Seitenbogen 1 Theil oder 25 Klafter und dem mittlern Bogen 3 Theile oder $75° = 450$ Fuss beigemessen. Da jedoch die Ketten an beiden Ufern nicht an der Oberfläche, sondern unterhalb der Fahrbahn angehängt werden sollen, so wollen wir den Befestigungspunkt noch um die Hälfte von 25 oder um $12\frac{1}{2}$ Klftr. zurücksetzen. Dadurch erhält jeder Seitenbogen vom Pfeiler bis zu seiner Widerlage die Entfernung $37\frac{1}{2}$ Klftr., folglich beträgt die horizontale Länge zwischen beiden Befestigungspunkten $37\frac{1}{2} + 75 + 37\frac{1}{2} = 150$ Klftr.

2tens Bestimmung der Pfeilhöhe und der Länge der Ketten.

Bei den obengenannten engl. Brücken ist das Verhältniss des Pfeiles zur Spannweite wie $30:400$, demnach ist der Pfeil (x) für unsere Spannweite $= \frac{30 \cdot 450}{400} = 34$ Fuss sehr nahe. Mit dieser Pfeilhöhe findet man die zur Uiberspannung der Weite $2\,y = 450$ Fuss nöthige Länge der Ketten nach §. 425 Gleichung VI, $2s = 2y + \frac{4}{3}\frac{x^2}{y} = 450 + \frac{4}{3} \cdot \frac{34^2}{225} = 457$ Fuss sehr nahe.

3tens Bestimmung des Krümmungshalbmessers und der Länge der Hängestäbe.

Da die für Brücken oben berechnete Kettenlinie der Parabel sehr nahe kommt, so findet man aus der Gleichung $y^2 = 2r \cdot x$ den Krümmungshalbmesser im Scheitel $r = \frac{225^2}{2 \cdot 34} = 744$ Fuss. Nun lässt sich die Länge der Hängestäbe (x) nach der Gleichung $x = \frac{y^2}{2r} = \frac{y^2}{1488}$ sehr leicht berechnen, wozu wir bereits oben bei der *Menai*-Brücke ein Beispiel angeführt haben. Zu diesen berechneten Längen x kommt, wie es gleichfalls oben gezeigt wurde, die Erhöhung der Brückenbahn so wie nach der Zeichnung der Brücke die Höhe der Geländer, Stärke der Endsbäume, Höhe der Ketten übereinander etc. etc. noch zuzusetzen.

4tens Bestimmung der Stärke und des Gewichtes der Ketten.

Es sey die Querschnittsfläche aller Ketten, an welche die Fahrbahn gehängt werden soll, $= f$ Quad. Zoll. Da nach dem österr. Fussmaass 1 Kub. Zoll Eisen sehr nahe $\frac{1}{4}$ ℔ wiegt, so ist das Gewicht eines Kur. Fusses dieser Kettenstäbe $= \frac{12\,f}{4} = 3\,f$ ℔. Da jedoch die Kettenstäbe durch Verbindungsblätter, Bolzen,

Schrauben etc. verbunden werden, so können wir die daraus entstehende Gewichtsvermehrung nach demselben Verhältnisse wie bei der *Menai*- und *Hammersmith*brücke von 7 auf 12 berechnen, wornach das Gewicht eines Kur. Fusses der Ketten $g.f = \frac{12}{7} \cdot \frac{3f}{100}$ Zentner gefunden wird.

Zu diesem Gewichte müssen wir noch G.F das Gewicht eines Kur. Fusses der Brückenbahn und für den Fall der grössten Belastung noch die grösstmögliche zufällige Belastung hinzusetzen. Das Gewicht der Brückenbahn lässt sich leicht nach dem Zeichnungsentwurf für ihre Bauart und nach der Wahl der Bestandtheile (von Holz oder Eisen) berechnen; wir wollen annehmen, dass sich hieraus das Gewicht der Brückenbahn für jeden Kur. Fuss = 15 Ztr. ergeben habe. S. 312 wurde gezeigt, dass die grösste zufällige Belastung bei Brücken mit 30 Ztr. für 1 Quad. Klftr. oder für 36 Quad. Fuss anzuschlagen sey; wenn daher unsere Brücke eine Breite von 30 Fuss erhält, so entfällt hiernach die grösste zufällige Belastung für jeden Kur. Fuss mit 25 Ztr. Das Gewicht eines Kur. Fusses der Fahrbahn bei ihrer grössten Belastung ist daher $G.F = 15 + 25 = 40$ Ztr. Wir erhalten daher nach der oben aufgestellten Gleichung die Spannung der Kette oder die horizontale Zugkraft $H = (G.F + g.f)\, r = \left(40 + \frac{36\,f}{700}\right) 744$ Ztr.

Diese Kraft muss offenbar von der Festigkeit des Eisens in den Kettenstäben gewältigt werden. Nach den Seite 256 angeführten 17 Versuchen ist 54148 N. Oe. ℔ das Gewicht, wovon ein Stab von 1 Quad. Zoll zerrissen wird. Da jedoch der Fall des Zerreissens hier nicht statt finden darf, so haben die Baumeister der englischen Kettenbrücken die Festigkeit eines Quadratzolles nur mit dem 3ten Theile des grössten Kraftvermögens in Rechnung genommen, dagegen aber die Kettenstäbe einer vorläufigen Probe bis zu ⅖ desselben Kraftvermögens unterworfen, wie es oben gezeigt wurde.

Wenn wir demnach unserer Brücke die gleiche Sicherheit verschaffen wollen, so können wir von den angeführten 54148 ℔ nur den 3ten Theil oder die Festigkeit für ein Quad. Zoll nur mit 180 Ztr. in Anschlag nehmen.

Das Tragvermögen der Querschnittsfläche f wird daher 180.f Ztr. seyn. Setzen wir dieses Tragvermögen der Spannkraft der Kette gleich, so erhalten wir zur Bestimmung der Grösse f die Gleichung $180f = \left(40 + \frac{36}{700}\, f\right) 744$. Daraus ergibt sich die Querschnittsfläche sämmtlicher Kettenstäbe f = 210 Quad. Zoll. Wird nun jedem Kettenstabe, so wie bei der Hammersmithbrücke, ein Querschnitt von 5 Quad. Zoll gegeben, so sind 42 Stäbe zur Bildung der Ketten nothwendig, und jeder Stab ist bis zu einer Belastung von $\frac{2}{5} \cdot 5 \cdot 541 = 1082$ Ztr. zu probiren.

Das Gewicht der 457 Fuss langen Ketten beträgt $\frac{36}{700} \cdot 210 \cdot 457 = 4935{,}6$ Ztr. Die Ketten für die beiden Seitenbögen besitzen ein gleiches Gewicht.

Die Angabe und Berechnung der übrigen Eisenbestandtheile und ihres Gewichtes, so wie der Kostenanschlag für das Material und die Arbeit, welches bei jedem Baue vorkommt, muss bei jedem Bauverständigen als bekannt voraus gesetzt werden; es werden daher die angegebenen Daten hinreichen und jeden Baumeister in den Stand setzen, ohne Anstand einen Kostenanschlag über den Bau einer Kettenbrücke zu verfassen.

5tens Beweglichkeit der Brücke.

Die unvermeidlichen Veränderungen, denen die Kettenbrücken unterliegen, rühren her:

a) von der Elasticität des Eisens, b) von der Ausdehnung des Eisens durch Wärme, und c) von den darauf gebrachten ungleichen Belastungen.

a) Das elastische Kraftverhältniss des Eisens ist nach den S. 384 angeführten Versuchen 205080 bis 236300 N. Oe. Ztr. mithin im Mittel beiläufig 220000 Ztr. für 1 N. Oe. Quad. Zoll (nach *Tredgold* für englisches Maass 222500 engl. Ztr). Da nun die horizontale Zugkraft unserer Brücke bei dem unbelasteten Zustande 19200 Ztr. also für 1 Quad. Zoll 91 Ztr. und bei dem höchstbelasteten Zustande 37800 Ztr. also für ein Quad. Zoll 180 Ztr. beträgt, so ergibt sich das Ausdehnungsverhältniss $\frac{\alpha'}{L}$ im ersten Falle $\frac{91}{220000} = \frac{1}{2418}$ und im 2ten Falle $\frac{180}{220000} = \frac{1}{1222}$ der Länge. Die Ausdehnung der 457 Fuss langen Kette beträgt demnach für die unbelastete Brücke 2,3 Zoll und für die höchstbelastete 4,5 Zoll; wornach mithin die grösst mögliche zufällige Belastung eine Verlängerung des Bogens von 2,2 Zolle bewirkt. Diese Ver-

längerung des Bogens gibt nach der Gleichung (§. 428), $2{,}2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{34}{225}$ u eine Einsenkung in der Mitte $u = 5{,}5$ Zoll.

b) Die Längenänderung des Eisens durch den Einfluss der Wärme beträgt nach *Lavoisier* und *Laplace* für 80 Grad nach *Reaumur* 0,001235 der Länge. Nehmen wir daher für den Wärmeunterschied in unserm Klima 40 Grad *Reaumur* an, so beträgt die Veränderung der 457 Fuss langen Ketten 3,4 Zolle, welche eine Aenderung in der Höhe der Fahrbahn von $\frac{3}{8} \cdot \frac{225}{34} \cdot 3{,}4 = 8{,}4$ Zoll verursachen kann.

c) Für das Einsinken des Brückenfeldes durch zufällige Belastung wurde §. 430 die Gleichung $\frac{p}{B} = \frac{Z}{2P+Z} - 2m \cdot \frac{B}{A}$ gefunden.

Unsern Abmessungen zufolge beträgt das Gewicht des ganzen Brückenfeldes sammt Ketten etc. etc. $2P = 11686$ Ztr., $\frac{B}{A} = \frac{3}{20}$ und $B = 34$ Fuss $= 408$ Zoll, und wenn wir m wie oben $= \frac{1}{9}$ setzen, $2m\frac{B}{A} = \frac{1}{30}$. Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung und nehmen die Einsenkung $p = 0$, so findet man $Z = 403$ Ztr. Wenn daher das mittlere Brückenfeld mit $2Z = 806$ Ztr. belastet wird, während die beiden äussern Felder unbelastet bleiben, so findet noch gar kein Einsinken desselben Statt. Für eine doppelt so grosse Belastung mit 1612 Ztr., also für $Z = 806$ Ztr. gibt die obige Gleichung das Einsinken in der Mitte $p = 12{,}7$ Zoll.

§. 435.

In der Berechnung der Kettenkurve §. 425 wurde die Querschnittsfläche der Ketten im Scheitel $= f$ angenommen und ausser dem Scheitel $= \frac{f}{\mathrm{Cos}\,v}$ gefunden, wornach also die Ketten in der Nähe der Pfeiler stärker seyn müssen. In unserem Falle ist an den Pfeilern $\mathrm{tang}\,v = \frac{2B}{A} = \frac{2.34}{225} = 0{,}3022$, also $v = 16^0\,49^{\mathrm{Min.}}$ und $\frac{1}{\mathrm{Cos}\,v} = 1{,}0447$, mithin der Querschnitt der Ketten an den Pfeilern $= 1{,}0447 . f = 219{,}4$ Quad. Zoll. Uiber diesen Umstand pflegt man jedoch gewöhnlich aus dem Grunde hinaus zu gehen, weil die Ketten schon an und für sich 3^{mal} stärker gemacht wurden, als es zur grössten Belastung nothwendig ist.

Wenn aber die Ketten von der andern Seite des Pfeilers unter einem spitzigern Winkel ablaufen als vor demselben, so ist dieser Umstand um so mehr zu berücksichtigen, als bei einem sehr spitzigen Winkel die nöthige Verstärkung sehr bedeutend werden kann.
Fig. 13. Tab. 20. Es stelle A C die Richtung und zugleich die Grösse der Zugkraft der Ketten von der einen Seite vor, und AD eben so die Richtung und Zugkraft der Ketten von der andern Seite. Man konstruire über der Senkrechten AB das Parallelogramm ACBD, so wird sich die Zugkraft AD zur Zugkraft AC oder $\frac{H}{\mathrm{Cos}\,V}$ verhalten wie Sin CAB : Sin DAB $=$ Cos V : Cos W. Weil nun die Stärke der Ketten den Kräften AD und AC proportional seyn muss, so wird sich auch die Querschnittsfläche der Kette AD (F) zur Querschnittsfläche der Kette AC $\left(\frac{f}{\mathrm{Cos}\,V}\right)$ verhalten wie Cos V : Cos W. Hieraus folgt $F = \frac{f}{\mathrm{Cos}\,W}$, wornach für jeden gegebenen Winkel W, den nämlich die zweite Kette mit dem Horizonte macht, die nöthige Stärke F der Kette AD leicht berechnet werden kann.

V. Kapitel.

Widerstände der Reibung, Unbiegsamkeit der Seile und ihr Einfluss auf den Effekt der Maschinen.

§. 436.

Bei allen bisherigen Rechnungen haben wir angenommen, dass die Körper, welche sich auf oder mit einander bewegen, vollkommen glatt seyen, dass sonach bei dieser Bewegung kein neuer Widerstand eintritt, und die bewegten Körper bloss den Grundsätzen des statischen Gleichgewichtes folgen. Wir haben auf gleiche Weise angenommen, dass die Taue oder Seile, welche wir bei Maschinen verwenden, vollkommen biegsam seyen, demnach auch keinen besondern Widerstand verursachen, wenn sie z. B. um eine Rolle gewunden werden. Beide Voraussetzungen können jedoch für eine genaue Berechnung der Wirkung der Maschinen nicht angenommen werden; indem alle Körper, selbst wenn sie noch so glatt sind, bei ihrer Bewegung auf einander einen Widerstand verursachen, und auch alle Seile einen grössern oder geringern Grad von Unbiegsamkeit besitzen, zu deren Ueberwältigung ebenfalls eine Kraft erfordert wird.

Werden zwei Körper auf einander gelegt, und der eine auf dem andern fortgeschoben, so wird der Widerstand, welcher sich bei dieser Bewegung äussert, der Reibungswiderstand oder die Reibung genannt. Alle Körper, sie mögen noch so glatt seyn, zeigen mit bewaffnetem Auge betrachtet, immer noch kleine hervorstehende Theile und ähnliche Vertiefungen. Werden die Flächen zweier Körper über einander fortgeschoben, so legen sich die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern, und die Bewegung kann nicht anders vor sich gehen, als wenn diese Theile entweder abgebrochen und die Oberflächen abgeglättet werden, oder wenn die Körper darüber, als über eben so viele schiefe Flächen hinweg gehen. Dass der Widerstand, welcher auf diese Art entsteht, in manchen Fällen sehr bedeutend werden könne, leuchtet von selbst ein; da es aber keine Maschine gibt, bei welcher dieser Widerstand nicht einträte, bei manchen Maschinen aber, z. B. bei Schleif- und Polirwerken die Arbeit in der Ueberwältigung der Reibung besteht, so ergibt sich, wie nothwendig es sey, diesen Widerstand und die Gesetze, nach welchen sich die Reibung in den verschiedenen Fällen äussert, genau kennen zu lernen.

Die Wichtigkeit dieser Kenntniss war die Veranlassung, dass man sich schon in ältern Zeiten mit Aufsuchung der Reibungsgesetze beschäftigte, allein die gefundenen Resulsate waren nur im Kleinen richtig, im Grossen aber sehr abweichend. So hat *Musschenbroek* gefunden, dass der Widerstand der Reibung im Durchschnitte dem 3ten Theile des wechselseitigen Druckes der reibenden Körper gleichkommt; allein die Erfahrung

zeigte, dass Seeschiffe bei dem Herablassen vom Stappel über eine schiefe Fläche von selbst herablaufen, wenn dieselbe eine Neigung von 1 Zoll auf einen Fuss Länge hat. Nun ist nach §. 123 in diesem Falle bei einer schiefen Fläche $P : Q = h : l = 1 : 12$, demnach $P = \frac{Q}{12}$, d. h. die Reibung wird schon von dem 12ten Theile des Gewichtes überwältigt.

Amontons war (*Mem. de l' acad. des Sciences p. l' an* 1699) der erste, der über die Reibung sowohl, als auch über die Unbiegsamkeit der Seile Versuche angestellt, und sie bei den einfachen Maschinen in Rechnung zu bringen gesucht hat. Er entdeckte zuerst das Gesetz, dass die Reibung sich nicht nach der Grösse der Berührungsflächen, sondern allein nach der Grösse der Last, womit diese Flächen auf einander gedrückt werden, richte. *Musschenbroek* fand hiebei einige Abweichungen. *Camus* und *Desaguilliers* fanden, dass die Reibung kleiner wird, wenn die Berührungsflächen durch einen Stoss erschüttert werden; man schloss zwar daraus, dass die Reibung im Zustande der Bewegung nicht so gross seyn könne, als im Zustande der Ruhe; doch machten sie das eigentliche Verhältniss zwischen diesen zwei Gattungen der Reibung nicht ausfindig. *Segner* fand dagegen, dass die Reibung in etwas mit der Bewegung zunehme; seine Versuche sind aber nicht entscheidend genug; darum blieben *Euler*, *Bossut* u. a. bei dem Grundsatze des *Amontons*, dass nämlich die Reibung von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers nicht abhänge, wodurch die Rechnung viel Leichtigkeit erhält, und meistens hinreichend ist.

Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes veranlasste vor beiläufig 50 Jahren die Akademie der Wissenschaften in *Paris*, einen Preis für die beste Abhandlung über die Widerstände der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile auszusetzen. Dieser Preis wurde Hrn. *Coulomb* zuerkannt, welcher die Resultate seiner Versuche und die hierauf gegründete Theorie in folgender Abhandlung bekannt machte: *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des Cordages. Pièce qui a remporté le prix double de l' academie des sciences pour l' année* 1781. — *Mémoires de mathematique et de physique presentées a' l' académie. Tom. X. Paris* 1785, *p.* 161 — 332.

§. 437.

Coulomb betrachtet die Reibung in zweierlei Hinsicht, die gleitende oder drehende und die wälzende Reibung. Die erste entsteht, wenn zwei Körper auf einander fortgeschoben werden, z. B. wenn ein Schlitten oder eine Schleife auf der Erde fortgezogen wird, oder auch, wenn ein Körper sich um eine unbewegliche Achse dreht, und hiebei einen andern unbeweglichen Körper berührt, wie diess z. B bei der Bewegung der Zapfen in den Pfannen oder Lagern der Fall ist. Die wälzende Reibung tritt dagegen ein, wenn ein runder Körper z. B. ein Cylinder über eine Fläche gerollt wird.

Fig. 1. Tab. 27. Um die gleitende Reibung zu versuchen, liess Herr *Coulomb* einen sehr starken horizontalen Tisch verfertigen, welcher an dem Fussboden hinlänglich befestigt wurde. Auf der Platte dieses Tisches waren an beiden Enden Ansätze angebracht, zwi-

schen welchen verschiedene Hölzer, Metalle und andere Körper eingesetzt werden konnten. Auf diese Körper wurden andere von derselben oder von verschiedener Art aufgelegt und horizontal fortgezogen. Diese letztern wurden mit immer grösseren und grösseren Gewichten beschwert, vorne eine Schnur a f befestigt, über die Rolle E geleitet, und so lange Gewichte P zugelegt, bis eine möglichst gleichförmige Bewegung des Körpers erfolgte. Zu diesem Behufe war es nöthig, dem Körper vorläufig eine kleine Bewegung beizubringen und nachzusehen, ob die Bewegung durch das über die Rolle angehängte Gewicht P beschleunigt oder verzögert werde; im ersten Falle wurde P vermindert, im zweiten vergrössert, und der Versuch so lange wiederholt, bis eine gleichförmige Bewegung zu Stande kam. Auf diese Art war der Widerstand der Reibung gerade so gross, als das zur Bewegung an der Rolle erforderliche Gewicht P, und die Vergleichung dieses Gewichtes mit der Last, womit beide Körper an einander gedrückt wurden, gab das Verhältniss, in welchem der Druck der reibenden Körper gegen den Reibungswiderstand steht. Fig. 1. Tab. 27.

§. 438.

Nach vielfältigen Versuchen, welche Herr *Coulomb* mit gleichen und verschiedenartigen Körpern bei kleinen und grossen Belastungen anstellte, ergaben sich folgende Resultate:

I. Ueber die Reibung lässt sich so lange kein bestimmtes Gesetz angeben, als die Körper nicht vorläufig vollkommen abgeglättet oder polirt sind. Diess ist sehr einleuchtend; denn so lange die Ungleichheiten der Körper unbestimmt oder die Körper rauh sind, so muss auch der Widerstand, den sie verursachen, oder die Reibung unbestimmt bleiben. Diess ist aber nicht der Fall, wenn die Körper möglichst gut polirt sind. Weil aber ein jeder Körper einer eigenen Politur fähig ist, so liegt hierin der Grund, warum bei jedem Körper ein anderes Verhältniss der Reibung zum Drucke gefunden wird. Zur Politur gehört aber, dass die Körper nicht nur sehr geglättet und abgezogen werden, sondern diese möglichst glatt gemachten Körper müssen noch unter einem sehr grossen Drucke auf einander hin und her bewegt werden, wodurch sie dann eine Glätte und Dichtigkeit an ihrer Oberfläche erhalten, welche der Hobel oder die Feile nicht zu geben vermögen.

II. Nur bei einem Drucke von mehreren Zentnern lassen sich bestimmte Verhältnisse für den Widerstand der Reibung angeben. Sind nämlich die zu bewegenden Körper unbedeutend belastet, so zeigen theils die noch übrigen geringen Ungleichheiten, vorzüglich aber die wechselseitige Adhäsion der Körper einen Einfluss, der den Reibungswiderstand bedeutend vermehrt, wogegen bei grossen Belastungen dieser Einfluss als unbedeutend entfällt. Diess ist die Ursache, warum alle von *Musschenbroek*, *Amontons* und andern Physikern im Kleinen angestellten Versuche mit den Erfahrungen im Grossen nicht übereinstimmen, und warum von denselben die Reibung grösser angegeben wurde, als sie sich nach den Erfahrungen im Grossen zeigte. Hieraus folgt weiter, dass man keineswegs von dem Widerstande der Reibung bei einem kleinen Modelle auf jenen schliessen kann, welcher bei einer nach diesem Modelle im Grossen zu erbauenden Maschine statt finden wird, wenn man diess Verhältniss nach Maassgabe des senkrechten Druckes der gleichnamigen Theile auf einander anschlagen wollte.

III. Bei einem solchen Drucke von mehreren Zentnern zweier, an den reibenden Flächen gut polirter Körper ist der Widerstand der Reibung dem Drucke, welchen die Körper gegeneinander ausüben, sehr nahe proportional.

IV. Der Widerstand der Reibung ist bei einem und demselben Drucke und bei gleichartigen Körpern von dem Flächeninhalte oder der Grösse der sich reibenden Flächen unabhängig, oder die Vergrösserung des Widerstandes, welcher bei einer grössern Fläche entsteht, ist so unbedeutend, dass sie in der praktischen Mechanik füglich ausser Acht gelassen werden kann. In dieser Hinsicht ist es hinlänglich, den Widerstand der Reibung bei zwei, mit einem bedeutenden Drucke auf einander wirkenden Körpern bloss nach Maassgabe dieses senkrechten Druckes und der Gattung der sich reibenden Flächen zu bestimmen.

Dass der Widerstand der Reibung bei übrigens gleichen Umständen mit dem Flächeninhalte der sich reibenden Flächen nicht zunehme, wird dadurch begreiflich, weil wir uns bei der Reibung die Flächen mit einer Menge durch den senkrechten Druck dem Körper entgegengedrückter, in einander greifender hervorragender Theilchen vorstellen können, demnach auch bei einer grössern sich reibenden Fläche ein jeder einzelne hervorragende Theil weniger tief zwischen die Theile der andern Fläche gedrückt, und dadurch der Widerstand bei jedem einzelnen Theile in gleichem Maasse geringer wird, als die Anzahl der in Berührung kommenden Theile mit der Vergrösserung der Fläche wächst.

V. Die Reibung im Zustande der Ruhe ist bei denselben Körpern und gleichem Drucke grösser, als die Reibung im Zustande der Bewegung, d. h. soll ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt werden, so gehört hiezu eine grössere Kraft, als zur Unterhaltung der Bewegung derselben Körper über einander erfordert wird.

VI. Die gleitende Reibung ist grösser als die drehende, wir finden demnach bei der Bewegung der Zapfen in ihren Lagern eine etwas kleinere Reibung, als wenn dieselben Körper sich in horizontaler Richtung auf einander fortbewegen.

VII. Die verschiedenen Geschwindigkeiten, womit sich die Körper auf einander bewegen, haben auf die Grösse der Reibung keinen Einfluss, oder derselbe ist so gering, dass er bei unsern Berechnungen füglich ausser Acht gelassen werden kann. Diess Gesetz erklärt sich aus der Betrachtung, dass bei einer schnellern Bewegung zwar mehr Theile mit einander in Berührung kommen, jedoch wegen der kurzen Dauer dieser Berührung nicht so tief in einander dringen können, als es bei einer langsamen Bewegung der Fall ist.

§. 439.

Nachstehende Tabellen, welche vom Herrn *Eytelwein* in seinem bereits mehrmals genannten Handbuche der Statik fester Körper vorkommen, enthalten die Uebersicht der Resultate, welche *Coulomb* bei seinen Versuchen über Reibung gefunden hat.

Die erste Tabelle enthält nämlich die Versuche, welche über diejenige Reibung angestellt wurden, die sich äussert, wenn ein Körper aus der Ruhe in die Bewegung versetzt wird:

Schmiere.	Reibende Körper.	Nro. der Versuche.	Reibende Fläche. □ Zoll.	Druck in französ. Pfunden.	Reibung in französ. Pfunden.	Verhältniss der Reibung zum Drucke = 1.
Trocken ohne Schmiere.	Eichen auf Eichen =	1	432	74	30	0,405
		2	432	874	406	0,465
		3	432	2474	1116	0,451
		4	*	250	106	0,424
		5	*	450	186	0,413
		6	*	856	356	0,416
	Eichen auf Kiefern =	7	48	50	36	0,720
		8	48	450	284	0,631
		9	48	850	560	0,659
	Kiefern auf Kiefern =	10	48	50	27	0,540
		11	48	250	145	0,580
		12	48	850	480	0,565
	Ulmen auf Ulmen =	13	48	45	21	0,467
		14	48	450	207	0,460
		15	48	1650	756	0,458
	Eichen auf Eichen +	16	*	50	13	0,260
		17	*	1650	450	0,273
	Eisen auf Eichen =	18	45	53	10	0,189
		19	45	1650	340	0,206
	Eisen auf Eisen	20	45	51	15	0,294
		21	45	450	124	0,276
	Messing auf Eisen	22	45	50	14	0,280
		23	45	450	112	0,249
	Kupfer auf Eisen	24	*	47	8	0,170
		25	*	850	140	0,165
Talg.	Eichen auf Eichen	26	180	1650	622	0,377
		27	180	3250	1387	0,427
	Kupfer auf Eisen	28	45	50	7	0,140
		29	45	450	48	0,107
		30	45	1650	168	0,102
Abgenützter Talg.	Eichen auf Eichen =	31	648	2310	514	0,223
		32	648	5810	1535	0,264

Die Zeichen, welche sich in der Tabelle befinden, bedeuten:

* dass die reibende Fläche möglichst klein war,

= dass sich die Hölzer nach der Richtung der Fasern auf einander bewegten,

+ dass sich die Holzfasern kreuzten oder winkelrecht auf einander standen.

Zu den vorstehenden Versuchen ist noch zu bemerken, dass die Reibung in den meisten Fällen nach einer sehr kurzen Ruhezeit kleiner war, als wenn sich der Körper schon einige Zeit in Ruhe befand und dann in Bewegung gesetzt wurde. Die Angaben in der Tabelle beziehen sich auf den Fall, wo die Reibung beständig ist.

§. 440.

Nennen wir den winkelrechten Druck, welchen zwei polirte Körper gegen einander ausüben $= D$ und die Kraft, welche zur Bewegung erfordert wird $= R$, so wird R immer ein aliquoter oder m^ter Theil von D seyn, und wir erhalten zur Bestimmung der Reibung die allgemeine Gleichung $\underbrace{R = m \,.\, D}$. Es kommt demnach nur darauf an, die Grösse m oder den sogenannten Reibungscoeffizienten durch Versuche zu bestimmen, um die Grösse der Reibung in jedem Falle berechnen zu können.

Nachstehende Tabellen enthalten die Zusammenstellung der Werthe für den Reibungscoefficienten m, welche *Coulomb* für die Reibung bei dem Anfange der Bewegung eines Körpers und dann bei der fortgesetzten Bewegung desselben fand.

Reibende Körper.	Gleitende Reibung der Ruhe.											Gleitende Reibung der Bewegung.									
	Schiebende Reibung.						Drehende Reibung.					Schiebende Reibung.					Drehende Reibung.				
	Trocken =	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.	Trocken +	Trocken.	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.	Trocken =	Talg.	Theer.	Abgen. Talg.	Trocken +	Trocken.	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.
Eichen auf Eichen . . .	3/7	2/5			6/25	4/15						1/9	1/17	2/5	1/14	1/10					
Kiefern auf Kiefern . . .	7/12											1/6									
Ulmen auf Ulmen . . .	6/13											1/10									
Eichen auf Kiefern . . .	2/3											3/19									
Steineichen auf Guajac . .											1/16							1/26			1/17
Eisen auf Eisen	2/7											2/7	1/10								
Kupfer auf Eisen	3/17	1/10	2/13	1/6			2/11	1/11	3/20			1/6	1/11				2/13	2/23	1/8	3/23	2/15
Eisen auf Guajac							1/15	1/20									1/20	1/20			
Eisen auf Eichen	1/5					1/14						1/6	1/35		1/14	1/9					
Kupfer auf Eichen . . .	2/11											1/12	1/41		1/16						
Messing auf Eisen . . .	4/15																				
Steineichen auf Ulmen . .																		1/33			1/20
Buchsbaum auf Guajac . .																		1/23			1/14
Buchsbaum auf Ulmen . .																		1/29			1/20

§. 441.

Die angeführten tabellarischen Uebersichten führen zu folgenden Betrachtungen:

Die Reibung ist verschieden, wenn die Materien verschieden, wenn die Körper im Zustande der Ruhe oder in jenem der Bewegung begriffen, und wenn die Oberflächen derselben eingeschmiert sind, oder sich trocken auf einander bewegen. Vorzüglich bei Hölzern ist es der Fall, dass sie im Zustande der Bewegung einer weit geringeren Kraft bedürfen, als wenn sie aus dem Zustande der Ruhe in jenen der Bewegung versetzt werden sollen. *Coulomb* fand, dass man durch einen kleinen Stoss an den zu bewegenden Körper oder durch eine andere kleine Erschütterung die Bewegung weit leichter bewirken könne, als ohne denselben. Dagegen ist bei Metallen kein merklicher Unterschied, ob sie aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzt werden oder nur ihre Bewegung fortsetzen.

Werden zweckmässige Schmieren zwischen polirte Flächen gelegt, oder vielmehr diese Schmieren in die Körper eingerieben, so wird der Widerstand der Reibung bedeutend vermindert, indem die Schmiere die Höhlungen der polirten Flächen ausfüllt, und diese Flächen gleichsam in einiger Entfernung von einander hält, wodurch dann das wechselseitige Eingreifen der hervorragenden Theilchen beider Flächen in einander vermindert wird. Hiebei ist zu bemerken, dass ein vollkommen polirter Körper, wenn er frisch eingeschmirt wird, einen grössern Widerstand der Reibung äussert, als wenn diese Schmiere durch einen stärkern Druck eingerieben und diese Operation mehrmals wiederholt wird. Werden polirte Holzflächen unter einem beträchtlichen senkrechten Drucke auf einander bewegt, so braucht man zur Verminderung des Reibungswiderstandes die sogenannten harten Schmieren, als: Unschlitt, Seife, weil das Holz vom Oehle aufquillt, und daher die Erhöhungen und Vertiefungen statt sie zu bedecken, vielmehr grösser macht. Bei Metallen hingegen ist die anwendbarste Schmiere zur Verminderung des Widerstandes der Reibung das Oehl, jedoch muss diess ganz rein und frisch, und nicht ranzig oder oxydirt seyn, weil es sonst die Metalle angreift und diese rosten. Das Einschmieren der Hölzer und Metalle geschieht übrigens am vortheilhaftesten unter einem grossen Drucke und bei geschwinder Bewegung, weil in diesem Falle die Schmiere viel leichter eindringt. Wird eine sehr schmale oder schneidige Fläche auf einer andern Fläche fortgeschoben, so nützt die Schmiere weit weniger, als wenn die reibenden Flächen breit sind. Der vortheilhafteste Fall findet dann statt, wenn sich die Schmiere immer wieder erneuert, wie z. B. bei einem Wagenrade, wo die feste Achse bei der Umdrehung der Büchse fortwährend einen andern Punkt derselben berührt.

Da der Reibungswiderstand bei gleichartigen Körpern nach Ausweis der obigen Tabellen grösser ist, als wenn ungleichartige Körper sich auf einander bewegen, so wird von diesem Umstande ein vortheilhafter Gebrauch bei Maschinen gemacht, indem wir z. B. statt eiserne Zapfen in eisernen Lagern umdrehen zu lassen, zu den Lagern lieber Messing oder eine andere Metallkomposition verwenden. Laufen stählerne Zapfen in kupfernen Pfannen, so ist die Reibung geringer, als wenn die Pfannen auch aus Stahl bestehen. Bei Kupfer auf Eisen ist der Reibungscoefficient bei der drehenden Reibung $\frac{2}{23}$; läuft aber Eisen auf einem

harten Holze, z. B. auf Guajac, so ist dieser Coeffizient nur $\frac{1}{20}$. Diess ist ein Grund, warum man bei dem Eingriffe der Kämme oder Zähne in die Getriebe häufig die letztern von Eisen, die erstern aber von Holz macht. Ein zweiter Grund hievon liegt noch in dem Umstande, weil die Getriebe bei einem Rade mit mehr Zähnen öfter in Berührung kommen, als jeder Zahn für sich; z. B. wenn das Getriebe 6 Triebstöcke und das Rad 72 Zähne hat, so wird bei einer Umdrehung jeder Triebstock 12mal in Berührung kommen, während diess bei einem Zahne nur einmal statt findet. In den englischen Maschinenwerken sieht man häufig Räder von Gusseisen, in deren Oberflächen Oeffnungen vorhanden sind, in welche die hölzernen Kämme oder Zähne eingesetzt wurden, die sodann in ein eisernes Getriebe eingreifen. Aus demselben Grunde werden bei den Uhren die Räder von Messing und die Getriebe von Stahl verfertigt, und da die Reibung im Allgemeinen desto geringer ist, je härter die Körper und einer je grössern Politur sie fähig sind, so lässt man in astronomischen Uhren glasharte stählerne Zapfen in Edelsteinen laufen.

Der Umstand, dass die Reibung von der Geschwindigkeit, womit sich die Körper auf einander bewegen, nicht abhängt, hat in den letztern Jahren in England zu einer Reihe von Versuchen geführt, welche gezeigt haben, dass bei einer möglichst vollkommenen Eisenbahn, wobei die Verbindungen der Schienen mit aller Sorgfalt zusammengepasst und das gehörige Niveau beobachtet ist, der Widerstand bei grösserer und kleinerer Geschwindigkeit sich gleich oder beinahe derselbe bleibt. Diess gab die Veranlassung zu der ausserordentlichen Schnelligkeit, womit man gegenwärtig die Beförderung der Reisenden auf Eisenbahnen in England einleitet, wovon wir bereits S. 10 eine Erwähnung gemacht haben.

§. 442.

Fig. 2. Tab. 27. Zur Bestimmung der Grösse der **wälzenden Reibung** machte Herr *Coulomb* abermals eine Reihe von Versuchen. Er legte nämlich auf zwei wagerechte, an ihrer Oberfläche vollkommen glatte Unterlagen eine ebenfalls vollkommen glatte und runde Walze, über welche ein sehr biegsamer Faden ging, dessen beide Enden mit gleichen Gewichten D belastet wurden. Zu einem dieser Gewichte wurden nun so lange kleine Gewichte zugelegt, bis eine gleichförmige Bewegung der Walze erfolgte. Auf diese Weise erhielt er nachstehende Resultate:

Walzen von Guajac auf Unterlagen von Eichenholz.			Walzen von Ulmen auf Unterlagen von Eichenholz.		
Gesammte Belastung der Walze.	Gewicht R zur Ueberwältigung der Reibung.		Gesammte Belastung.	Gewicht R zur Ueberwältigung der Reibung.	
	Durchmesser der Walze 2 franz. Zoll.	Durchmesser der Walze 6 franz. Zoll.		Durchmesser der Walze 6 franz. Zoll.	Durchmesser der Walze 12 franz. Zoll.
100 franz. Pfund	1,6 franz. Pf.	0,6 franz. Pf.			
500 — —	9,4 — —	3,0 — —	1000 franz. Pfund	10 franz. Pfund	5 franz. Pfund
1000 — —	18,0 — —	6,0 — —			

Aus diesen Versuchen ersieht man, dass der Reibungswiderstand bei der wälzenden oder rollenden Bewegung sich gerade wie die Belastung, und umgekehrt wie der Halbmesser der Walzen verhält, wenn die Körper von gleicher Materie sind. Bei den Walzen von Guajac mit 6 Zoll Durchmesser war nämlich bei der Belastung von 100 ℔ die Reibung = 0,6 ℔, wogegen bei 1000 ℔ oder der zehnfachen Belastung die Reibung bei denselben Walzen auch 10^{mal} so viel, oder 6 ℔ betrug. Bei gleicher Belastung von 1000 ℔ betrug die Reibung bei der zweizölligen Walze 18 ℔, bei der sechszölligen Walze hingegen 6 ℔. Bezeichnen wir daher die Belastung der Walze mit Q, ihren Durchmesser mit d und die Reibung mit R, so ist $R = \frac{m' \cdot Q}{d}$, wo m' durch Versuche zu bestimmen ist. Aus den angeführten Versuchen folgt:

bei Walzen von Guajac, die auf Eichenholz laufen, $R = \frac{0{,}018 \cdot Q}{d} = \frac{Q}{56 \cdot d}$,

bei Walzen von Ulmen, die auf Eichenholz laufen, $R = \frac{0{,}03 \cdot Q}{d} = \frac{Q}{33 \cdot d}$,

wobei aber zu bemerken ist, dass bei dem Gebrauche dieser Formeln Q in französischen Pfunden und d in französischen Zollen gesetzt werden muss.

Diese Versuche zeigen, dass die Reibung weit kleiner ist, wenn sich dieselben Körper auf einer Ebene fortwälzen, als wenn sie übereinander gleiten. In dieser Hinsicht ist es vortheilhafter, Körper übereinander zu wälzen, und kann diess nicht geschehen, sie aufeinander drehen zu lassen, statt sie in paralleler Richtung aufeinander fortzuziehen. Es ist demnach auch vortheilhafter, die Wellzapfen, statt sie, wie es gewöhnlich geschieht, in einer Vertiefung oder Pfanne laufen zu lassen, auf eine wagerechte Unterlage zu legen, und diesem Zapfen zwei kleine bewegliche Räder, sogenannte Frictionsräder unterzulegen, wodurch, wie wir später sehen werden, die Reibung von der Oberfläche des stärkern Wellzapfens auf die Oberfläche der schwächern Frictionsräder übertragen, und bedeutend vermindert wird. Aus demselben Grunde hat man schon seit langer Zeit versucht, Frictionskugeln oder kleine Walzen in den Naben der Wagenräder anzubringen, auf welchen nunmehr die eisernen Achsen laufen.

Wir haben hinsichtlich der Reibung noch die allgemeine Bemerkung beizufügen, dass die Resultate der angeführten Versuche nur als solche Werthe anzusehen seyen, wie sie *Coulomb* für die von ihm versuchten Körper gefunden hat. Da aber alle Hölzer, Metalle etc. mehr und minder von einander verschieden sind, so ist es einleuchtend, dass sich auch über ihre Reibung keine allgemeine Bestimmung festsetzen lasse, demnach auch hier, wie in allen andern Fällen, der Effekt der Maschine nur durch eigene Versuche ganz genau bestimmt werden kann.

§. 443.

Ein zweiter Widerstand, welcher häufig bei Maschinen vorkommt, ist die Unbiegsamkeit der Taue, Seile oder Stricke. Wenn man ein Seil mit der Hand um irgend einen Körper biegen oder wickeln will, so findet man, dass hiezu eine um so grössere Kraft erfordert wird, je kleiner der Körper ist, um den man das

Seil windet, je grösser die Spannung des Seiles ist, je dicker das zu biegende Seil, und je neuer oder steifer dasselbe ist. Bei dem Maschinenwesen äussert sich diese Unbiegsamkeit vorzüglich bei den Rollen oder Cylindern, um welche Seile gewickelt werden. Um den Grad der Unbiegsamkeit der Seile durch einen Versuch zu bestimmen, kann man sich der von *Amontons* angegebenen Vorrichtung bedienen. Hiebei
Fig. 3. Tab. 27. wird das zu untersuchende Seil g f f′ g′ um den Cylinder D gewunden, und an seinen Enden mit dem Gewichte G belastet. Zur Bewirkung der Bewegung des Cylinders D werden so lange Gewichte P zugelegt, bis dieselbe gleichförmig erfolgt. Es ist offenbar, dass bei einer vollkommenen Biegsamkeit des Seiles der Cylinder D sogleich herabrollen müsste; demnach wird das Gewicht dieses Cylinders sammt dem angehängten Gewichte P — p die Grösse der Unbiegsamkeit der Seile für die vorhandene Spannung G des Seiles, den Durchmesser D des Cylinders und die Dicke des Seiles δ geben.

Zu gleichem Zwecke bediente sich *Coulomb* mehrerer Cylinder, die um ihre Achse beweglich waren. Die Achsen dieser Cylinder lagen in Pfannen, Seile von verschiedenen Durchmessern wurden um sie geschlungen, und an beiden Enden gleiche Gewichte angehängt. Zu einem dieser Gewichte wurde so lange zugelegt, bis die Bewegung gleichförmig blieb. Weil sich aber hiebei auch bei dünnen Achsen eine Reibung äusserte, so wurde ihr Einfluss zuerst bestimmt, und zu dieser Absicht an einer sehr dünnen, seidenen Schnur von beiden Seiten Gewichte angehängt, und aus der Grösse derselben das Verhältniss der Reibung zu den angehängten Gewichten bestimmt. Bei dem Gebrauche der Seile wurde nun von dem erforderlichen Zulagsgewichte die Reibung abgeschlagen, und der Ueberrest der Unbiegsamkeit der gebrauchten Seile beigemessen.

§. 444.

Durch solche Versuche bestimmte Herr *Coulomb* den Widerstand der Seile, Stricke, Schnüre nach ihrer verschiedenen Qualität, Dicke und Spannung und nach dem verschiedenen Durchmesser des Cylinders, um welchen diese Seile gewunden wurden. Seine mit dem Apparate von *Amontons* gemachten Erfahrungen gaben folgende Tabelle zur Bestimmung der Unbiegsamkeit der Seile, die nicht gepicht waren.

Gewichte, welche die Seile spannen, G	Seil Nro. 1, von 6 Fäden. 12¼ Linien im Umfange			Seil Nro. 2 von 15 Fäden. 20 Linien im Umfange			Seil Nro. 3 von 30 Fäden. 28 Linien im Umfange		
	Durchmesser d. Walzen.			Durchmesser d. Walzen.			Durchmesser d. Walzen.		
	1 Zoll	2 Zoll	4 Zoll	1 Zoll	2 Zoll	4 Zoll	2 Zoll	4 Zoll	6 Zoll.
℔.	℔.	℔.	℔.	℔.	℔.	℔.	℔.	℔.	℔.
25	2,0	.	.	7,0	3,2	1,7	11,0	5,0	.
125	11,0	4,0	.	22,0	9,0	5,0	21,0	8,5	.
225	17,0	6,5	.	30,0	17,0	7,0	29,0	14,0	.
425	31,0	12,0	5,7	65,0	31,0	13,0	47,0	23,0	.
625	43,0	15,0	7,2	92,0	41,0	16,7	67,0	31,0	.
1025	.	.	11,0	.	.	27,0	.	50,0	34,0

Diese Tafel ist das Resultat einer langen und mühsamen Arbeit, allein ungeachtet aller Sorge, die man für ihre Genauigkeit angewendet hat, gehen diese Erfahrungen doch nicht vollkommen regelmässig; sie sind aber doch hinreichend, um daraus zu schliessen, dass die Kräfte, welche zur Biegung der Seile nöthig sind, sich gerade wie die Spannungen der Seile und umgekehrt wie die Durchmesser der Walzen verhalten, wie schon *Amontons* und *Dessaguliers* gefunden haben. Das Letzte ist wenigstens für grössere Walzen richtig, die wir in der Ausübung häufig gebrauchen. Allein diese Kräfte sind nicht, wie diese zwei Physiker fanden, in geradem Verhältnisse der Dicke der Seile, denn wenn wir die obigen drei Seile bei der Aufwindung um dieselbe Walze von 4 Zoll unter dem nämlichen angehängten Gewichte von 625 Pfund vergleichen, so ist die Kraft für das Seil

Nro. 1, von 6 Fäden, 12½ Linie im Umkreise 7,2 ℔.
„ 2, „ 15 „ 20 „ „ „ 16,7 „
„ 3, „ 30 „ 28 „ „ „ 31,0 „

Die letzten Zahlen 7,2 dann 16,7 und 31,0 verhalten sich nicht, wie 12½ : 20 : 28, sondern beinahe wie die Anzahl der Fäden 6 : 15 : 30.

Weiter sieht man aus den obigen Versuchen, dass sich die Unbiegsamkeit beinahe wie das Quadrat der Durchmesser verhält. Setzen wir allgemein die Unbiegsamkeit der Function des Umkreises mit dem Exponenten m proportional, so gibt die Vergleichung

von Nro. 3 mit Nro. 1 die Proportion $31{,}0 : 7{,}2 = 28^m : 12{,}5^m$ oder $m = \frac{\log . {}^{310}/_{72}}{\log . {}^{28}/_{12,5}} = 1{,}8$.

„ „ 2 „ „ 1 „ „ $16{,}7 : 7{,}2 = 20^m : 12{,}5^m$ oder $m = \frac{\log . {}^{167}/_{72}}{\log . {}^{20}/_{12,5}} = 1{,}8$.

„ „ 3 „ „ 2 „ „ $31{,}0 : 16{,}7 = 28^m : 20^m$ oder $m = \frac{\log . {}^{310}/_{167}}{\log . {}^{28}/_{20}} = 1{,}8$.

Hieraus ersehen wir, dass sich die Unbiegsamkeit beinahe wie das Quadrat der Durchmesser verhält; jedoch scheint der Werth von m nicht beständig zu seyn, sondern für ganz neue Seile ist m = 2, für mehr gebrauchte m = 1,5 und für sehr dünne und lockere ist nach *Amontons* m = 1. *Coulomb* fand m nie kleiner als 1,4.

Die Unbiegsamkeit ist ebenfalls nicht dem angehängten Gewichte allein proportional. In der 3ten Versuchsreihe brauchte das Seil von 30 Fäden über die Rolle von 2 Zoll im Durchmesser, 11 Pfund bei dem angehängten Gewichte von 25 ℔, und 67 ℔ bei angehängten 625 ℔. Ziehen wir 11 von 67 ab, so kommen 56 ℔ auf 600 angehängte Pfund, und daher auf jeden Zentner 9,3 ℔. Diess würde für 25 ℔ nur 2,3 ℔ geben, wogegen 11 ℔ nach dem Versuche erfordert wurden; die Unbiegsamkeit war daher um 8,7 ℔ grösser. Wenn wir aber die Unbiegsamkeit mit 9,3 ℔ für jeden Zentner des angehängten Gewichtes berechnen, und durchaus 8,7 ℔ zugeben, so erhalten wir sehr nahe die nämlichen Zahlen, welche in der 3ten Versuchsreihe der obigen Tabelle angeführt sind. Z. B. bei der Belastung von 225 ℔ haben wir $2{,}25 . 9{,}3 = 20{,}9$ und wird hiezu die beständige Zahl 8,7 addirt, so erhalten wir 29,6 ℔, wogegen in der Tabelle 29,0 ℔ erscheinen. Hieraus ersehen wir nun, dass die 8,7 ℔ der natürlichen Spannung zugeschrieben werden müssen, welche alle Fiebern des Seils bei ihrer Zusammendrehung

erhalten; wird nämlich ein Seil gespannt, so haben alle Fiebern nicht bloss das angehängte Gewicht, sondern auch ihre natürliche Spannung auszuhalten, und die Elasticität derselben ist der Summe von beiden proportional. Diese Grösse 8,7 ℔ ist daher nach Verschiedenheit der Zusammendrehung auch verschieden, nur ist hiebei noch zu merken, dass bei den Versuchen 2 Seile auf einmal umgebogen wurden, demnach für ein Seil nur die Hälfte von 8,7 ℔ d. i. nur 4,4 ℔ gehören.

§. 445.

Nennen wir den Durchmesser der Walze = d, das angehängte Gewicht mit Einschluss des eigenen Gewichts der Walze = G, den Umkreis des Seiles = K, so ist die Unbiegsamkeit des Seiles in Pfunden $= \left(5 + \frac{2}{10} G\right) \frac{1''}{d''} \left(\frac{K}{28}\right)^{3/2}$. Mittelst dieser Formel erhalten wir für die obigen Versuche, wobei aber wegen des doppelten Seiles 10 statt 5 gesetzt worden, folgende Tabelle:

Gewichte.	Seil Nro. 1.						Seil Nro. 2.						Seil Nro. 3.					
	1 Zoll		2 Zoll		4 Zoll		1 Zoll		2 Zoll		4 Zoll		2 Zoll		4 Zoll		6 Zoll	
	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.	Rechnung.	Verbesserung.
25	4,5	−2,5	.	.	.	.	9,1	− 2,1	4,5	−1,3	2,3	−0,6	7,5	+3,5	3,8	+1,2	.	.
125	10,4	+0,6	5,2	−1,2	.	.	21,1	+ 0,9	10,6	−1,6	5,3	−0,3	17,5	+3,5	8,8	−0,3	.	.
225	16,4	+0,6	8,2	−1,7	.	.	33,2	− 3,2	16,6	+0,4	8,3	−1,3	27,5	+1,5	13,8	+0,2	.	.
425	28,3	+2,7	14,2	−2,2	7,1	−1,4	57,3	+ 7,7	28,7	+2,3	14,3	−1,3	47,5	−0,5	23,8	−0,8	.	.
625	40,3	+2,7	20,1	−5,1	10,1	−2,9	81,5	+10,5	40,7	+0,3	20,4	−3,7	67,5	−0,5	33,8	−2,8	.	.
1025	.	.	.	.	16,0	−5,0	.	.	.	.	32,4	−5,4	.	.	53,8	−3,8	35,8	−1,8

Herr *Coulomb* machte noch mehrere andere Versuche, die wir ihrer Weitläufigkeit wegen nicht anführen. Er fand auf diese Weise, dass die Unbiegsamkeit getheerter Seile den nämlichen Gesetzen folgt, nur ist sie um ⅙ grösser, d. h. die Unbiegsamkeit der trockenen Seile verhält sich zur Unbiegsamkeit der getheerten, wie 6:7. Alte, mit Theer bestrichene Seile bleiben eben so unbiegsam, als wenn sie neu sind, weil die Fäden des Hanfes zwar etwas nachgeben, aber der Theer dafür um so fester und härter wird. Die angeführten Versuche wurden im Winter bei 5 bis 6 Grad nach *Reaumur* angestellt und man fand, dass die Kälte vorzüglich bei dicken Seilen die Unbiegsamkeit vermehrt. Das Seil von 15 Fäden wurde bei einer Kälte von 4 Grad unter dem Gefrierpunkte untersucht und man fand die Unbiegsamkeit um ⅙ grösser.

§. 446.

Wenn ein Seil über eine Scheibe gezogen und an beiden Enden gleich viel belastet wird, so steht es im Zustande der Ruhe zu beiden Seiten gleich weit ab. Bewegt sich aber die Scheibe, d. h. zieht P die Last Q hinauf, so muss das Seil von k bis o erst gebogen werden, und wird desshalb von der Scheibe um e k abstehen. Von der andern Seite aber wickelt sich das schon gebogene Seil ab, und legt sich um etwas gegen die Rolle hinein; das Seil nimmt demnach die Lage Fig. 5 ein. Es ist nun zu berechnen, welchen Einfluss diess Abstehen des Seiles verursacht. Ziehen wir von der Mitte des Seiles die Vertikalen A k und B j, dann durch die Mitte des Seiles einen Kreis, und bezeichnen den Halbmesser der Scheibe mit a, den Durchmesser des Seiles aber mit δ, so ist Fig. 4. Tab. 27. Fig. 5.

$P \cdot cj = Q \cdot ck$ oder $P\left(a + \frac{\delta}{2} - fj\right) = Q\left(a + \frac{\delta}{2} + ek\right)$. Wir sehen hieraus, dass die Unbiegsamkeit der Seile den Hebelsarm der Kraft P um die Grösse f j vermindert, und dagegen den Hebelsarm der Last Q um die Grösse e k vermehrt, demnach zur Ueberwältigung der Last eine grössere Kraft erfordert wird, oder dass P grösser als Q seyn muss. Nennen wir daher die Kraft auf der einen Seite $= Q + p$, so ist $(Q + p)\left(a + \frac{\delta}{2} - fj\right) = Q\left(a + \frac{\delta}{2} + ek\right)$,

woraus $p = \frac{Q \cdot (ek + fj)}{a + \frac{\delta}{2} - fj}$ die Grösse des Widerstandes, der von der Unbiegsamkeit der Seile herrührt.

Wir sehen hieraus, dass der Widerstand um so grösser wird:

1[tens] Je grösser die Last Q ist,

2[tens] Je kleiner der mittlere Halbmesser $a + \frac{\delta}{2}$ ist, und

3[tens] Je grösser die Summe der Abstände $ek + fj$ ist. Diese Abstände werden aber um so grösser, je dicker die Seile und je steifer sie sind, dann je kleiner das angehängte Gewicht ist. Diess Letztere steht der Bemerkung, dass der Abstand mit der Last zunimmt, offenbar entgegen; wir sehen daher, dass es eigentlich nur auf die Differenz zwischen der angehängten Last und der Steifheit oder Elastizität des Seiles ankommt. Die kleine Grösse f j kann im Nenner ohne Anstand gegen $a + \frac{\delta}{2}$ vernachlässigt werden.

Da die Steifheit der Seile für jedes Materiale, den Grad der Drehung verschieden ist, so sieht man, dass sich hierüber keine allgemeine Regel angeben lässt, und dass demnach auch aus der, nach den Erfahrungen von *Coulomb* §. 445 abgeleiteten Formel, wo auf die Differenz zwischen der Elastizität und der angehängten Last keine Rücksicht genommen wurde, zu keiner allgemeinen Vorschrift dienen könne. Man nimmt in dieser Hinsicht folgende Erfahrung bei dem gewöhnlichen Voranschlage der Maschinen an:

Es sey der Durchmesser eines Seiles oder einer Schnur $= \delta$, so beträgt der Abstand $e\,k + f\,j$ bei neuen Seilen gewöhnlich $\frac{1}{2}\,\delta$, bei einem etwas gebrauchten $\frac{1}{3}\,\delta$ und bei einem schon oft gebrauchten oder auch schlappen Seile $\frac{1}{4}\delta$ bis $\frac{1}{5}\delta$. Man wird demnach in jedem Falle den entsprechenden Coeffizienten, welcher von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{5}$ varirt, zu wählen haben. Bezeichnen wir aber diesen Coeffizienten allgemein mit n, so beträgt $n\,.\,\delta$ die Grösse des Abstandes oder den Raum, um welchen der Hebelsarm derjenigen Kraft vergrössert wird, bei welcher sich das Seil erst aufwinden muss.

§. 447.

Fig. 6. Tab. 27. Da wir durch das bisher Angeführte in Stand gesetzt sind, den Widerstand der Reibung und der Unbiegsamkeit der Seile in Rechnung zu nehmen, so bleibt nur noch das Verfahren übrig, die Grösse des Reibungscoeffizienten m, und den Abstand des Seiles $n\,.\,\delta$ bei einer vorkommenden Maschine zu finden. Hiezu dient das bereits §. 443 angedeutete, von *Coulomb* angewandte Verfahren. Wäre z. B. bei einer Scheibe oder einem Cylinder m und $n\,.\,\delta$ zu bestimmen, so nehme man zuerst eine seidene, sehr biegsame Schnur, und hänge beiderseits Gewichte an, bis Gleichgewicht erfolgt. Legt man nun noch zu dem einen Gewichte so lange zu, bis eine gleichförmige Bewegung eintritt, so ist das Moment dieses vermehrten Gewichtes $P\,.\,a =$ dem Momente der Last $Q\,.\,a +$ dem Momente der Reibung. Der Druck auf den Zapfen ist die Last Q, die Kraft P und das Gewicht der Maschine M, mithin $Q + P + M$, daher ist der Widerstand der Reibung $= m\,(Q + P + M)$, und da er an der Peripherie des Zapfens geschieht, also den Halbmesser e des Zapfens zum Hebelsarme hat, so ist sein Moment $m\,(Q + P + M)\,e$. Wir erhalten demnach die Gleichung

$P\,.\,a = Q\,.\,a + m\,.\,e\,(Q + P + M)$, woraus man den Reibungs-Coeffizienten

$m = \dfrac{P\,.\,a - Q\,.\,a}{e\,(Q + P + M)}$ findet.

Ist nun der Reibungs-Coeffizient bekannt, so lässt sich durch einen ähnlichen Versuch auch die Grösse $n\,.\,\delta$ für ein gegebenes Seil bestimmen. Man wickelt nämlich statt jener seidenen Schnur das gegebene Seil um den Cylinder und sucht abermals die Kraft P', welche die Last Q gleichförmig zu bewegen im Stande ist. Da das neue Seil um $n\,.\,\delta$ abstehen wird, so ist das Moment der Last $Q\,(a + n\,.\,\delta)$, jenes der Kraft ist

$P'\,.\,a = Q\,(a + n\,.\,\delta) + m\,.\,e\,(Q + P' + M)$, woraus

$n\,.\,\delta = \dfrac{P'\,.\,a - Q\,.\,a - m\,.\,e\,(Q + P' + M)}{Q}$ gefunden wird.

Beispiel. Hätten wir für den ersten Fall die Last $Q = 20$ ℔, $P = 20{,}5$ ℔, $a = 4$ Zoll, $e = \frac{1}{4}$ Zoll und das Gewicht $M = 15{,}5$ ℔ gefunden, so wäre

$m = \dfrac{20{,}5\,.\,4 - 20\,.\,4}{\frac{1}{4}\,(20 + 20{,}5 + 15{,}5)} = \dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$, und wäre im zweiten Falle die Last Q abermals 20 ℔, das Gewicht der Maschine aber wegen des schweren Seiles $M = 18$ ℔, ferner $a = 4$ Zoll, $e = \frac{1}{4}$ Zoll und die Kraft $P' = 21$ ℔, so ergibt sich die Unbiegsamkeit $n\,.\,\delta = \dfrac{21\,.\,4 - 20\,.\,4 - \frac{1}{7}\,.\,\frac{1}{4}\,(20 + 21 + 18)}{20}$

$= \dfrac{53}{560} = \dfrac{1}{10{,}6}$ Zoll.

§. 448.

Bei dem Hebel findet eine so geringe Reibung statt, dass man sie in den meisten Fällen ohne Anstand vernachlässigen kann.

Dasselbe betrifft die Krämer- oder gleicharmige Wage, wenn die Achse derselben so wie bei dem Rade an der Welle in eine Pfanne gelegt wird. Man berechnet in diesem Falle die Reibung auf folgende Art. Es sey der Arm $Ae = eB = a$, der Halbmesser der Achse $= e$ und ein jedes angehängte Gewicht $= P$. Um die Reibung zu überwältigen, müsse zu P noch p gelegt werden, ohne das Gleichgewicht zu stören. In diesem Falle hat die Achse e das Gewicht $2P + p$ zu tragen und hieraus entsteht bei i die Reibung $m(2P + p)$, welche sich der Bewegung des Wagebalkens um den Mittelpunkt e entgegensetzt. Das Moment der Reibung ist demnach $= m.e(2P + p)$, und weil dieses Moment dem Zulagsgewichte p am Hebelsarme a das Gleichgewicht hält, so ist $m.e(2P + p) = a.p$, woraus $p = \frac{2m.e.P}{a - m.e}$ folgt. Gewöhnlich kann $m.e$ als ein Produkt zweier kleinen Brüche gegen a vernachlässigt werden, und dann ist $p = \frac{2m.e.P}{a}$. Fig. 7. Tab. 27.

Beispiel. Es sey $P = 200$ ℔ und $\frac{e}{a} = \frac{1}{100}$, m für Stahl auf Eisen $= \frac{1}{10}$, so ist $p = 0{,}4$ ℔; die Wage wäre also in diesem Falle bis auf 0,4 ℔ über das Gleichgewicht oder bis auf 0,8 ℔ unzuverlässig.

Für die römische oder Schnellwage sey das ganze Gewicht in A sammt dem zur Reibung erforderlichen Antheile $= P'$, die abzuwägende Last in $B = Q$, der Hebelsarm der Kraft $Ae = a$, jener der Last $Be = b$ und der Halbmesser der Achse $= e$. Die Achse muss offenbar die Summe von beiden Gewichten $P' + Q$ tragen; aus diesem Drucke entsteht die Reibung $m(P' + Q)$. Weil dieselbe bei i am Hebelsarme e angebracht ist, so haben wir das Moment der Reibung $= m.e(P' + Q)$. Das Gleichgewicht bleibt aber so lange ungestört, als das Moment der Kraft $a.P'$ nicht grösser ist, als das Moment der Last $b.Q$ sammt dem Momente der Reibung. Setzen wir daher $a.P' = b.Q + m.e(P' + Q)$, so wird $P' = Q\left(\frac{b + m.e}{a - m.e}\right)$. Ohne Reibung wäre $P = Q \cdot \frac{b}{a}$, daher ist die Unempfindlichkeit Fig. 8.

$$p = P' - P = Q\left(\frac{b + m.e}{a - m.e}\right) - Q \cdot \frac{b}{a} = Q\left(\frac{a + b}{a}\right)\left(\frac{m.e}{a - m.e}\right).$$

Eben so ist von Seite der Last $b.Q' = a.P + m.e(P + Q')$, daher $Q' = P\left(\frac{a + m.e}{b - m.e}\right)$, ferner $Q = P \cdot \frac{a}{b}$, demnach $q = Q' - Q = P\left(\frac{a + b}{b}\right)\left(\frac{m.e}{b - m.e}\right)$.

Beispiel. Es sey $Q = 200$ ℔, $P' = 10$ ℔, $a = 20$ Zoll und $b = 1$ Zoll, dann $e = \frac{1}{10}$ Zoll, $m = \frac{1}{10}$, so ist $p = P' - P = 200\left(\frac{20 + 1}{20}\right)\left(\frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}{20 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}\right)$ Pf. $= 3\frac{1}{3}$ Loth.

§. 449.

Um die Reibung bei einem Rade an der Welle zu bestimmen, haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

1tens Wenn Kraft und Last an entgegengesetzten Armen senkrecht herabwirken,

2tens wenn die Last senkrecht herab und die Kraft an demselben Arme in entgegengesetzter Richtung hinauf wirkt,

3tens wenn die Last senkrecht herab, und die Kraft unter irgend einem andern gegebenen Winkel wirkt.

Fig. 9. Tab. 27. Im ersten Falle, wo die Kraft bei einem Rade an der Welle senkrecht herabwirkt, müsste, wenn keine Reibung an den Zapfen und keine Unbiegsamkeit des Seiles vorhanden wäre, das Moment der Kraft dem Momente der Last gleich seyn oder $P.R = Q.r$; da aber das Seil auf der Seite der Last erst aufgewickelt werden muss, so vermehrt die Unbiegsamkeit desselben den Hebelsarm der Last r um $n.\delta$ und es ist das Moment der Last $= Q(r + n.\delta)$. Uiberdiess findet an den Zapfen, welche sich in den Pfannen bewegen, eine Reibung statt, es muss demnach zu dem Momente der Last noch das Moment der Reibung hinzukommen, indem die Kraft beide zu überwältigen hat. Auf den Zapfen drücken die zwei Kräfte P, Q und das Gewicht der Maschine M, daher ist der Reibungswiderstand $= m(P + Q + M)$ und weil derselbe an der Peripherie des Zapfens, folglich auf der Entfernung des Halbmessers des Zapfens e vom Unterstützungspunkte statt findet, so ist das statische Moment der Reibung $= e . m(P + Q + M)$. Wir haben demnach zwischen Kraft und Last die Gleichung

$P.R = Q(r + n.\delta) + m.e(Q + P + M)$, woraus die Kraft

$$P = \frac{Q(r + n.\delta + m.e) + m.e.M}{R - m.e}$$ folgt.

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Grösse $m.e$ auf doppelte Weise der Kraft zum Nachtheile kommt, denn hiedurch wird sowohl der Zähler grösser oder der Hebelsarm der Last vermehrt als auch der Nenner $R - m.e$ kleiner oder der Hebelsarm der Kraft vermindert. Man muss daher $m.e$ so klein als möglich machen, d. h. der Halbmesser der Zapfen e muss nur so gross genommen werden, als es die Festigkeit erfordert und der Reibungscoeffizient m muss durch fleissiges Abglätten und dann Schmieren möglichst vermindert werden. Eben so soll das Gewicht der ganzen Maschine M nicht unnöthig gross seyn, und es wird eine leicht erbaute Maschine weniger Kraft zu ihrer Bewegung erfordern, als eine schwerfällige.

Beispiel. Es sey die aufzuziehende Last $Q = 1000$ ℔; der Halbmesser der Welle $r = 4$ Zoll, und des Zapfens $e = 1$ Zoll; der Hebelsarm der Kraft $R = 3$ Fuss, das Gewicht der Maschine $M = 90$ ℔, dann $m = \frac{1}{9}$ und $n . \delta = \frac{1}{8}$ Zoll, so ist die nöthige Kraft $P = \frac{1000\,(4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}.1) + \frac{1}{9}.1.90}{36 - \frac{1}{9}.1} = 118{,}3$ ℔.

Ohne Reibung und Unbiegsamkeit ist $P . R = Q . r$, also $P = Q . \frac{r}{R} = 1000 \cdot \frac{4}{36} = 111{,}1$ ℔; man muss daher wegen der Reibung des Zapfens und Unbiegsamkeit der Seile 7,2 ℔ mehr Kraft anwenden und diese Kraftvermehrung wird noch erhöht, wenn der Zapfen nicht sehr glatt ist und neue steifere Seile angewendet worden wären.

§. 450.

Wir haben gesehen, dass grosse Zapfen, besonders wenn sie nicht sehr glatt und eingeschmiert sind, der Kraft zum Nachtheile gereichen. Die Gestalt des Nenners

$R - m.e$ in der §. 449 gefundenen Gleichung zeigt uns aber noch mehr, nämlich denjenigen Fall an, in welchem der Einfluss der Reibung so bedeutend ist, dass jede Bewegung der Maschine unmöglich wird. Haben nämlich R und $m.e$ solche Werthe, dass $R = m.e$ wird, so ist der Nenner $R - m.e = 0$, und da hiemit dividirt wird, so müsste in diesem Falle die Kraft P unendlich gross seyn. Da es nun eine solche Kraft nicht gibt, so ist auch die Bewegung dieser Maschine unmöglich.

Beispiel. Es sey Fig. 10 ein Modell, wobei der Halbmesser des Zapfens $e = 2$ Zoll und der Halbmesser der Welle eben so gross als der Halbmesser des Rades $r = R = 1$ Zoll ist; das Modell sey von Holz und der Zapfen nicht eingeschmiert, so dass $m = \frac{1}{2}$ ist. Wir erhalten daher $R - m.e = 1 - 2.\frac{1}{2} = 0$, mithin wird jede Bewegung des Modelles unmöglich. Fig. 10. Tab. 27.

§. 451.

Wenn die Kraft und Last bei einem Rade an der Welle auf derselben Seite, jedoch in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 11 wirken, so muss wieder das Moment der Kraft $P.R = Q(r + n.\delta) +$ dem Momente des Reibungswiderstandes seyn. Der senkrechte Druck auf den Zapfen beträgt aber $Q + M$, wogegen die Kraft P hinauf zieht; es bleibt daher der wirkliche Druck mit $Q + M - P$ übrig. Diess gibt den Reibungswiderstand $m(Q + M - P)$, und da derselbe sich an der Peripherie des Zapfens äussert, das Reibungsmoment $m.e(Q + M - P)$. Die Gleichung zwischen Kraft und Last ist daher $P.R = Q(r + n.\delta) + m.e(Q + M - P)$, woraus Fig. 11.

$$P = \frac{Q(r + n.\delta + m.e) + m.e.M}{R + m.e} \text{ folgt.}$$

In dieser Gleichung ist der Zähler derselbe wie im vorigen Falle §. 449 und nur im Nenner erscheint hier R um $m.e$ vermehrt, welches im ersten Falle um eben so viel vermindert wurde. Hieraus folgt, dass es in Hinsicht der Kraft vortheilhafter ist, wenn Kraft und Last auf einer Seite und in entgegengesetzter Richtung wirken, weil dadurch der Druck auf den Zapfen, mithin auch die Reibung vermindert wird. Uibrigens kann hier nie der Fall wie §. 450 eintreten, dass nämlich die Kraft P unendlich gross, folglich die Bewegung unmöglich ist, denn der Nenner $R + m.e$ kann niemals $= 0$ werden.

Beispiel. Es sey abermals $Q = 1000$ ℔, $R = 36$ Zoll, $r = 4$ Zoll, $e = 1$ Zoll, $n.\delta = \frac{1}{8}$ Zoll, $m = \frac{1}{9}$ und $M = 90$ ℔, so ist $P = \frac{1000(4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}.1) + \frac{1}{9}.1.90}{36 + \frac{1}{9}.1} = 117{,}6$ ℔,

wogegen ohne die Wiederstände der Bewegung $P = \frac{Q.r}{R} = \frac{1000.4}{36} = 111{,}1$ ℔ ist.

§. 452.

Wenn zwei Menschen bei einem Rade an der Welle auf entgegengesetzten Seiten und daher in Hinsicht der Richtung ihres Druckes auf den Zapfen entgegengesetzt wirken, so beträgt dieser Druck nur $Q + M$, weil sich P und P′, wenn sie gleich gross sind, gegenseitig aufheben, indem das eine den Zapfen so viel hebt, als das andere Fig. 12.

Fig. 12. Tab. 27. herab drückt, demnach erhalten wir die Gleichung zwischen Kraft und Last $(P + P')R = Q(r + n.\delta) + m.e(Q + M)$, woraus die Kraft $P + P' = \frac{Q(r + n.\delta + m.e) + m.e.M}{R}$ folgt.

Dieser Fall findet auch statt, wenn ein Arbeiter einen Haspel mit einer Kurbel bewegt, denn er vermehrt den Widerstand, wenn er herunter drückt, und vermindert denselben, wenn er hinauf drückt. Man muss also bei allen solchen Maschinen das arithmetische Mittel zwischen beiden Drücken nehmen, um den wirklichen Druck auf den Zapfen zu erhalten, welcher die Reibung verursacht.

§. 453.

Der dritte Fall bei einem Rade an der Welle tritt dann ein, **wenn die Richtung der Kraft mit jener der Last einen schiefen Winkel bildet.** Um in diesem Falle den Druck auf den Zapfen zu finden, welcher durch die Kraft verursachet wird, ziehe man zu der Richtung von P aus dem Punkte A die Parallele AB, welche wir $= P$ annehmen wollen, so wird diese Linie den Druck auf den Zapfen von Seite der Kraft vorstellen. Eben so ziehe man aus A die Linie AF senkrecht herab, welche den Druck der Last vorstellt, hiezu kommt $FD = M$ der Druck von der Maschine. Beschreibt man nun aus diesen zwei äussern Kräften das Parallelogramm ABCD, so wird dessen Diagonale AC die mittlere Kraft, d. h. den ganzen vorhandenen Druck auf den Zapfen vorstellen. Um diesen Druck zu berechnen, wollen wir den schiefen Winkel, den die Richtung der Kraft mit der Richtung der Last und dem Gewichte der Maschine bildet, nämlich $BAD = w$ setzen, folglich sind auch die Winkel ABE, dann GAE und $DCB = w$, demnach ist $AE = P.\text{Sin}\,w$, $BE = P.\text{Cos}\,w$, und $AC = \sqrt{\{P^2.\text{Sin}^2 w + (P.\text{Cos}\,w + Q + M)^2\}}$. Von dieser Last wird der Zapfen gedrückt; wir haben demnach die Gleichung zwischen Kraft und Last $P.R = Q(r + n.\delta) + m.e\sqrt{\{P^2.\text{Sin}^2 w + (P.\text{Cos}\,w + Q + M)^2\}}$. Wollte man hieraus die Kraft P genau finden, so würde diess einen sehr zusammengesetzten Werth geben; wir wissen aber, dass man bei einer jeden Maschine dafür sorgen müsse, den Einfluss der Reibung so klein als möglich zu machen, in welcher Hinsicht e klein und R gross seyn muss. Es wird daher immer beinahe $P = Q.\frac{r}{R}$ seyn. Wird dieser Werth in dem obigen Ausdrucke hinter dem Wurzelzeichen substituirt, so ist

$$P = \frac{Q(r + n.\delta)}{R} + \frac{m.e}{R}.\sqrt{\left\{\frac{Q^2.r^2.\text{Sin}^2 w}{R^2} + \left(Q + M + \frac{Q.r.\text{Cos}\,w}{R}\right)^2\right\}}.$$

Dass die vorige Annahme für P dem wirklichen Werthe sehr nahe komme, ersieht man daraus, weil sich aus der gefundenen Gleichung auch die beiden Fälle §. 449 und §. 451 ableiten lassen. Im ersten Falle, wo die Kraft senkrecht herab wirkt, ist $w = 0$, also $\text{Sin}\,w = 0$ und $\text{Cos}\,w = 1$, mithin $P = \frac{Q(r + n.\delta)}{R} + \frac{m.e}{R}.\left(Q + M + \frac{Q.r}{R}\right)$ wie §. 449.

Im zweiten Falle, wo die Kraft auf der Seite der Last senkrecht hinauf zieht, ist der Winkel $w = 180^\circ$, demnach $\text{Sin}\,w = 0$ und $\text{Cos}\,w = -1$, mithin

$$P = \frac{Q(r + n.\delta)}{R} + \frac{m.e}{R}\left(Q + M - \frac{Q.r}{R}\right)$$ wie §. 451.

Wirkt endlich die Kraft bei einem Rade an der Welle **horizontal**, so ist w = 90°, also Sin w = 1 und Cos w = 0, mithin Fig. 14. Tab. 27.

$$P = \frac{Q\,(r + n.\delta)}{R} + \frac{m.e}{R}\sqrt{\left\{\frac{Q^2.r^2}{R^2} + (Q + M)^2\right\}}.$$

Beispiel. Es seyen hier dieselben Werthe wie in den vorhergehenden Fällen gegeben, also Q = 1000 ℔, R = 36 Zoll, r = 4 Zoll, e = 1 Zoll, $n.\delta = \frac{1}{8}$ Zoll, $m = \frac{1}{6}$ und M = 90 ℔, so ist die erforderliche Kraft, im Falle sie **horizontal** wirkt $P = \frac{1000\,(4 + \frac{1}{8})}{36} + \frac{\frac{1}{6}.1}{36}\sqrt{\left\{\frac{1000^2.4^2}{36^2} + (1000 + 90)^2\right\}} = 118{,}0$ ℔. Da nun ohne Reibung und Unbiegsamkeit $P = \frac{Q.r}{R} = \frac{1000.4}{36} = 111{,}1$ ℔ wäre, so muss die Kraft wegen der zwei Widerstände um 6,9 ℔ vermehrt werden.

§. 454.

Zur Aufstellung der Gleichung zwischen Kraft und Last bei einer Winde, Göpel wird es nothwendig, das Moment der **Reibung bei einem stehenden Zapfen** zu berechnen. Hiebei findet die Reibung nicht an der Peripherie, sondern an der ganzen Fläche des Zapfens statt, da die Last auf alle Punkte dieser Fläche drückt. Bezeichnen wir daher das Gewicht der Maschine, welche auf dem Zapfen ruht, mit M, so beträgt zwar der Reibungswiderstand den m^ten Theil des Druckes oder m.M, allein der Hebelsarm dieses Widerstandes kann hier nicht der Halbmesser e des Zapfens seyn, indem nicht alle Punkte der Kreisfläche, welche von M gedrückt werden, auf der Entfernung e vom Mittelpunkte der Kreisfläche liegen.

Um nun das Moment des ganzen Druckes und dadurch das Moment der Reibung berechnen zu können, theile man die ganze Kreisfläche Fig. 15 in unendlich viele kleine Sectoren, so wird ein jeder solche Sector ein Dreieck seyn, und jeder Punkt dieses Dreieckes wird von der Maschine gedrückt. Man kann sich jedoch den ganzen Druck, welchen ein solches Dreieck erfährt, in einem einzigen Punkte desselben, nämlich in seinem **Schwerpunkte** vereinigt denken, und es wird, wenn der Druck auf ein solches Dreieck D ist, das Moment der Reibung bei dieser Dreiecksfläche gefunden, wenn man den Widerstand m . D mit der Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze des Dreieckes multiplicirt. Nach §. 74 beträgt diese Entfernung $\frac{2}{3}$ e, wenn unter e die ganze Höhe des Dreieckes, die hier der Halbmesser des stehenden Zapfens ist, bezeichnet wird. Das Reibungsmoment eines Sectors ist daher $= m.D.\frac{2}{3}e$, des 2^ten Sectors $= m.D'.\frac{2}{3}e$, des 3^ten $= m.D''.\frac{2}{3}e$, demnach das Reibungsmoment aller Sectoren oder der ganzen Fläche $= m.\frac{2}{3}e\,(D + D' + D'' \ldots.)$. Die Summe der Drücke auf alle Sectoren ist dem Gewichte der Maschine gleich, folglich ist das Moment des Reibungswiderstandes bei einem stehenden Zapfen $= \frac{2}{3}.m.e.M$. Fig. 15.

Da das Reibungsmoment bei einem liegenden Zapfen = m.e.M ist, so sehen wir, dass bei einem liegenden Zapfen unter übrigens gleichen Umständen der Widerstand der Reibung um $\frac{1}{3}$ grösser sey, als bei einem stehenden.

§. 455.

Fig. 5. Tab. 27. Die Grösse der Kraft, welche bei einer festen Rolle mit Rücksicht auf Reibung und Unbiegsamkeit der Seile erfordert wird, lässt sich auf folgende Art finden: Es sey der Halbmesser der Rolle A, des Zapfens a und die übrigen Bezeichnungen dieselben, wie in den vorhergehenden §§., so ist im Zustande des Gleichgewichtes

$$P.A = Q\,(A + n.\delta) + m.a\,(Q + P + M) \text{ und } P = \frac{Q\,(A + n.\delta + m.a) + M.m.a}{A - m.a}.$$

Beispiel. Es sey $Q = 100$ ℔, $A = 3$ Zoll, $a = 1$ Zoll, $n = \frac{1}{6}$, $\delta = \frac{1}{2}$ Zoll, $m = \frac{1}{8}$, und $M = 5$ ℔, so ist $P = \frac{100\,(3 + \frac{1}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{8}.1) + 5.\frac{1}{8}.1}{3 - \frac{1}{8}.1} = 111{,}6 + 0{,}2$ ℔.

Hiebei ist 11,6 ℔ die Reibung und Unbiegsamkeit des Seiles, welche von der Kraft und Last entsteht, und 0,2 ℔ ist die Reibung von dem Gewichte der Maschine.

Da überhaupt das Gewicht der Rolle M gegen $P + Q$ immer sehr klein ist, so kann man die Reibung, welche von M herrührt, füglich weglassen, sonach haben wir bei einer festen Rolle $P = \frac{Q\,(A + n.\delta + m.a)}{A - m.a}$, und wenn man die Division verrichtet, so ist $P = Q + \frac{Q\,(n.\delta + 2\,m.a)}{A - m.a}$; die zweite Grösse ist daher derjenige Widerstand, welchen die Unbiegsamkeit der Seile und die Reibung hervorbringt. Dieser Widerstand wird unter denselben Umständen gross, welche wir §. 449 bei dem Rade an der Welle angegeben haben.

Wir ersehen auch hieraus, dass das Seil zu beiden Seiten der festen Rolle eine ungleiche Spannung hat; es wird nämlich das Seil, an welchem die Last hängt, nur von dieser Last Q, das Seil aber, an dem die Kraft zieht, von der Kraft $Q + Q\left(\frac{n.\delta + 2\,m.a}{A - m.a}\right)$ gespannt. Nennt man also die Spannung des ersten Seiles S und des zweiten S′, so ist $S : S' = Q : P = A - m.a : A + n.\delta + m.a$, weil die Spannungen den Kräften gleich, folglich proportional sind, demnach ist auch $S' = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)$.

§. 456.

Fig. 16. Bei der vorhergehenden Berechnung haben wir angenommen, dass die Richtung der Kraft und Last zu einander parallel sey. Es fragt sich nun, die erforderliche Kraft bei einer festen Rolle zu bestimmen, wo die Last senkrecht hinab, die Kraft aber horizontal wirkt. Hiezu können wir uns der für diesen Fall Seite 507 bei dem Rade an der Welle gefundenen allgemeinen Gleichung $P = \frac{Q.(r + n.\delta)}{R} + \frac{m.e}{R}.\sqrt{\left\{\frac{Q^2.r^2}{R^2} + \left(Q + M\right)^2\right\}}$ bedienen. Geht nämlich das Rad an der Welle in eine feste Rolle über, so ist $r = R$, und wir haben $P = Q + \frac{Q.n.\delta}{R} + \frac{m.e}{R}.\sqrt{\left\{Q^2 + \left(Q + M\right)^2\right\}}$. Da wir aber, wie bereits gezeigt wur-

de, das Gewicht M der Scheibe gegen das Gewicht Q der Last in der Addition vernachlässigen können, so ist $P = Q + \frac{Q.n.\delta}{R} + \frac{m.e}{R} . \sqrt{\left(Q^2 + Q^2\right)} = Q + \frac{Q.n.\delta}{R} + \frac{m.e}{R} . Q . 1{,}414$, und weil 1,414 beinahe so viel als 1,5 beträgt, und durch diese Vermehrung beiläufig wieder der Abschlag von M ersetzt wird, so folgt, dass man den Druck auf den Zapfen bei einer festen Rolle, wenn die Kraft horizontal wirkt, $1{,}5^{\text{mal}}$ so gross als die Last Q annehmen könne, oder dass $P = Q + \frac{Q.n.\delta}{R} + \frac{m.e}{R} . 1{,}5\, Q$ sey.

Der Druck auf den Zapfen, im Falle beide Seile parallel sind, beträgt daher 2 Q, im Falle aber die Kraft horizontal wirkt, 1,5 Q. Hieraus folgt, dass für den Fall, wo die Richtung der Kraft einen Winkel von $45^0 = w$ bildet, der Druck auf den Zapfen mit dem mittlern Werthe oder mit $Q\left(\frac{2 + 1{,}5}{2}\right) = Q . 1{,}75$ angeschlagen werden könne. Fig. 17. Tab. 27.

§. 457.

Die **Kraft bei einer beweglichen Rolle** wird auf gleiche Art berechnet. Wir wissen aus §. 100, dass sich die Last bei einer beweglichen Rolle im Zustande des Gleichgewichtes auf zwei Seile vertheilt, oder dass $P = \frac{Q}{2}$ ist. Bei der beweglichen Rolle hat die Kraft die Reibung und Unbiegsamkeit des Seiles zu überwinden, demnach sind die Spannungen der Seile im Zustande der Bewegung nicht gleich, und es ist hier derselbe Fall, wie bei der festen Rolle vorhanden, demnach $P = S' = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)$. Fig. 18.

Ferner ist $S + S' = Q$, weil Q an beiden Seilen, die es spannt, hängt, und hier das Gewicht der Rolle gegen Q vernachlässiget werden kann; wir haben demnach zwei Gleichungen, woraus sich das Verhältniss von $P : Q$ finden lässt. Es ist nämlich

$$S = S'\left(\frac{A - m.a}{A + n.\delta + m.a}\right) \text{ und } S + S' = S'\left(\frac{A - m.a}{A + n.\delta + m.a}\right) + S' = Q,$$

woraus $P = S' = Q\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{2A + n.\delta}\right)$ folgt.

§. 458.

Nach denselben Grundsätzen wird die **Kraft bei einem zweirolligen Flaschenzuge** berechnet. Ist Fig. 19. ein Flaschenzug, der aus einer festen und einer beweglichen Rolle besteht, so spannt hiebei die Last offenbar die zwei Seile, deren Spannungen in der Figur mit S und S' bezeichnet sind, daher muss $Q = S + S'$ seyn. Die Spannung des dritten Seils S'' wird durch die Kraft bewirkt, demnach ist $P = S''$. Fig. 19.

Nennen wir den Halbmesser der untern Rolle A und jenen des Zapfens a, so wird die Spannung S' grösser als S seyn müssen, weil das Seil S durch die Spannung S' über die Rolle A gezogen werden muss; es ist daher S' in Rücksicht auf die Spannung S als Kraft anzusehen, und wir haben nach §. 455 die Gleichung $S' = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)$.

Fig. 19. Tab. 27. Dasselbe gilt auch von den Spannungen S′ und S″, wo die letztere als Kraft anzusehen ist, daher muss $S'' = S'\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)$ seyn, wenn B der Halbmesser der obern Rolle und b jener des Zapfens ist. Da jedoch $P = S''$, so ist $P = S'\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)$ und wenn statt S′ der Werth gesetzt wird $P = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)$. Wir hatten $Q = S + S' = S\left(1 + \frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)$; wird nun diese Gleichung mit jener für P dividirt und mit Q multiplicirt, so ist die Kraft zur Bewegung des Flaschenzuges

$$P = \frac{Q\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)}{1 + \frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}}.$$

§. 459.

Fig. 20. Soll man die Kraft angeben, welche bei einem Flaschenzuge mit 2 beweglichen und einer festen Rolle erfordert wird, und bezeichnen A, B, C die Halbmesser der Rollen, a, b, c die Halbmesser ihrer Zapfen, endlich S, S′, S″ und S‴ die verschiedenen Spannungen des Seiles, so haben wir zuerst, da die Bewegung gegen S′ geschieht, diese Spannung $S' = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)$, ferner $S'' = S'\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)$ und $S''' = P = S''\left(\frac{C + n.\delta + m.c}{C - m.c}\right)$, hieraus folgt

$$P = S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)\left(\frac{C + n.\delta + m.c}{C - m.c}\right).$$

Da aber die Last an drei Seilen hängt, so ist

$$Q = S + S' + S'' = S + S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right) + S\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right).$$

Werden nun beide Gleichungen mitsammen dividirt, so ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)\left(\frac{C + n.\delta + m.c}{C - m.c}\right)}{1 + \frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a} + \left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)}.$$

§. 460.

Besteht endlich ein Flaschenzug aus zwei festen und zwei beweglichen Rollen, so finden wir auf gleiche Art das Verhältniss der Kraft zur Last $\frac{P}{Q} =$

$$\frac{\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)\left(\frac{C + n.\delta + m.c}{C - m.c}\right)\left(\frac{D + n.\delta + m.d}{D - m.d}\right)}{1 + \frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a} + \left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right) + \left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)\left(\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b}\right)\left(\frac{C + n.\delta + m.c}{C - m.c}\right)}.$$

Hieraus ersieht man bereits das Gesetz, welches zur Auffindung der Gleichungen zwischen Kraft und Last bei einem Flaschenzuge mit einer beliebigen Anzahl Rollen dient. Setzen wir nämlich $\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a} = \mathbf{A}$, dann $\frac{B + n.\delta + m.b}{B - m.b} = \mathbf{B}, \ldots$ so ist bei einem Flaschenzuge mit mehreren Rollen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C}.\mathbf{D}\ldots\ldots}{1 + \mathbf{A} + \mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C} + \ldots\ldots}.$$

In diesem Ausdrucke ist der Zähler immer das Produkt so vieler Faktoren, als Scheiben vorhanden sind, worüber das Seil geht. Der Nenner ist die Summe so vieler Glieder, als Seile, woran die Last hängt; von diesen Gliedern ist das erste immer die Einheit; das zweite ist die Function der ersten Scheibe nach dem Hacken, worüber das Seil geht; das dritte ist das Produkt aus der 1ten und 2ten; das vierte ist das Produkt aus der 1ten, 2ten und 3ten, u. s. w.

Uibrigens ersehen wir auch, dass, wenn in den gefundenen Gleichungen $m = 0$ und $n.\delta = 0$ gesetzt wird, wir genau dieselben Ausdrücke erhalten, welche nach einfachen statischen Grundsätzen §. 97 bis §. 103 abgeleitet wurden. In diesem Falle ist z. B. für den Flaschenzug mit 4 Rollen $\frac{P}{Q} = \frac{1}{1+1+1+1} = \frac{1}{4}$.

§. 461.

Wird in der oben gefundenen Gleichung mit den drei ersten Faktoren des Zählers sowohl im Zähler als im Nenner dividirt, so ist für 4 Rollen

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{D}}{\frac{1}{\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C}} + \frac{1}{\mathbf{B}.\mathbf{C}} + \frac{1}{\mathbf{C}} + 1}.$$

Daraus sehen wir, dass der Divisor kleiner als 4 Einheiten ist, d. h. dass die Kraft grösser als $\frac{1}{4}$ Q seyn müsse. Da ferner die einzelnen Glieder im Nenner desto kleiner werden, je mehr Faktoren mit einander zu multipliciren kommen, so werden in diesem Falle statt der Einheit immer kleinere Zahlen im Nenner erscheinen; demnach wird auch das Verhältniss der Kraft zur Last von dem Verhältnisse der Einheit zur Anzahl der gespannten Seile, wie §. 103 ohne Rücksicht auf Widerstände berechnet wurde, immer mehr abweichen müssen. Vergleichen wir sonach einen Flaschenzug mit 2 Rollen, einen zweiten mit 4 Rollen und einen dritten mit 6 Rollen, so werden sich ihre Wirkungen nicht wie 1 : 2 : 3 verhalten, weil die Reibung bei dem Flaschenzuge mit 6 Rollen mehr als dreimal so gross als bei einem Flaschenzuge mit 2 Rollen ist. Demnach werden auch zwei Flaschenzüge, deren jeder 4 Rollen hat, vortheilhafter zu brauchen seyn, als ein Flaschenzug mit 8 Rollen, bei welchem letztern überdiess auch noch eine Verflechtung der Seile leicht eintreten kann.

§. 462.

Da man überhaupt sowohl den Reibungscoeffizienten m, als auch die Grösse $n.\delta$ nicht genau anzugeben im Stande ist, und da die Fehler bei dieser Bestimmung in den berechneten Formeln einen um so grössern Einfluss ausüben, je mehr Faktoren,

worin m und $n \cdot \delta$ erscheint mit einander zu multipliciren sind, so ist es einleuchtend, warum man bei einem sehr zusammengesetzten Flaschenzuge durch eine Berechnung nach den obigen Formeln keine vollkommene Uibereinstimmung mit der Erfahrung finden könne. Dieser Umstand nöthigt uns in jedem Falle, wo ein genaues Verhältniss zwischen Kraft und Last gesucht wird, erst einen Versuch mit dem vorhandenen Flaschenzuge zu machen, um sich auf diese Weise von seiner Wirkung praktisch zu überzeugen.

Zur Bestimmung der Reibung bei einem Flaschenzuge wurden folgende Versuche am technischen Institute in Prag gemacht. Der erste Versuch geschah mit einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit vier Rollen, der bereits mehrere Jahre von einem Zimmermeister gebraucht wurde; derselbe wurde zuerst genau untersucht und verbessert, damit kein besonderer Widerstand vorhanden sey; hierauf wurde er eingeschmiert und an einem im Fenster des zweiten Stockwerkes angebrachten Balken befestigt. Bei diesem Flaschenzuge war die obere und untere Flasche gleich, der Halbmesser der grössern Rollen an der obern und untern Flasche sammt dem Halbmesser des Seiles $C = D = 23$ Linien, der Halbmesser der kleinern Rollen sammt dem Halbmesser des Seiles $A = B = 18{,}5$ Linien, der Halbmesser der Achsen $a = b = c = d = 3{,}5$ Linien. Eine jede Flasche wog 10 ℔, und das Gewicht der vier gespannten Seile betrug 12 ℔. An diesem Flaschenzuge wurden nun verschiedene Gewichte angehängt, und zwar zuerst 50 ℔. Da das Gewicht der vier Seile 12 ℔ und der untern Flasche 10 ℔ betrug, so folgt, dass das Gesammtgewicht in diesem Falle 72 ℔ war. An das fünfte Seil wurden nun so lange Gewichte befestigt, bis eine gleichförmige Bewegung erfolgte. Diess geschah in dem genannten Falle bei 22 ℔, da jedoch das Gewicht dieses fünften Seiles 3 ℔ betrug, so war die ganze Kraft = 25 ℔, demnach das Verhältniss der Kraft zur Last = $^{25}/_{72}$.

Nunmehr wurde das Gewicht von 25 ℔ (die Kraft) so lange vermindert, bis die Last von 72 ℔ die Ueberwucht erhielt, und eine gleichförmige Bewegung der letztern hinab erfolgte; diess geschah, wenn 6 ℔ am fünften Seile angehängt waren, demnach die Last sammt dem Gewicht des Seiles $6 + 3 = 9$ ℔ betrug. Nachstehende Tabelle enthält die Resultate der Versuche:

Versuche mit vier Rollen:

Angehängtes Gewicht.	Gewicht der 4 Seile	Gewicht der untern Flasche	Zusammen Q	Diess Gewicht wurde gehoben von	Zusammen P	Verhältniss der Kraft zur Last P : Q	Das Gewicht Q hebt am fünften Seile	Verhältniss der Last zur Kraft
℔	℔	℔	℔	℔	℔		℔	
50	12	10	72	22 + 3	25	25 : 72	6 + 3 = 9	9 : 72
100	12	10	122	46 + 3	49	49 : 122	13 + 3 = 16	16 : 122
150	12	10	172	61 + 3	64	64 : 172	21 + 3 = 24	24 : 172
200	12	10	222	85 + 3	88	88 : 222	25 + 3 = 28	28 : 222

Angehängtes Gewicht.	Gewicht der 3 Seile.	Gewicht der untern Flasche.	Zusammen Q	Diess Gewicht wurde gehoben von	Zusammen P	Verhältniss der Kraft zur Last P : Q	Das Gewicht Q hob am vierten Seile	Verhältniss der Last zur Kraft P′ : Q
Versuche mit drei Rollen. (Die Last an 3 Seilen)								
℔	℔	℔	℔	℔	℔		℔	
100	9	10	119	52 + 3	55	55 : 119	23 + 3 = 26	26 : 119
150	9	10	169	74 + 3	77	77 : 169	34 + 3 = 37	37 : 169
200	9	10	219	100 + 3	103	103 : 219	45 + 3 = 48	48 : 219
Versuche mit den zwei grossen Rollen. (Die Last an zwei Seilen.)								
100	6	10	116	72 + 3	75	75 : 116	40 + 3 = 43	43 : 116
150	6	10	166	104 + 3	107	107 : 166	57 + 3 = 60	60 : 166

Die vorigen Versuche werden im ersten Falle, wo alle 4 Rollen gebraucht wurden, nach folgender Gleichung berechnet:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)^2 \left(\frac{C + n.\delta + m.a}{C - m.a}\right)^2}{1 + \frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a} + \left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)^2 + \left(\frac{A + n.\delta + m.a}{A - m.a}\right)^2 \left(\frac{C + n.\delta + m.a}{C - m.a}\right)}$$

und wenn der leichtern Rechnung wegen mit A und C dividirt wird, ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left\{\frac{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}{1 - \frac{m.a}{A}}\right\}^2 . \left\{\frac{1 + \frac{n.\delta}{C} + \frac{m.a}{C}}{1 - \frac{m.a}{C}}\right\}^2}{1 + \frac{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}{1 - \frac{m.a}{A}} + \left\{\frac{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}{1 - \frac{m.a}{A}}\right\}^2 + \left\{\frac{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}{1 - \frac{m.a}{A}}\right\}^2 . \left\{\frac{1 + \frac{n.\delta}{C} + \frac{m.a}{C}}{1 - \frac{m.a}{C}}\right\}}$$

Werden nur drei Rollen gebraucht, so entfällt in dieser Gleichung das Glied, welches von der vierten Rolle herrührt, und werden nur zwei Rollen gebraucht, so bleiben bloss die hierauf Bezug habenden Faktoren stehen. Wenn im zweiten Falle der angeführten Versuche P′ hinauf und Q herabgeht, so haben wir:

$$\frac{P'}{Q} = \frac{\left\{\frac{1 - \frac{m.a}{A}}{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}\right\}^2 . \left\{\frac{1 - \frac{m.a}{C}}{1 + \frac{n.\delta}{C} + \frac{m.a}{C}}\right\}^2}{1 + \frac{1 - \frac{m.a}{A}}{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}} + \left\{\frac{1 - \frac{m.a}{A}}{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{m.a}{A}}\right\}^2 + \left\{\frac{1 - \frac{m.a}{A}}{1 + \frac{n.\delta}{A} + \frac{n.a}{A}}\right\}^2 \left\{\frac{1 - \frac{m.a}{C}}{1 + \frac{n.\delta}{C} + \frac{m.a}{C}}\right\}} .$$

Hier ist $A = 18{,}5'''$, $C = 23'''$, $a = 3{,}5'''$ und $n . \delta = \frac{1}{10}$ Zoll angenommen worden.

Da es zu schwierig wäre, m durch Auflösung einer Gleichung des 4[ten] Grades zu berechnen, so wurden für m einige Werthe angenommen und untersucht, ob hiebei der im Versuche gefundene Werth von $\frac{P}{Q}$ eintrifft. Diess gab nun folgende Resultate:

	I. Wenn P herabging			II. Wenn Q herabging		
	mit 4 Rollen	mit 3 Rollen	mit 2 Rollen	mit 4 Rollen	mit 3 Rollen	mit 2 Rollen
für m	ist $\frac{P}{Q}$	$\frac{P}{Q}$	$\frac{P}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$
0,5	0,413	0,511	0,719	0,141	0,209	0,342
0,4	0,385	0,480	0,682	0,155	0,225	0,363

Durch eine proportionale Berechnung ergeben sich nun die genauen Werthe von m für die in den Versuchen gefundenen Werthe von $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q}$ und zwar ist:

I. Wenn P herabging						II. Wenn Q herabging					
mit 4 Rollen		mit 3 Rollen		mit 2 Rollen		mit 4 Rollen		mit 3 Rollen		mit 2 Rollen	
für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m
$^{25}/_{72}$ = 0,347	0,264	$^{55}/_{119}$ = 0,462	0,342	$^{75}/_{116}$ = 0,647	0,305	$^{9}/_{72}$ = 0,125	0,614	$^{26}/_{119}$ = 0,218	0,444	$^{43}/_{116}$ = 0,371	0,362
$^{49}/_{122}$ = 0,402	0,461	$^{77}/_{169}$ = 0,456	0,323	$^{107}/_{166}$ = 0,645	0,300	$^{16}/_{122}$ = 0,131	0,571	$^{37}/_{169}$ = 0,219	0,438	$^{60}/_{166}$ = 0,361	0,410
$^{64}/_{172}$ = 0,372	0,354	$^{103}/_{219}$ = 0,470	0,368	.	.	$^{24}/_{172}$ = 0,140	0,507	$^{48}/_{219}$ = 0,219	0,438	.	.
$^{88}/_{222}$ = 0,396	0,439	.	.	.	.	$^{28}/_{222}$ = 0,126	0,607	.	.	.	.
Mittel...	0,380	.	0,344	.	0,303	Mittel...	0,575	.	0,440	.	0,386
Mittel aus allen Versuchen m = 0,351						Mittel aus allen Versuchen m = 0,488					

§. 463.

Der zweite Versuch wurde mit einem vierrolligen, sogenannten französischen Flaschenzuge, wobei immer zwei Rollen neben einander stehen, vorgenommen. Auch dieser Flaschenzug wurde vor dem Gebrauche genau untersucht und die Achsen gut eingeschmiert. Die Halbmesser der 4 Rollen mit Einschluss der halben Stärke des Seiles betrugen A = 72 Linien, die Halbmesser der Zapfen a = 4,5 Linien. Die Versuche wurden wieder zuerst mit allen 4 Rollen, sodann bloss mit Anwendung von 3, und hierauf bloss mit 2 Rollen vorgenommen. Ingleichem wurde P zuerst so lange

vermehrt, bis eine gleichförmige Bewegung desselben herab erfolgte; sodann aber wurde P so lange vermindert, bis die Last Q die Uiberwucht erhielt, und mit gleichförmiger Geschwindigkeit herabging. Die Resultate der angestellten Versuche enthält nachstehende Tabelle, welche auf gleiche Art, wie die im vorigen §. angeführte gelesen werden muss.

Angehängtes Gewicht.	Gewicht der 4 Seile.	Gewicht der untern Flasche	Zusammen.	Das vorstehende Gewicht wurde gehoben von	Zusammen.	Verhältniss P : Q.	Das erst angeführte Gewicht hob am 5ten Seile.	Verhältniss P′ : Q.
Versuch mit 4 Rollen.								
50	$2\frac{2}{3}$	8	$60\frac{2}{3}$	$17 + \frac{2}{3}$	$17\frac{2}{3}$	$17\frac{2}{3} : 60\frac{2}{3} = 0{,}291 : 1$	$12\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 13\frac{1}{6}$	$13\frac{1}{6} : 60\frac{2}{3} = 0{,}217 : 1$
100	$2\frac{2}{3}$	8	$110\frac{2}{3}$	$30\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$	$31\frac{5}{12}$	$31\frac{5}{12} : 110\frac{2}{3} = 0{,}284 : 1$	$23\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = 23\frac{11}{12}$	$23\frac{11}{12} : 110\frac{2}{3} = 0{,}216 : 1$
150	$2\frac{2}{3}$	8	$160\frac{2}{3}$	$44\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$45\frac{1}{6}$	$45\frac{1}{6} : 160\frac{2}{3} = 0{,}281 : 1$	$33\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 34\frac{1}{6}$	$34\frac{1}{6} : 160\frac{2}{3} = 0{,}213 : 1$
200	$2\frac{2}{3}$	8	$210\frac{2}{3}$	$58\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$	$58\frac{11}{12}$	$58\frac{11}{12} : 210\frac{2}{3} = 0{,}280 : 1$	$45 + \frac{2}{3} = 45\frac{2}{3}$	$45\frac{2}{3} : 210\frac{2}{3} = 0{,}217 : 1$
Mit 3 Rollen.								
50	2	8	60	$21\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$22\frac{1}{6}$	$22\frac{1}{6} : 60 = 0{,}369 : 1$	$16\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 17\frac{1}{6}$	$17\frac{1}{6} : 60 = 0{,}286 : 1$
100	2	8	110	$39\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$40\frac{1}{6}$	$40\frac{1}{6} : 110 = 0{,}365 : 1$	$31\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 32\frac{5}{12}$	$32\frac{5}{12} : 110 = 0{,}295 : 1$
150	2	8	160	$58\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$59\frac{1}{6}$	$59\frac{1}{6} : 160 = 0{,}370 : 1$	$44\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 45\frac{1}{6}$	$45\frac{1}{6} : 160 = 0{,}282 : 1$
Mit 2 Rollen.								
50	$1\frac{1}{3}$	8	$59\frac{1}{3}$	$32 + \frac{2}{3}$	$32\frac{2}{3}$	$32\frac{2}{3} : 59\frac{1}{3} = 0{,}551 : 1$	$26 + \frac{2}{3} = 26\frac{2}{3}$	$26\frac{2}{3} : 59\frac{1}{3} = 0{,}449 : 1$
100	$1\frac{1}{3}$	8	$109\frac{1}{3}$	$60 + \frac{2}{3}$	$60\frac{2}{3}$	$60\frac{2}{3} : 109\frac{1}{3} = 0{,}555 : 1$	$48 + \frac{2}{3} = 48\frac{2}{3}$	$48\frac{2}{3} : 109\frac{1}{3} = 0{,}445 : 1$

Diese Versuche werden im ersten Falle, wo alle 4 Rollen gebraucht wurden, nach folgender bereits reduzirter Gleichung

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^4 + \left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^3 + \left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^2 + \frac{A - m.a}{A + m.a}}$$ berechnet.

In diesem Ausdrucke wurde nämlich die Unbiegsamkeit der Seile oder $n.\delta = 0$ gesetzt, weil das gebrauchte bereits sehr abgenützte Seil eine sehr grosse Biegsamkeit hatte. Im zweiten Falle, wo nur 3 Rollen gebraucht wurden, findet die Gleichung

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^3 + \left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^2 + \frac{A - m.a}{A + m.a}}$$ und im dritten Falle, wo das Seil bloss über 2 Rollen ging, die Gleichung $\frac{P}{Q} = \frac{1}{\left(\frac{A - m.a}{A + m.a}\right)^2 + \frac{A - m.a}{A + m.a}}$ statt. Für den Fall als die Last die Uiberwucht hat, und mit gleichförmiger Geschwindigkeit herab, dage-

gen P′ hinauf steigt, werden die Gleichungen auf ähnliche Art abgeleitet. Versucht man nun verschiedene Werthe für m, so erhält man:

	I. Wenn P herabging			II. Wenn Q herabging		
	mit 4 Rollen	mit 3 Rollen	mit 2 Rollen	mit 4 Rollen	mit 3 Rollen	mit 2 Rollen
für m	ist $\frac{P}{Q}$	$\frac{P}{Q}$	$\frac{P}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$	$\frac{P'}{Q}$
0,4	0,283	0,368	0,539	0,220	0,301	0,464
0,3	0,274	0,359	0,529	0,227	0,309	0,473

Durch eine proportionale Berechnung ergeben sich nun die genauen Werthe für m für die in den Versuchen gefundenen Werthe von $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q}$ und zwar ist:

I. Wenn P herabging						II. Wenn Q herabging					
mit 4 Rollen		mit 3 Rollen		mit 2 Rollen		mit 4 Rollen		mit 3 Rollen		mit 2 Rollen	
für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m	für $\frac{P'}{Q}$	ist m
0,291	0,489	0,369	0,411	0,551	0,520	0,217	0,443	0,286	0,588	0,449	0,567
0,284	0,411	0,365	0,367	0,555	0,560	0,216	0,457	0,295	0,475	0,445	0,611
0,281	0,378	0,370	0,422	.	.	0,213	0,500	0,282	0,638	.	.
0,280	0,367	.	.	.	.	0,217	.	.	.	.	.
Mittel	0,411	.	0,400	.	0,540	.	0,461	.	0,567	.	0,589
Mittel aus allen Versuchen . . m = 0,436						Mittel aus allen Versuchen . m = 0,525					

Aus den gefundenen Werthen für m ersehen wir bei einer Vergleichung derselben, dass der Reibungscoeffizient m mit keiner solchen Genauigkeit und Uebereinstimmung abgeleitet werden kann, als es bei einer einfachen Maschine, wo die Last nur auf einem Zapfen beiderseits aufliegt, statt findet, und dass überhaupt die Reibung viel grösser ausfällt, als es *Coulomb* bei den bereits angeführten Versuchen mit einfachen Maschinen gefunden hat. Hieraus folgt weiter, wie nothwendig es sey, in jedem Falle, wo es darauf ankommt, ein sicheres Verhältniss zwischen Kraft und Last bei einem Flaschenzuge aufzustellen, mit demselben vorerst einen genauen Versuch zu machen.

§. 464.

Die Reibung, welche bei einem Seile statt findet, wenn es um einen feststehenden Cylinder oder um eine Welle geschlungen wird, lässt sich auf folgende Art

berechnen: Es sey a e ein kleines Stück der Peripherie, um welche das Seil geschlungen ist; die Last Q hänge in a senkrecht herab, und die Kraft P wirke in der Richtung der Tangente zu e. Verlängern wir die Richtung der Kraft und Last, und setzen $b\,a = Q$, so ist $b\,e = P$ und diese zwei Kräfte, welche bei b einen Winkel mitsammen bilden, lassen sich mittelst des Parallelogrammes a b e d in die mittlere Kraft b d vereinigen, die den gesammten Druck auf den Cylinder vorstellt. Fig. 21. Tab. 27.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke b o a und o c a haben wir $b\,o : b\,a = o\,a : a\,c$ und $b\,o = \frac{b\,a \, . \, o\,a}{a\,c} = \frac{Q \, . \, o\,a}{r}$, also ist der ganze Druck auf die Peripherie des Cylinders $= \frac{2\,Q \, . \, o\,a}{r} = \frac{Q \, . \, a\,e}{r}$. Liegen die Punkte a und e nahe an einander, so fällt die Sehne a o e mit dem Bogen a n e zusammen, und es ist daher der Druck auf die Peripherie des Cylinders $= \frac{Q \, . \, s}{r}$, wenn wir den Bogen, an welchem das Seil anliegt, mit s bezeichnen. Die Kraft in e, welche ohne Reibung $= Q$ gewesen wäre, wird demnach wegen der Reibung ebendaselbst, $P = Q + \frac{m \, . \, Q \, . \, s}{r} = Q \left(1 + \frac{m \, . \, s}{r}\right)$ seyn.

Nehmen wir nun einen zweiten Bogen e f von gleicher Länge wie a e an, so ist P für den Punkt e als Last zu betrachten, und wir haben die erforderliche Kraft in der Richtung der Tangente zu f, nämlich $P' = P \left(1 + \frac{m \, . \, s}{r}\right)$, und wenn substituirt wird, $P' = Q \left(1 + \frac{m \, . \, s}{r}\right)^2$. Für einen dritten Bogen von gleicher Länge erhalten wir die am Ende desselben erforderliche Kraft $P' = Q \left(1 + \frac{m \, . \, s}{r}\right)$ u. s. w. Hieraus ersehen wir bereits das Gesetz, nach welchem die zur Bewegung des Seiles erforderliche Kraft zunimmt *).

*) Genauer wird obige Rechnung auf folgende Art gemacht: Es sey der Bogen $m\,a = s$ und $a\,e = d\,s$, der Winkel $m\,c\,a = \varphi$ und $a\,c\,e = d\,\varphi$; die Kraft, welche zur Bewegung des Seiles in a erfordert wird, sey P und jene in e sey P'. Aus der im Texte angeführten Zerlegung der Kräfte folgt $P' = P \left(1 + \frac{m \, . \, d\,s}{r}\right)$, weil aber $\frac{d\,s}{r} = d\,\varphi$, so ist auch $P' = P\,(1 + m \, . \, d\,\varphi)$. Der Unterschied der Kraft, welche in den Punkten a und e erfordert wird, ist daher $P' - P = P \, . \, m \, . \, d\,\varphi$ und diess muss $= d\,P$ seyn. Diess gibt $\frac{d\,P}{P} = m \, . \, d\,\varphi$. Fig. 22.

Das Integrale hievon ist nat. log. $P = m \, . \, \varphi + \text{Const.}$ Ist $\varphi = 0$, so ist $P = Q$, also nat. log. $Q = 0 + \text{Const}$, und daher nat. log. P — nat. log. $Q = m \, . \, \varphi$ oder nat. log. $\frac{P}{Q} = m \, . \, \varphi$. nat. log. e, hieraus folgt $e^{m \, . \, \varphi} = \frac{P}{Q}$ und $P = Q \, . \, e^{m \, . \, \varphi}$.

Ist nun $\varphi = 0$, so ist $P = Q$. Für den Viertel Kreis ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $P = Q \, . \, e^{\frac{m \, . \, \pi}{2}}$; für den halben Kreis ist $\varphi = \pi$, also $P = Q \, . \, e^{\frac{2\,m \, . \, \pi}{2}}$; für drei Viertheile des Kreises ist $\varphi = 1{,}5\,\pi$ also $P = Q \, . \, e^{\frac{3\,m \, . \, \pi}{2}}$ u. s. w. Setzt man $\pi = 3{,}14159$, so erhalten wir für das im Texte aufgelösste Beispiel jedesmal die erforderliche Kraft, wenn

das Seil 1 Peripherie umschlingt $= Q \, . \, 2{,}193$, wenn das Seil 3 Peripherien umschlingt $= Q \, . \, 10{,}551$,
„ „ 2 „ „ $= Q \, . \, 4{,}810$, „ „ 4 „ „ $= Q \, . \, 23{,}141$.

Diese Werthe stimmen mit den obigen nahe überein.

Nehmen wir $s = 1$ Grad, und berechnen die Kraft zur Bewegung eines Seiles, welches 90 Grade umspannt, so ist die Länge eines Grades $s = \frac{22}{7} \cdot \frac{r}{180} = \frac{\pi \cdot r}{180}$, demnach die Kraft $P = Q\left(1 + \frac{m \cdot \pi}{180}\right)^{90}$; wird das Seil um einen Bogen von 180 Grad geschlungen, so ist $P = Q\left(1 + \frac{m \cdot \pi}{180}\right)^{180}$; für 270 Grad ist $P = Q\left(1 + \frac{m \cdot \pi}{180}\right)^{270}$; für eine ganze Peripherie ist $P = Q\left(1 + \frac{m \cdot \pi}{180}\right)^{360}$ u. s. w. Die Kräfte, welche zur Bewegung des umwundenen Seiles erfordert werden, steigen daher in einem geometrischen Verhältnisse, während die Bögen nur im arithmetischen Verhältnisse zunehmen. Die wirkliche Grösse der Kraft P hängt jedoch von dem Reibungscoeffizienten m ab.

Beispiel. Nehmen wir den Reibungscoeffizienten $m = \frac{1}{8}$, so ist die erforderliche Kraft, wenn

das Seil 1 Peripherie umschlingt $P = Q\left(1 + \frac{\pi \cdot m}{180}\right)^{360} = Q\left(1 + \frac{22 \cdot 1}{7 \cdot 180 \cdot 8}\right)^{360} = Q \cdot 2{,}192$,

„ „ 2 „ „ $P = Q\left(1 + \frac{\pi \cdot m}{180}\right)^{2 \cdot 360} = Q\left(\frac{5051}{5040}\right)^{2 \cdot 360} = Q \cdot 4{,}806$,

„ „ 3 „ „ $P = Q\left(1 + \frac{\pi \cdot m}{180}\right)^{3 \cdot 360} = Q\left(\frac{5051}{5040}\right)^{3 \cdot 360} = Q \cdot 10{,}535$,

„ „ 4 „ „ $P = Q\left(1 + \frac{\pi \cdot m}{180}\right)^{4 \cdot 360} = Q\left(\frac{5051}{5040}\right)^{4 \cdot 360} = Q \cdot 23{,}096$ u. s. w.

Es wird daher eine sehr bedeutende Kraft erfordert, um ein Seil, welches mehrmals um einen Cylinder geschlungen ist, zu bewegen. Umgekehrt folgt aber aus dieser Rechnung, dass man die grössten Lasten bloss durch mehrmaliges Umschlingen eines Seiles um einen Cylinder mit einer kleinen Kraft aufhalten könne. Auf diese Weise werden die grössten Schiffe durch Taue festgehalten, welche man um hinlänglich starke Cylinder mehreremale windet.

Wir hätten nun noch die Reibung zwischen Zahn und Getriebe zu berechnen, da sie jedoch nur nach der Bestimmung der vortheilhaftesten Gestalt der Zähne und Getriebe statt finden kann, so werden wir auch erst dort die hiebei eintretende Reibung berechnen.

§. 465.

Wird ein Körper, dessen Gewicht Q ist, über eine horizontale Fläche fortgezogen, so verursacht die Reibung einen Widerstand, der bekanntlich den m^{ten} Theil der Last beträgt, und es ist $P = m \cdot Q$. Soll aber derselbe Körper über eine schiefe Fläche nach der horizontalen Richtung ohne Rücksicht auf die Reibung gezogen werden, so ist nach §. 124 die hiezu nöthige Kraft $P = Q \cdot \frac{h}{b}$. Ist daher der Reibungscoeffizient m so gross als das Verhältniss $\frac{h}{b}$, so ist auch $m \cdot Q = Q \cdot \frac{h}{b}$, und es wird zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes auf der horizontalen Fläche eine eben so grosse Kraft erfordert, als zur Fortschaffung der Last ohne Reibung über eine schiefe Fläche benöthigt wird, bei welcher das Verhältniss der Höhe zur Grund-

linie dem Reibungscoeffizienten gleich kommt. Man kann sich daher den Widerstand der Reibung bei der Berechnung in den Widerstand einer schiefen Fläche verwandeln, bei welcher $\frac{h}{b} = m = \text{tang}\ \alpha$, also $h = m \cdot b$ ist.

Da nun $\frac{h}{b}$ auch $=$ tang v ist, wo v den Neigungswinkel der schiefen Fläche bedeutet, so ist auch $m \cdot Q = Q \cdot \text{tang}\ \alpha$, d. h. der Reibungswinkel ist derjenige Winkel, dessen Tangente dem Reibungscoeffizienten gleich ist; man findet ihn daher in jedem Falle, indem man den jedesmaligen Reibungscoeffizienten m unter den Tangenten aufsucht. Beträgt z. B. $m = 0{,}1$, so findet man einen Winkel von $5^0\ 43^{\text{Min.}}$; für $m = 0{,}2$ ist $v = 11^0\ 19^{\text{Min.}}$, für $m = 0{,}3$ ist $v = 16^0\ 42^{\text{Min.}}$ u. s. w.

§. 466.

Wird eine Last parallel zur schiefen Fläche bewegt, so zerfällt das Gewicht $Q = MO$ in $MN = P = \frac{Q \cdot h}{l} = Q \cdot \text{Sin}\ v$ und in $MR = Q \cdot \text{Cos}\ v$. Die letztere Kraft, womit die schiefe Fläche winkelrecht gedrückt wird, verursacht eine Reibung auf derselben, die $= m \cdot Q \cdot \text{Cos}\ v$ ist; weil wir aber den Reibungscoeffizienten $m = \text{tang}\ \alpha$ setzen können, so beträgt die Reibung des Körpers auf der schiefen Fläche $\text{tang}\ \alpha \cdot Q \cdot \text{Cos}\ v$. Demnach ist die Zugkraft Fig. 23. Tab. 27.

$$P = Q \cdot \text{Sin}\ v + Q \cdot \text{tang}\ \alpha \cdot \text{Cos}\ v = Q\left(\text{Sin}\ v + \frac{\text{Sin}\ \alpha}{\text{Cos}\ \alpha} \cdot \text{Cos}\ v\right) =$$

$$Q\left(\frac{\text{Sin}\ v \cdot \text{Cos}\ \alpha + \text{Sin}\ \alpha \cdot \text{Cos}\ v}{\text{Cos}\ \alpha}\right) \text{ oder } P = \frac{Q \cdot \text{Sin}\ (v + \alpha)}{\text{Cos}\ \alpha}.$$

Ist nun der Neigungswinkel v der schiefen Fläche und der Reibungswinkel α gegeben, so kann die erforderliche Kraft für jede Last gefunden werden. Wäre der Reibungswinkel $\alpha = 0$, so ist $P = Q \cdot \text{Sin}\ v = Q \cdot \frac{h}{l}$ wie §. 123 gefunden wurde.

§. 467.

Auf gleiche Art wird die Kraft berechnet, welche erfordert wird, wenn die Last über die schiefe Fläche bei horizontaler Richtung des Zuges fortgeschafft wird.

Wirkt aber die Kraft unter irgend einem Winkel w mit der schiefen Fläche, so zerfällt $Q = MO$ auf gleiche Art in $Q \cdot \text{Sin}\ v = MN$ und $Q \cdot \text{Cos}\ v = MR$, wovon die erste parallel zur schiefen Fläche, die zweite aber winkelrecht auf dieselbe drückt. Auf gleiche Weise zerfällt $P = MD$ in $P \cdot \text{Cos}\ w = ME$ und $P \cdot \text{Sin}\ w = MF$, wovon abermals die erste parallel zur schiefen Fläche, die zweite aber winkelrecht auf dieselbe wirkt. Die Reibung rührt offenbar von den zwei winkelrechten Drücken MR und MF her; ginge aber die Richtung der Zugkraft aufwärts, so würde die Reibung bloss durch den Druck $MR - MF$ bewirkt. In unserm Falle haben wir daher die Gleichung zwischen Kraft und Last $P \cdot \text{Cos}\ w = Q \cdot \text{Sin}\ v + m \cdot Q \cdot \text{Cos}\ v + m \cdot P \cdot \text{Sin}\ w$. Setzen wir nun wieder den Reibungscoeffizienten $m = \text{tang}\ \alpha$, so ist Fig. 24.

$$P\ (\text{Cos}\ w - \text{tang}\ \alpha \cdot \text{Sin}\ w) = Q\ (\text{Sin}\ v + \text{tang}\ \alpha \cdot \text{Cos}\ v) \text{ oder}$$

$$P\ (\text{Cos}\ \alpha \cdot \text{Cos}\ w - \text{Sin}\ \alpha \cdot \text{Sin}\ w) = Q\ (\text{Sin}\ v \cdot \text{Cos}\ \alpha + \text{Cos}\ v \cdot \text{Sin}\ \alpha) \text{ oder}$$

$P . \mathrm{Cos}\,(\alpha + w) = Q . \mathrm{Sin}\,(\alpha + v)$ und daher $P = \frac{Q . \mathrm{Sin}\,(\alpha + v)}{\mathrm{Cos}\,(\alpha + w)}$. Aus dieser Gleichung sehen wir, dass die kleinste Zugkraft in dem Falle erfordert wird, wenn der Nenner am grössten, demnach $\mathrm{Cos}\,(\alpha + w) = 1$ und daher $\alpha + w = 0$ oder $w = -\alpha$ ist, d. h. der Zugwinkel w muss eben so gross als der Reibungswinkel α seyn, allein der Zug muss aufwärts statt finden.

§. 468.

Bei den schiefen Flächen, für welche wir gewöhnlich die Zugkraft berechnen, ist der Neigungswinkel v sehr klein, z. B. bei unsern Strassen, deren Steigung nicht über 4 Zoll auf die Klafter betragen darf, ist Sin v = $\frac{4}{72}$ und daher v = 3° 11$^{\mathrm{Min.}}$ 5$^{\mathrm{Sec.}}$. Der Zugwinkel w ist ebenfalls in diesen Fällen unbedeutend, weil der Zug von der Richtung der schiefen Fläche nicht viel abweicht. Endlich ist auch der Reibungswinkel bei den meisten Strassen nicht sehr gross. Wir können demnach zur leichtern Berechnung der Zugkraft auf unsern schiefen Flächen folgendes Verfahren anwenden:

Es sey Fig. 25 die gegebene schiefe Fläche A B C; man trage von A die Linie

Fig. 25. Tab. 27. $AD = m.b = m . BC$ winkelrecht auf, und verbinde D mit C, so hat man eine schiefe Fläche DCB erhalten, bei welcher die Höhe h um m.b vermehrt ist, welche Vermehrung gerade so viel als der Widerstand der Reibung beträgt. Es ist demnach eine gleich grosse Kraft nöthig, wenn der Körper Q über die wirkliche schiefe Fläche A C mit Reibung oder über die verzeichnete schiefe Fläche D C B ohne Reibung gezogen werden soll. Da nun nach unserer Voraussetzung $\frac{h}{b}$ klein ist, so kann man auch $AC = BC = b$ und $AD = m.b = AE$ setzen; wir erhalten demnach $P : Q = h + m.b : b$, woraus die Kraft, die zur Bewegung des Körpers über die schiefe Fläche erfordert wird

$$P = \frac{Q\,(h + m.b)}{b} = Q\left(\frac{h}{b} + m\right) \text{ folgt.}$$

Beispiel. Es sey die Last Q = 100 ℔, $\frac{h}{b} = \frac{1}{72}$ und $m = \frac{1}{8}$, so wäre die zur Uiberwindung der schiefen Fläche und des Reibungswiderstandes nöthige Kraft $P = 100\,(\frac{4}{72} + \frac{1}{8}) = 18{,}1$ ℔, wogegen ohne Reibung bloss die Kraft von 5,6 ℔ erfordert wird.

§. 469.

Fig. 26. Wir können nunmehr auch den bereits behandelten Fall, wo die Kraft nach einer beliebigen Richtung zieht, und mit der Länge der schiefen Fläche den Zugwinkel w bildet, berechnen. Wir wollen hiebei die Kraft als aufwärtswirkend annehmen, und abermals die Höhe der schiefen Fläche um die Grösse m.b vermehren. Wir erhalten hiedurch den Winkel z als den Zugwinkel auf der konstruirten schiefen Fläche ECB und da $w = z + \alpha$, folglich $z = w - \alpha$ ist, so erhalten wir nach der §. 125 aufgestellten allgemeinen Proportion $P : Q = \mathrm{Sin}\,(v + \alpha) : \mathrm{Cos}\,(w - \alpha)$, woraus die Zugkraft $P = \frac{Q . \mathrm{Sin}\,(v + \alpha)}{\mathrm{Cos}\,(w - \alpha)}$ folgt. Die Kraft wird daher desto grösser seyn müssen, je grösser die Last Q ist, je grösser $v + \alpha$ oder der Neigungswin-

kel der schiefen Ebene und Reibungswinkel ist, also wenn die schiefe Ebene hoch und die Reibung gross ist, endlich wenn Cos $(w - \alpha)$ klein ist. In letzterer Hinsicht wird daher eine kleine Kraft zur Bewegung einer Last über eine schiefe Fläche erfordert, wenn Cos $(w - \alpha)$ möglichst gross ist. Für den vortheilhaftesten Fall ist dieser Cosinus $= 1$, also $w - \alpha = 0$ und $w = \alpha$. Es ist daher am vortheilhaftesten, den Zugwinkel eben so gross als den Reibungswinkel anzunehmen; die Kraft darf also nicht parallel zur schiefen Fläche wirken, sondern ihre Richtung muss mit derselben einen Winkel w bilden, der dem jedesmaligen Reibungswinkel gleich kommt. Fig. 26. Tab. 27.

§. 470.

Von der vorstehenden Bemerkung kann bei den Fuhrwerken eine vortheilhafte Anwendung zur Bestimmung der Richtung der Zuglinie für den Fall der vortheilhaftesten Bespannung gemacht werden. Es ist bekannt, dass die Zugstränge bei dem Fuhrwesen gewöhnlich nicht horizontal, sondern in schiefer Richtung angebracht sind, indem die Brust der Pferde höher liegt, als der Punkt an dem man die Wage aufzuhängen pflegt. Fig. 27.

Der Widerstand, welchen die Pferde bei der Fortschaffung eines Wagens, dessen Gewicht sammt Ladung Q ist, zu überwältigen haben, beträgt $P = m.Q$, wo m nach Verschiedenheit des guten oder schlechten Weges zu bemessen ist. Wir können nun auch hier $m = \text{tang}\ \alpha$ setzen, und den Widerstand der Strasse auf der horizontalen Ebene b c mit Reibung in den Widerstand auf der schiefen Fläche a c ohne Reibung verwandeln, wobei aber $\frac{ab}{bc} = \text{tang}\ \alpha = m$ ist.

Es sey e der Punkt, an welchem die Wage hängt, so muss die Richtung der Zugstränge nach dem vorhergehenden §. in die Linie c e a fallen, deren Neigung gegen den Horizont, $aed = \alpha$ ist. Die Höhe der Wage ober der Strasse sey $ef = a$; die Entfernung der Brust der Pferde von der Wage oder die Länge der Zugstränge nehmen wir $de = E$, dann die Höhe der Brust $ab = H$ an, so ist $ad = H - a$; es muss demnach $m = \frac{H - a}{E}$ seyn, oder $a = H - m.E$.

Hieraus folgt, dass für den Fall, als m gross oder der Weg schlecht ist, der Werth für a klein ausfällt, d. h. man muss bei schlechtem Wege die Wage tief hängen; im Gegentheile wird a grösser, also die Wage höher zu hängen seyn, wenn m klein oder der Weg besser ist.

B e i s p i e l. Es sey $H = 4$ Fuss und $E = 8$ Fuss, so ist

bei gutem Wege, wo $m = \frac{1}{20}$, die Höhe der Wage $a = 4 - \frac{1}{20} \cdot 8 = 3{,}6$ Fuss,

bei schlechtem Wege, wo $m = \frac{1}{8}$, — — $a = 4 - \frac{1}{8} \cdot 8 = 3$ Fuss.

Aus demselben Grunde trifft man bei dem sogenannten schweren Fuhrwerke die Einrichtung, dass man die Wage sowohl über die Deichsel, als auch unter dieselbe hängen kann, und alle Fuhrleute pflegen, wenn sie aus einem guten Wege in einen schlechten, weichen Weg, in einen Morast oder in eine Vertiefung gerathen, die Wage, welche früher über der Deichsel angebracht war, nunmehr unter dieselbe zu hängen.

§. 471.

Fig. 28. Tab. 27. **Die Kraft, um einen Körper Q über eine schiefe Fläche parallel zur Grundlinie herab zu bewegen**, wird auf gleiche Art gefunden. Soll Q über die schiefe Fläche a c herabgezogen werden, so kommt der Reibungswinkel wie in den frühern Fällen der Kraft zum Nachtheile, indem er die Neigung der schiefen Fläche vermindert. Trägt man daher von c aus die Höhe c d $=$ m . b auf und verbindet d mit a, so ist es einerlei, den Körper Q über a c mit Reibung, oder über a d ohne Reibung zu bewegen. Zieht man nun durch a eine horizontale Linie a e, so ist der Neigungswinkel der konstruirten schiefen Fläche, nämlich d a e $= \alpha - v$, und die Höhe dieser schiefen Fläche oder d e $= m . b - h$. Demnach ist die Kraft, welche zum Heraufziehen des Körpers über a d benöthigt wird, $P = Q \left(\frac{m . b - h}{b}\right) = Q \left(m - \frac{h}{b}\right)$. Hieraus folgt:

1tens. Wenn $m = \frac{h}{b}$ oder der Widerstand des Weges dem Verhältnisse der Höhe der schiefen Fläche zu ihrer Grundlinie gleich kommt, so ist die Kraft $P = 0$, d. h. der Körper wird sich auf der schiefen Fläche erhalten, und wenn er eine Bewegung bereits angenommen hat, dieselbe beibehalten.

2tens. Wenn m grösser als $\frac{h}{b}$ oder der Widerstand des Weges grösser als das Verhältniss $\frac{h}{b}$ bei der schiefen Fläche ist, so muss man noch eine Kraft anwenden, um den Körper über die schiefe Fläche herab zu ziehen.

3tens. Ist im Gegentheile $\frac{h}{b}$ grösser als m, so wird der Werth für P negativ, d. h. es muss eine Kraft angewendet werden, um den Körper auf der schiefen Fläche zu erhalten, und sein Herabrollen zu verhindern.

§. 472.

Die Reibung bei der Schraube wird aus der schiefen Fläche abgeleitet. Fig. 29. Da man nämlich die Schraube als eine schiefe Fläche betrachten kann, die um einen Cylinder gewunden wurde, so erhellet von selbst, dass man bei derselben den Reibungswiderstand auf gleiche Art in Rechnung zu nehmen hat, wie es bei der schiefen Fläche geschehen ist. Es sey Fig. 29 eine Schraube und a b c ein aufgewundenes Gewinde derselben, so wird, da hier die Kraft parallel zur Grundlinie wirkt, $P : Q = h + m . b : b$ seyn, woraus die Kraft, die zur Bewegung der Schraube an ihrer Peripherie erfordert wird, $P = Q \left(\frac{h}{b} + m\right)$ folgt. Nun ist aber die Grundlinie in diesem Falle die Peripherie eines Schraubengewindes oder $\frac{22}{7} . 2\, a$; wir erhalten demnach $P = Q \left(\frac{h}{\frac{22}{7} . 2\, a} + m\right)$.

Wird die Schraube mit einem Hebel oder Schraubenschlüssel verbunden, so ist, wenn wir dieselben Bezeichnungen wie §. 141 beibehalten, die Last, welche die Schraube hebt, oder der Druck, welchen sie ausübt, $Q = \frac{K . \frac{22}{7}\, 2\, A}{h + m . \frac{22}{7} . 2\, a}$.

Beispiel. Es sey, wie §. 141 der Hebelsarm der Kraft A = 24 Zoll und h = 1 Zoll, a = 2 Zoll und m = $\frac{1}{8}$, so ist substituirt

$Q = \frac{K \,.\, \frac{44}{7} \,.\, 24}{1 + \frac{1}{8} \,.\, \frac{44}{7} \,.\, 2} = 58\frac{2}{3} \,.\, K.$ Ohne Reibung ist $Q = 150{,}9 \,.\, K$, der Widerstand der Reibung vermindert daher in diesem Verhältnisse die Leistung der Maschine.

Eine ähnliche Verminderung des Verhältnisses der Kraft zur Last findet bei allen Schrauben hinsichtlich der Reibung statt. Da auf diese Weise die Reibung bei der Schraube mehr Einfluss als bei allen andern Maschinen nimmt, so folgt, dass man die Schraube dort, wo es auf einen vortheilhaften Effekt in einer gegebenen Zeit ankommt, nicht brauchen könne; wenn es sich aber nur darum handelt, eine grosse Last zu heben, ohne auf die hiezu nöthige Zeit Rücksicht nehmen zu müssen, und wenn man noch überdiess bei der Arbeit auf einen kleinen Raum beschränkt ist, so verdient die Schraube unstreitig vor andern Hebmaschinen den Vorzug.

§. 473.

Von einigen Schrauben wird gefordert, dass sie von selbst aufgehen. Z. B. bei Papierpressen, bei Münzstöcken u. s. w. Werden diese Schrauben angezogen, so verrichten sie ihren Druck, so wie aber die Kraft nachlässt, gehen sie von selbst wieder zurück oder auf. Es fragt sich daher, was für eine Einrichtung diese Schrauben haben. Fig. 30. Tab. 27.

Betrachten wir Fig. 30 die schiefe Fläche a b c, über welche ein Körper hinab bewegt werden soll; wird der Reibungswinkel in c aufgetragen und ist derselbe kleiner als der Neigungswinkel der schiefen Fläche, so bleibt der Winkel $z = v - \alpha$, welchen die konstruirte schiefe Fläche mit dem Horizonte bildet übrig, d. h. der Körper würde auf dieser schiefen Fläche, wobei keine Reibung statt findet, schon durch seine eigene Schwere herabgehen. Wenn also eine Schraube so beschaffen ist, dass ihr Reibungswinkel kleiner als ihr Neigungswinkel ist, so muss sie, nachdem sie aufgedreht wurde, von selbst oder durch ihren eigenen Druck wieder zurückgehen. Solche Schrauben erhalten gewöhnlich 2, 3 auch 4 neben einander gehende Gewinde und werden in allen Fällen angewendet, wo es darauf ankommt, dass das Auf- und Zudrehen schnell vor sich gehen soll.

§. 474.

Wir sind nunmehr im Stande die Gleichung zwischen Kraft und Last bei den drei Gattungen Winden oder Hebern zu berechnen, welche auf der 6ten Tafel abgebildet sind.

Bei der Winde mit Vorgelege oder der deutschen Winde sey die Kraft an der Peripherie der Kurbel = K, der Halbmesser der Kurbel = A, der Halbmesser des Getriebes, welches unmittelbar durch die Kurbel bewegt wird = a und der Halbmesser seines Zapfens = e, der Halbmesser des grossen gezähnten Rades = B, des hiermit verbundenen Getriebes = b, des zugehörigen Zapfens = E, endlich die Last, welche gehoben werden soll = Q. Wir haben demnach $K \,.\, A = W(a + m \,.\, e)$ (I), wo W die Kraft an der Peripherie des grossen gezähnten Rades bedeutet. Fig. 31.

Fig. 31. Tab. 27. Weiter haben wir $W . B = Q . b +$ dem Momente der Reibung. Der Druck auf den Zapfen E beträgt offenbar $\sqrt{\left(Q^2 + \frac{Q^2 . b^2}{B^2}\right)} = Q . \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{B^2}\right)}$, mithin ist

$$W . B = Q . b + m . Q . E . \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{B^2}\right)} = Q \left\{b + m . E . \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{B^2}\right)}\right\} \text{ (II).}$$

Werden diese zwei Gleichungen mitsammen multiplizirt, so ist

$$K . A . B = Q\,(a + m . e) \left\{b + m . E . \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{B^2}\right)}\right\}, \text{ oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{a . b}{A . B}\left(1 + \frac{m . e}{a}\right)\left\{1 + \frac{m . E}{b} \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{B^2}\right)}\right\}.$$

Um den Einfluss der Reibung zu berechnen, sind die Dimensionen der Winde mit Vorgelege nach der Zeichnung auf der 6ten Tafel hier angenommen worden, und diese geben $\frac{K}{Q} = \frac{a . b}{A . B}\left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}\right)\left\{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{\left(1 + \frac{(5/4)^2}{(5/2)^2}\right)}\right\}$

$= \frac{a . b}{A . B}\left(1 + \frac{1}{30}\right)\left(1 + 0{,}0373\right) = \frac{a . b}{A . B}\left(1 + 0{,}0719\right)$. Die Kraft muss daher wegen der Reibung um $\frac{1}{14}$ grösser seyn, wobei aber zu bemerken, dass bei dieser Rechnung auf die minder bedeutende Reibung zwischen Zahn und Getriebe keine Rücksicht genommen wurde.

Bei der **französischen Winde** sey auf gleiche Art die Kraft an der Peripherie der Kurbel $= K$, der Halbmesser der Kurbel $= A$, die Kraft am Umfange des horizontalen gezähnten Rades $= P$, der Halbmesser dieses Rades $= B$, der Halbmesser der Schraube ohne Ende $= a$, der Zapfen, mit welchem die Schraube ohne Ende aufliegt $= e$, der Widerstand an der Peripherie der Schraubenspindel $= W$, der Halbmesser dieser Schraubenspindel $= b$, und der Halbmesser der Kreisfläche, womit die runde Scheibe auf der Winde liegt $= E$, endlich die Höhe eines Schraubengewindes der Schraube ohne Ende $= h$ und der Schraubenspindel $= h'$. Wir erhalten demnach folgende Gleichungen: (Fig. 32.)

$$K . A = P\left(\frac{h}{\frac{44}{7} . a} + m\right) a + P . m . e = P\left\{\frac{7 h}{44} + m\,(a + e)\right\} \text{ (I).}$$

$$P . B = Q\left\{\frac{7 h'}{44} + m\,(b + E)\right\} \text{ (II).}$$

Demnach $K . A . B = Q\left\{\frac{7 h}{44} + m\,(a + e)\right\}\left\{\frac{7 h'}{44} + m\,(b + E)\right\}$,

$$\text{und } \frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h . h'}{A . B}\left\{1 + \frac{44 m}{7}\left(\frac{a + e}{h}\right)\right\}\left\{1 + \frac{44 m}{7}\left(\frac{b + E}{h'}\right)\right\} \text{ (III).}$$

Nun ist bei der französischen Winde $A = 12$ Zoll, $a = \frac{2}{3}$ Zoll, $B = 2$ Zoll, $b = 1$ Zoll, $h = \frac{3}{4}$ Zoll, $h' = 1$ Zoll, $e = \frac{1}{2}$ Zoll und $E = 1\frac{3}{8}$ Zoll, dann kann man $m = \frac{1}{8}$ setzen. Diese Werthe substituirt geben:

$$\frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h . h'}{A . B}\left\{1 + \frac{44}{7} \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\right)\right\}\left\{1 + \frac{44}{7} \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{1 + 1\frac{3}{8}}{1}\right)\right\} \text{ oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h . h'}{A . B}\left(1 + \frac{11}{9}\right)\left(1 + \frac{33}{16}\right) = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h . h'}{A . B}\left(1 + 5{,}806\right).$$

Wir sehen aus dieser Rechnung, dass die Reibung den Widerstand beinahe auf das Siebenfache erhöht, als er ohne Reibung wäre; in diesem Falle hätten wir nämlich $\frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h.h'}{A.B}$.

Für die **englische Winde** oder den **englischen Heber** haben wir bereits §. 146 die Gleichung zwischen Kraft und Last nach einfachen statischen Grundsätzen abgeleitet. Bedienen wir uns hier wieder derselben Bezeichnungen für die gleichnamigen Maasse der Maschine, so folgt die Gleichung zwischen Kraft und Last, welche auf gleiche Art wie bei der französischen Winde abgeleitet wird. Fig. 23. Tab. 27.

$$\frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h.h'}{A.B} \left\{1 + \frac{44\,m}{7}\left(\frac{a + e}{h}\right)\right\}\left\{1 + \frac{44\,m}{7}\left(\frac{b + E}{h'}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung ist genau dieselbe, wie bei der französischen Winde, weil beide Maschinen, wie man aus Tab. 6 sieht, eigentlich dieselbe Einrichtung haben. Auch die Dimensionen beider Maschinen sind gleich, nur dass bei der französischen Winde B = 2 Zoll, bei dem englischen Heber aber B = 6,5 Zoll misst. Für den letztern ist daher das Verhältniss der Kraft zur Last $\frac{K}{Q} = \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h.h'}{A.B}\left(1 + 5{,}806\right)$, die Kraft muss daher auch beinahe siebenmal so gross seyn, als sie ohne Reibung wäre.

Alle diese Berechnungen zeigen, wie nothwendig es sey, bei der Berechnung solcher Maschinen, wobei Schrauben vorkommen, die Reibung mit in Anschlag zu nehmen, indem man ohne dieselbe die Leistung der Maschine gar nicht zu beurtheilen im Stande ist. Wir werden von den gefundenen Gleichungen bei der Berechnung des Aufschraubens eines Dachstuhles, welche bereits §. 147 gemacht wurde, im §. 479, wo diese Arbeit mit Rücksicht auf die Reibung neu berechnet wird, wieder Gebrauch machen.

§. 475.

Die Gewinde aller Schrauben müssen so stark seyn, um nicht **abgedrückt** zu werden; da nun **ein** Gewinde, wenn man es so stark machen wollte, um eine grosse Last zu tragen, zu sehr steigen müsste, demnach der Vortheil, welchen man von der Schraube erwartet, nicht erreicht würde, so werden die Schraubenmuttern, wie schon §. 146 bemerkt wurde, so stark gemacht, dass sie eine hinlängliche Anzahl Gewinde aufnehmen, die nunmehr den Druck der auf der Schraube ruhenden Last auszuhalten vermögen.

Es sey D der innere Durchmesser der Schraube oder der Durchmesser ihrer Spindel, die Anzahl der Gewinde, welche die Schraubenmutter aufnimmt, sey = n, und die Dicke der Gewinde = d, die Schraube aber rechtwinklicht geschnitten, so gibt $^{22}/_7 \,.\, D \,.\, n \,.\, d$ die Querschnittsfläche aller Gewinde. Ist die Schraube von Schmiedeeisen, so wissen wir, dass eine Fläche von 1 Quad. Zoll eine Last von 5 bis 600 Zentner bis zum Bruche aushält. Wird daher dieser Fläche eine Last von 100 Zentner anvertraut, so erhalten wir zur Bestimmung des ganzen Querschnittes, welcher zum Tragen der Last Q erfordert wird, die Proportion $1\square'' : 100$ Zentr. $= {}^{22}/_7\, D \,.\, n \,.\, d\square'' : Q$. Hieraus folgt

$n = \frac{7\,Q}{100\,.\,22\,.\,D\,.\,d}$, die Anzahl der Gewinde, welche die Schraube erhalten muss, um die darauf liegende Last mit hinlänglicher Sicherheit zu tragen.

Beispiel. Ein englischer Heber, welcher zum Aufschrauben eines Dachstuhles von Q = 1000 Zentner gebraucht wird, habe eine eiserne Schraubenspindel von D = 2 Zoll im Durchmesser, und die Gewinde seyen d = ⅓ Zoll dick.

In diesem Falle ist $n = \frac{7\,.\,1000\,.\,3}{100\,.\,22\,.\,2\,.\,1} = 4{,}77$, es müssen daher 5 Gewinde in der Schraubenmutter enthalten seyn, um von der darauf liegenden Last nicht abgedrückt zu werden.

§. 476.

Die **Reibung bei dem Keile** wird auf gleiche Art, wie bei der schiefen Flä-
Fig. 34. Tab. 27. che berechnet. Ist nämlich acd ein doppelter Keil, dessen Kopf ac = 2 b und die Höhe ed = h ist, so kann auch hier die Reibung als der m^te Theil der Grundlinie, oder co = an = m.h aufgetragen werden, und wir erhalten, wenn der Widerstand mit W, die zum Eintreiben des Keils erforderliche Kraft aber mit K bezeichnet wird, die Proportion $K : W = 2\,(m\,.\,h + b) : h$, woraus $K = 2\,W\left(m + \frac{b}{h}\right)$ folgt.

Da hier keine Abglättung der reibenden Körper angenommen werden kann, und diese Reibung z. B. bei dem Absprengen der Steine sehr bedeutend ist, so kann man $m = \frac{1}{2}$ setzen. Wird nun ein Keil genommen, dessen Länge 5^mal so gross als die Stärke seines Kopfes ist, so haben wir $K = 2\,W\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = \frac{6\,W}{5}$, woraus man sieht, dass die Reibung bei dem Keile eben so bedeutend sey als bei der Schraube.

§. 477.

Nach gleichen Grundsätzen, als wir bisher den Einfluss der Reibung bei allen einfachen und einigen zusammengesetzten Maschinen berechnet haben, wird derselbe auch bei jeder andern Maschine in Anschlag genommen. Wir kommen nunmehr zu einer zweiten eben so wichtigen Untersuchung, nämlich zur **Berechnung des Einflusses, welchen die Reibung auf den Effekt oder das Arbeitsquantum der Maschinen nimmt.** Wir wollen in dieser Hinsicht einige Aufgaben auflösen, welche am häufigsten vorkommen, und zur Berechnung ähnlicher Fälle als Anleitung dienen können.

Behandeln wir zuerst den Fall, wo **mittelst eines Flaschenzuges in Verbindung mit einer Winde von einer gegebenen Anzahl Arbeiter Bauholz, Quadersteine oder andere Baumaterialien auf ein Gebäude aufgezogen werden sollen,** und untersuchen wir, wie die Arbeit einzurichten sey, damit in einem Tage möglichst viel aufgezogen werde. Dieser Fall wurde bereits §. 107 ohne Rücksicht auf die Widerstände der Bewegung behandelt; es fragt sich daher, welchen Einfluss die Reibung und die Unbiegsamkeit der Seile sowohl auf die Einrichtung der Arbeit als auf den Effekt der Maschine nehmen.

Nehmen wir an, der Flaschenzug sey derselbe, womit die S. 513 beschriebenen Versuche gemacht worden sind, wobei also der Halbmesser der grössern zwei Rollen $C = 23$ Linien und jener der kleinern zwei Rollen $A = 18{,}5$ Linien, der Halbmesser der Achsen $a = 3{,}5$ Linien ist. Die Unbiegsamkeit des Seiles wollen wir abermals mit $n.\delta = \frac{1}{10}$ Zoll und den Reibungscoeffizienten nach dem Resultate der Berechnung S. 514 für den Fall, wo Q hinaufging, mit $m = 0{,}380$ annehmen. Dem Versuche zu Folge war der mittlere Werth bei dem Gebrauche aller vier Rollen $\frac{P}{Q} = 0{,}379$. Bezeichnen wir daher die Spannung des Seiles, welches von dem Flaschenzuge sich abwindet, mit S^4, so ist $S^4 = 0{,}379\ Q$.

Für die Spannung S^5 des horizontalen Seiles haben wir die Gleichung

$$S^5 . D = S^4 (D + n . \delta) + \tfrac{3}{2} S^4 . m . d, \text{ oder } S^5 = S^4 \left(\frac{D + n . \delta + \frac{3}{2} m . d}{D}\right).$$

Auf gleiche Art erhalten wir zur Bestimmung der Kraft der Arbeiter

$$N . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) R = S^5 (r + n . \delta) + S^5 . m . E + M . \tfrac{2}{3} . m . E$$ oder wenn der Werth für S^5 und S^4 substituirt und durch Q ausgedrückt wird

$$N . k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) R = 0{,}379\ Q . r \left(1 + \frac{n . \delta}{D} + \frac{3 m . d}{2 D}\right)\left(1 + \frac{n . \delta}{r} + \frac{m . E}{r}\right) + M . \tfrac{2}{3} m . E.$$

Aus diesem Ausdrucke erhalten wir die Last

$$Q = \frac{N . k . R \left\{\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) - \frac{M . \frac{2}{3} . m . E}{n . k . R}\right\}}{0{,}379 . r \left(1 + \frac{n . \delta}{D} + \frac{3 m . d}{2 D}\right)\left(1 + \frac{n . \delta}{r} + \frac{m . E}{r}\right)}.$$

Wir wollen nun sehen, welchen Einfluss die Reibung auf dem stehenden Zapfen nimmt, oder wie gross $\frac{M . \frac{2}{3} . m . E}{n . k . R}$ sey. Ist die Länge der Welle 8 Fuss und der Durchmesser derselben $= \frac{4}{5}$ Fuss, dann das Gewicht von einem Kubikfusse Holz, woraus sie besteht $= 36$ ℔, so beträgt das Gewicht $M = \frac{11}{14} . \frac{16}{25} . 36 . 8 = 145$ ℔. Wie wir später sehen werden, muss R beiläufig 40 Zoll messen; nimmt man nun selbst $m = 0{,}3$ und $E = \frac{1}{2}$ Zoll an, so ist $\frac{M . \frac{2}{3} . m . E}{n . k . R} = \frac{145 . \frac{2}{3} . 0{,}3 . 1}{4 . 25 . 2 . 40} = \frac{1}{276}$; diese Grösse ist daher so unbedeutend, dass sie in dem obigen Ausdrucke für Q ausser Acht gelassen werden kann, wir erhalten daher

$$Q = \frac{N . k . R \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{0{,}379 . r \left(1 + \frac{n . \delta}{D} + \frac{3 m . d}{2 D}\right)\left(1 + \frac{n . \delta}{r} + \frac{m . E}{r}\right)}.$$

Zur Bestimmung des Effektes haben wir die Proportion $v : v'' = 4 R : r$, wo v'' die Geschwindigkeit der Last bedeutet. Hieraus folgt die Zeit eines Aufzugs $= \frac{H}{v''} = \frac{4 H . R}{v . r}$, und die Anzahl der Aufzüge während z Arbeitsstunden $n = \frac{3600 . z . v . r}{4 H . R}$.

Diess gibt den Effekt $= \frac{3600 \,.\, z \,.\, v}{4\,H} \,.\, \frac{N \,.\, k \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{0{,}379 \left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{D} + \frac{3\,m \,.\, d}{2\,D}\right)\left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{r} + \frac{m \,.\, E}{r}\right)}$.

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 1$ ist, mithin ist der grösste Effekt $= \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, N \,.\, k}{4\,H \,.\, 0{,}379 \left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{D} + \frac{3\,m \,.\, d}{2\,D}\right)\left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{r} + \frac{m \,.\, E}{r}\right)}$, die Zeit eines Aufzuges $= \frac{4\,H \,.\, R}{c \,.\, r}$, die Anzahl Aufzüge in einem Tage $= \frac{3600 \,.\, t \,.\, c \,.\, r}{4\,H \,.\, R}$, endlich die jedesmalige Last $Q = \frac{N \,.\, k \,.\, R}{0{,}379 \,.\, r \left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{D} + \frac{3 \,.\, m \,.\, d}{2\,D}\right)\left(1 + \frac{n \,.\, \delta}{r} + \frac{m \,.\, E}{r}\right)}$.

Werden diese Ausdrücke mit den S. 118 für denselben Fall gefundenen verglichen, so sehen wir, welchen Einfluss die Reibung und Unbiegsamkeit der Seile hier nehmen.

B e i s p i e l. Es sey, wie S. 119 angenommen wurde, die Höhe des Gebäudes $H = 60$ Fuss, die Anzahl der Arbeiter $N = 4$, $k = 25$ ℔, $c = 2{,}5$ Fuss, $t = 8$ Stunden; ferner nehmen wir den Halbmesser der Rolle $D = 4$ Zoll, $d = \frac{1}{2}$ Zoll, und $E = \frac{1}{2}$ Zoll, sodann $m = \frac{1}{8}$, endlich das Gewicht der aufzuziehenden Bauobjekte $Q = 2000$ ℔ an, so ist, wenn in die Gleichung für Q substituirt wird,

$$2000 = \frac{4 \,.\, 25 \,.\, R}{0{,}379 \,.\, r \left(1 + \frac{1}{10 \,.\, 4} + \frac{3}{2} \,.\, \frac{1 \,.\, 1}{8 \,.\, 2 \,.\, 4}\right)\left(1 + \frac{1}{10 \,.\, r} + \frac{1 \,.\, 1}{8 \,.\, 2\,r}\right)} \text{ oder}$$

$$20 = \frac{R}{0{,}3974\,(r + 0{,}1625)} \text{ oder } R = 1{,}2916 + 7{,}9480 \,.\, r.$$

Wollte man $2\,r = \frac{4}{5}$ Fuss $= 9{,}6$ Zoll annehmen, so folgt $R = 39{,}44$ Zoll, oder 3 Fuss 3,4 Zoll. Für diesen Fall ist weiter die Zeit eines Aufzuges $= 789$ Sec., die Anzahl Aufzüge in einem Tage $= 36{,}5$, und der Effekt $= 36{,}5 \,.\, 2000 = 73000$ ℔ oder 730 Zentner. Werden diese Werthe mit jenen S. 119 für denselben Fall, jedoch ohne Rücksicht auf die Widerstände berechneten verglichen, so zeigt sich, dass der Effekt gegenwärtig in dem Verhältnisse von $730 : 1200 = 1 : 1{,}6$ vermindert sey. Diess rührt beinahe allein von der Vergrösserung der Last durch die bedeutende Reibung bei dem vierrolligen Flaschenzuge her, da die Reibung bei der Winde sehr unbedeutend ist.

§. 478.

Die Gleichung zwischen Kraft und Last und für den Effekt, welcher von einer gegebenen Kraft bei einem G ö p e l oder S p i r a l k o r b e mit Rücksicht auf den Reibungswiderstand bewirkt wird, ergibt sich aus folgender Berechnung:

Es sey der mittlere Halbmesser des Spiralkorbes oder $\frac{a + b}{2} = B$ und der Halbmesser der Pferdekraft $= A$, so haben wir nach §. 224 ohne Rücksicht auf den Reibungswiderstand die Gleichung $K \,.\, A = Q \,.\, B$. Nennen wir die Zugkraft, mit wel-

cher das Seil, welches sich aufwindet, durch die in der Tonne befindliche Last gespannt wird $= Z$, und die Spannung des zweiten Seiles, welches der Kraft zu Hülfe kommt $= Z'$, so ergibt sich das Moment von Seite der Last, welche wir zur Vereinfachung der Rechnung auf der mittlern Höhe annehmen wollen, auf folgende Art: Das Seil Z hat nicht bloss die Last $Q + T + \frac{1}{2}S$, sondern auch die Reibung an der Rolle zu überwinden. Weil das Seil in horizontaler Richtung und auf der andern Seite der Rolle in senkrechter Richtung läuft, so beträgt nach §. 456 der mittlere Druck auf den Zapfen $\frac{3}{2}(Q + T + \frac{1}{2}S)$, und die daselbst vorhandene Reibung $m \cdot \frac{3}{2}(Q + T + \frac{1}{2}S)$; eine Unbiegsamkeit der Kette wird hier nicht in Anschlag genommen. Wir haben demnach für die Spannung Z die Gleichung $Z \cdot E = (Q + T + \frac{1}{2}S) E + m \cdot e \cdot \frac{3}{2}(Q + T + \frac{1}{2}S)$ Fig. 36. Tab. 27.

oder $Z = (Q + T + \frac{1}{2}S)\left(1 + \frac{3\,m\,.\,e}{2\,E}\right)$.

Dieser Spannkraft kommt das zweite Seil mit der Spannung Z' zu Hülfe; an dem Ende dieses Seiles zieht das Gewicht $T + \frac{1}{2}S$ herab, welches itzt als Kraft zu betrachten ist. Wir haben hier auf gleiche Art wie in dem vorigen Falle die Gleichung $(T + \frac{1}{2}S) E = Z' \cdot E + m \cdot e \cdot \frac{3}{2}(T + \frac{1}{2}S)$ oder $Z' = (T + \frac{1}{2}S)\left(1 - \frac{3\,.\,m\,.\,e}{2\,E}\right)$, welches nunmehr die Kraft ist, die der Maschine zu Hülfe kommt.

Wir haben demnach $K \cdot A = Z \cdot B - Z' \cdot B +$ dem Momente der Reibung. Diese Reibung findet hier sowohl am liegenden als am stehenden Zapfen statt. Der obere und untere Zapfen des vertikalen Wellbaumes vom Spiralkorbe wird mit dem Drucke $Z + Z'$ an die Lager gepresst und erleidet desshalb die Reibung $m \cdot (Z + Z')$; ferner verursacht das Gesammtgewicht des Spiralkorbes das Reibungsmoment am stehenden Zapfen $M \cdot m \cdot \frac{2}{3} e'$. Wir haben also folgende Gleichung zwischen Kraft und Last:

$$K \cdot A = (Q + T + \tfrac{1}{2}S)\left(1 + \frac{3\,m\,.\,e}{2\,E}\right) B - (T + \tfrac{1}{2}S)\left(1 - \frac{3\,m\,.\,e}{2\,E}\right) B +$$
$$(Q + T + \tfrac{1}{2}S)\left(1 + \frac{3\,.\,m\,.\,e}{2E}\right) m\,.\,e' + (T + \tfrac{1}{2}S)\left(1 - \frac{3\,m\,.\,e}{2\,E}\right) m\,.\,e' + M\,.\,m\,.\,\tfrac{2}{3}\,e'.$$

Werden hier die Multiplikationen verrichtet, hiebei die Produkte zweier Brüche in der Addition ausgelassen, und die Last Q gesucht, dann der Werth für die Kraft nach der im I. Kapitel aufgestellten Formel substituirt, so ist

$$Q = \frac{N.k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)\frac{A}{B} - (2\,T + S)\left(\frac{3\,m\,.\,e}{2\,E} + \frac{m\,.\,e'}{B}\right) - \frac{M\,.\,m\,.\,2\,.\,e'}{3\,B}}{1 + \frac{3\,m\,.\,e}{2\,E} + \frac{m\,.\,e'}{B}}.$$

Wäre in diesem Ausdrucke $m = 0$, so ergibt sich die bekannte Gleichung zwischen Kraft und Last bei dem Spiralkorbe. Aus dem gegenwärtigen Ausdrucke ersehen wir aber, dass der Zähler kleiner und der Nenner grösser wird, als es ohne Reibung der Fall ist; die Last Q muss daher in doppelter Hinsicht geringer angenommen werden.

Zur Vereinfachung der Rechnung können wir die Reibung auf den stehenden Zapfen, welche bloss von dem Gewichte der Maschine herrührt, demnach nicht bedeutend seyn darf, ausser Acht lassen; wir erhalten hiedurch folgende Gleichung zur Bestimmung der Last:

Fig. 36. Tab. 27.
$$Q = \frac{\frac{N.k.A}{B}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\left(\frac{2T+S}{N.k}\right)\left(\frac{3m.e}{2E}+\frac{m.e'}{B}\right)\frac{B}{A}\right\}}{1+\frac{3m.e}{2E}+\frac{m.e'}{B}}.$$

Der Effekt der Maschine oder das in einem Tage geförderte Quantum beträgt die bekannte Grösse $\frac{3600.z.v.B}{H.A}.Q$, und wird hierin der Werth für Q substituirt, so erhalten wir den Effekt des Göpels in einem Tage

$$= \frac{\frac{3600.z.v.N.k}{H}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{B}{N.k.A}(2T+S)\left(\frac{3m.e}{2E}+\frac{m.e'}{B}\right)\right\}}{1+\frac{3m.e}{2E}+\frac{m.e'}{B}}.$$

Dieser Ausdruck soll nunmehr ein Maximum werden; wir sehen, dass er von derselben Form ist, welche wir §. 41 bei dem Tragen der Lasten in einem Traggefässe gefunden haben; es muss daher auch hier, wie es dort der Fall war, für das Maximum $\frac{v}{c}=\frac{z}{t}=1-\frac{1}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{2T+S}{N.k}\right)\left(\frac{3m.e}{2E}+\frac{m.e'}{B}\right)$ seyn.

Nach diesen Gleichungen kann nun ein jeder hieher gehörige Fall aufgelösst werden.

Beispiel. Wir wollen den §. 231 berechneten Fall nunmehr mit Rücksicht auf den Widerstand der Reibung einer neuen Berechnung unterziehen, und hiebei annehmen, dass die Leitungsrollen $E=18$ Zoll Halbmesser, $e=1$ Zoll, $E'=2$ Zoll und $m=\frac{1}{8}$ sey. Der mittlere Halbmesser wurde $B=5$ Fuss, $A=12$ Fuss, dann $T=300$ ℔ und $S=1500$ ℔, endlich $N.k=4.125$ ℔ gefunden.

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir

$\frac{v}{c}=\frac{z}{t}=1-\frac{1.5}{2.12}\left(\frac{2.300+1500}{4.125}\right)\left(\frac{3.1.1}{2.8.18}+\frac{1.2}{8.60}\right)=1-0{,}01276.$ Beträgt daher $c=4$ Fuss, so ist $v=3{,}95$ Fuss und $z=7{,}9^{h}$. Wir sehen hieraus, dass wenn die Dimensionen der Rollen und Achsen so beschaffen sind, als wir es angenommen haben, die Pferde beinahe mit der mittlern Geschwindigkeit am vortheilhaftesten verwendet werden.

Die Ladung, welche in diesem Falle in die Tonne genommen werden muss, beträgt

$$Q = \frac{\frac{4.125.12}{5}\left\{\left(2-0{,}987\right)\left(2-0{,}987\right)-\left(\frac{2.300+1500}{4.125}\right)\left(\frac{3.1.1}{2.8.18}+\frac{1.2}{8.60}\right)\frac{5}{12}\right\}}{1+\frac{3.1.1}{2.8.18}+\frac{1.2}{8.60}}$$

oder $Q=\frac{4.125.12}{5}\left(\frac{1{,}0002}{1{,}0146}\right)=1183$ ℔.

Der Effekt der Maschine in einem Tage wird daher erhalten, wenn man zur Zeit eines Aufzuges $\frac{H.A}{v.B}=\frac{1200.12}{3{,}95.5}=12{,}15^{Min.}$ die Zeit zum Ein- und Ausstürzen mit $2^{Min.}$ addirt; diess gibt $33{,}5$ Aufzüge in $7{,}9$ Stunden, demnach $33{,}5 . 11{,}8 = 395$ Zentner als gefördertes Quantum.

Aus dieser Rechnung ersehen wir, dass die Reibung bei dem Göpel so wie bei dem Rade an der Welle sehr unbedeutend ist; ihr Einfluss bewirkt nur eine um etwas kleinere Geschwindigkeit der Pferde, demnach eine geringe Vermehrung der Zeit eines

Aufzuges, und die Ladung wird wegen der, im Divisor des gefundenen Ausdruckes für Q vorkommenden Grössen auch etwas geringer, als es ohne Rücksicht auf die Reibung der Fall wäre. Uiberhaupt muss bemerkt werden, dass der unbedeutende Einfluss der Reibung hier vorzüglich in dem geringen Verhältnisse der Halbmesser der Zapfen zu den Halbmessern der Kraft und Last liege; eine weitere Verminderung des Einflusses der Reibung wäre demnach nur durch eine Vermehrung der Halbmesser der Kraft und Last zu erreichen. Dass übrigens durch den Einfluss der Reibung die Spirallinie nicht geändert werde, haben wir schon Seite 238 bemerkt.

§. 479.

Soll ein Dachstuhl mittelst englischer Heber gehoben werden, so kann man sich der §. 474 mit Rücksicht auf Reibung gefundenen Gleichung bedienen. Bezeichnen wir mit v die Geschwindigkeit, welche die Kraft an der Kurbel anwendet, so ist $\frac{22}{7} \cdot \frac{2\,A}{v}$ die Zeit, in welcher die Kurbel einmal umgedreht wird, und $\left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B}{h\,.\,v}$ die Zeit, in welcher das horizontale Rad einmal umläuft, sodann $\left(\frac{44}{7}\right)^2 \cdot \frac{A\,.\,B\,.\,H'}{h\,.\,h'\,.\,v}$ die Zeit, in welcher der Dachstuhl auf die Höhe H' geschraubt wird, endlich ist die Anzahl Hübe in einem Arbeitstage für 2 Heber

$$n = \frac{3600\,.\,z\,.\,v\,.\,N\,.\,k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)}{\frac{1}{4}\,Q\,.\,H'\,(1 + 5{,}806)}.$$

Die Arbeit muss so eingerichtet werden, dass in einem Tage möglichst viel Hübe zu Stande kommen, demnach muss v = c und z = t seyn; diess gibt die grösste Anzahl Hübe in einem Tage $n = \frac{3600\,.\,t\,.\,c\,.\,N\,.\,k}{\frac{1}{4}\,Q\,.\,H'\,(1 + 5{,}806)}$.

Aus dieser Rechnung ersehen wir, dass die Arbeiter, wenn sie den vortheilhaftesten Effekt zu Stande bringen sollen, sich auch itzt, wo auf die Reibung Rücksicht genommen wurde, mit der mittlern Geschwindigkeit durch die gewohnte Arbeitszeit beschäftigen müssen; die Reibung nimmt daher auf die Geschwindigkeit bei der Arbeit und die Anzahl Hübe keinen Einfluss. Da jedoch der Widerstand durch die Reibung vermehrt wird, so werden nunmehr entweder mehr Arbeitsleute erfordert, um eine gegebene Last zu gewältigen, oder es müssen die Hebelsarme der Maschine geändert werden, um dieselbe Anzahl Menschen, welche ohne Rücksicht auf Reibung berechnet wurde, in Stand zu setzen, die Last sammt der Reibung zu überwältigen; oder aber die Menschen müssen, wie bereits bei dem Tragen einer bestimmten Last §. 39 gezeigt wurde, mit einer geringern Geschwindigkeit und in einer kleinern Anzahl Arbeitsstunden den Mangel an Kraft ersetzen.

Für den letzten Fall haben wir ohne Rücksicht auf Reibung S. 157 die Gleichung $N\,.\,k = \frac{Q}{4} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h\,.\,h'}{A\,.\,B}$, dann mit Rücksicht auf Reibung S. 525 die Gleichung $N\,.\,k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) = \left(1 + 5{,}806\right)\frac{Q}{4} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{h\,.\,h'}{A\,.\,B}$ gefunden. Sollten nun dieselben

Menschen die Arbeit mit und ohne Rücksicht auf Reibung verrichten, so kann man beide Gleichungen mitsammen dividiren, und man erhält $1+5{,}806 = \left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right) = \left(2-\frac{v}{c}\right)^2$, da beide Verhältnisse einander gleich seyn müssen. Hieraus folgt $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 2 - \sqrt{6{,}806}$; da nun $\sqrt{6{,}806}$ grösser als 2 ist, so folgt, dass die Arbeiter selbst bei der kleinsten Geschwindigkeit und kleinsten Arbeitszeit ($v = 0$ und $z = 0$) die Arbeit noch nicht zu gewältigen im Stande sind, dass man also entweder mehr Maschinen anstellen, oder den S. 157 angenommenen zwei Winden eine solche Einrichtung geben müsse, wobei die Arbeit wirklich möglich wird.

In dem Beispiele Seite 157 ist bei dem englischen Heber $A = 12$ Zoll, $B = 6$ Zoll, $h = \frac{3}{4}$ Zoll und $h' = 1$ Zoll.

Demnach bestimmt sich die erforderliche Anzahl Menschen aus der Gleichung $N.25 = \frac{600000}{4} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{\frac{3}{4}.1}{12.6}(1+5{,}806)$, woraus $N = 10{,}8$ folgt, man müsste daher 5 Winden, deren jede durch 2 Arbeiter bedient wird, anstellen.

Nimmt man dagegen den Halbmesser der Kurbel $A = 15$ Zoll und bloss $N = 4$ Menschen an, so ist $4 . 25 = \frac{600000}{4} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{\frac{3}{4}.1}{15.B} . (1+5{,}806)$, woraus $B = 12{,}9$ Zoll folgt; der Durchmesser dieses Rades muss daher 25,8 Zoll betragen, damit die Arbeit mit der gegebenen Anzahl von 4 Menschen möglich wird.

Wollte man sich des französischen Hebers bedienen, wobei $A = 12$ Zoll, $B = 2$ Zoll, $h = \frac{3}{4}$ Zoll und $h' = 1$ Zoll ist, so erhalten wir $N.25 = \frac{600000}{4}\left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \frac{\frac{3}{4}.1}{12.2}(1+5{,}806)$, woraus $N = 32{,}3$ oder 32 Menschen folgt; es müssten daher 8 Winden, eine jede zu 4 Menschen angestellt werden.

Hieraus sehen wir nun, dass der englische Heber weit wirksamer ist, als der französische, indem man bei dem erstern nur 10 Menschen, bei dem letztern aber 32 Menschen benöthigt, um dieselbe Arbeit zu verrichten. Die Ursache hievon ist, weil bei dem englischen Heber das horizontale Rad einen weit grössern Halbmesser hat, als bei der französischen Winde.

VI. Kapitel.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 480.

Wir haben §. 8 die Begriffe von Bewegung, Raum, Zeit und Geschwindigkeit aufgestellt, und weiter bemerkt, dass eine jede Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig sey. Da wir die gleichförmige Bewegung bereits abgehandelt haben, so übergehen wir sogleich zur gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Eine jede gleichförmig beschleunigte Bewegung kann nur dadurch entstehen, wenn ein Körper, der entweder schon in Bewegung ist, oder sich in Ruhe befindet, eine Einwirkung von einer Kraft dergestalt erleidet, dass diese Kraft während der ganzen Zeit, als die Bewegung fortdauert, gleichstark auf den Körper wirkt. Der freie Fall aller schweren Körper biethet uns das erste Beispiel einer gleichförmig beschleunigten Bewegung dar. Es ist nämlich bekannt, dass ein jeder Körper gegen seine Unterlage drückt (welcher Druck sein absolutes Gewicht bestimmt), und dass der Körper herabfällt, sobald die Unterlage weggenommen wird. Die Ursache dieses Druckes und des Falles der Körper ist eine Kraft, welche die innersten Theile derselben gleichsam durchdringt, und Schwere oder Schwerkraft (*la gravité*) genannt wird. Diese Kraft wirkt auf alle Theile der Materie eines Körpers zu allen Zeiten gleich stark ein, und ertheilt einem jeden Körper, der aus der Ruhe fällt, dieselbe Bewegung; man kann demnach die Schwere nahe an der Oberfläche der Erde als eine beständige Kraft annehmen. Die Physik lehrt uns zwar, dass die in gleichen Zeiten beschriebenen Räume am Aequator kleiner, und bei den Polen grösser sind, weil die Körper am ersten Orte vom Mittelpunkte der Erde weiter entfernt, als bei den Polen sind, allein die Unterschiede, welche hiedurch im Falle der Körper entstehen, sind so unbedeutend, dass sie bei den gewöhnlichen Berechnungen der Mechanik ohne Anstand ausser Acht gelassen werden können.

§. 481.

Die Gleichung für die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach jeder gegebenen Zeit findet man auf folgende Art: Wenn ein Körper frei herabfällt, so hat er im Augenblicke, bevor er seine Bewegung anfängt, noch keine Geschwindigkeit, oder dieselbe ist $= 0$. Wie er sich nun selbst überlassen wird, so fällt er in senkrechter Richtung auf die Oberfläche des Wassers oder gegen den Schwerpunkt der Erde, welcher gewöhnlich im Mittelpunkte derselben angenommen wird, herab, und nimmt eine Geschwindigkeit an, welche wir nach Ablauf oder am Ende der ersten Sekunde $= c$ setzen wollen. Da nun der Körper durch die erworbene Geschwindigkeit die Fähigkeit hat, in jeder folgenden Sekunde den Raum c

zu beschreiben, so würde er sich auch mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegen, wenn nun nichts mehr auf ihn einwirken würde. Allein die dem Körper eigenthümliche Schwere wirkt in der zweiten Sekunde eben so stark, wie in der ersten auf ihn, sie gibt demnach seiner Bewegung einen gleichen Zusatz wie in der ersten Sekunde, d. h. sie vermehrt seine Geschwindigkeit wieder um dieselbe Grösse c, er wird sonach am Ende der zweiten Sekunde die Geschwindigkeit 2 c haben. Würde nun wieder nichts mehr auf den Körper einwirken, so würde er in jeder folgenden Sekunde den Raum 2 c beschreiben, die Schwere wirkt aber in der dritten Sekunde eben so stark, wie in der ersten, d. h. sie gibt ihm am Ende der dritten Sekunde abermal eine Vermehrung der Geschwindigkeit um c, und da er schon die Geschwindigkeit 2 c hat, so wird der Körper am Ende der dritten Sekunde die Geschwindigkeit 3 c erlangen. Aus demselben Grunde ist die Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers am Ende der vierten Sekunde $= 4$ c, am Ende der fünften Sekunde $= 5$ c.... Nennen wir daher v die Endgeschwindigkeit nach der Zeit t (in Sekunden ausgedrückt) so erhalten wir die Gleichung $v = c \,.\, t$, worin c die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der ersten Sekunde ist.

§. 482.

Der Raum, den ein Körper durch den freien Fall zurücklegt, ist dem Produkte aus dem Quadrate der dazu nöthigen Zeit in den mittlern Raum der Zeiteinheit gleich.

Wir haben gesehen, dass die Geschwindigkeit, welche der Körper am Ende der 1, 2, 3 t Sekunde erhält, $= c,\ 2\,c,\ 3\,c \ldots\ldots t\,.\,c$ sey. Weil aber der Körper seine Bewegung von der Ruhe anfing, so ist seine anfängliche Geschwindigkeit $= 0$, und man hat für die Zunahme der Geschwindigkeiten folgende Progression: $0,\ c,\ 2\,c,\ 3\,c \ldots\ldots t\,.\,c$. Da wir hieraus sehen, dass die Geschwindigkeit gleichförmig zunimmt, so können wir zur Bestimmung des Raumes das arithmetische Mittel zwischen der ersten und letzten Geschwindigkeit nehmen, und diese als diejenige betrachten, womit der Körper gleichförmig fortgeht. Die Geschwindigkeit des Körpers ist zu Anfange des Falles $= 0$, die Endgeschwindigkeit $v = c \,.\, t$, folglich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{0 + c\,t}{2} = \frac{c\,.\,t}{2}$, und da die Bewegung itzt als gleichförmig betrachtet wird, so ist der Raum S $=$ dem Produkte aus der Zeit t in die Geschwindigkeit $\frac{c\,.\,t}{2}$, oder $S = \frac{c\,.\,t^2}{2}$.

§. 483.

Um den Raum S einer gleichförmig beschleunigten Bewegung aus der vorstehenden Gleichung in Zahlen finden zu können, kommt es vor allem darauf an, die Grösse c oder die Geschwindigkeit, welche der Körper zu Ende der ersten Sekunde erlangt, zu bestimmen. Diess müsste durch einen Versuch ausgemittelt werden, allein, wie soll man diesen Versuch anstellen, nachdem ein jeder Körper, wie wir gesehen haben, fortwährend eine grössere Geschwindigkeit erhält, und diess zwar nicht bloss von Sekunde zu Sekunde, sondern von einem Augenblicke oder Momente seiner Bewegung zum an-

dern. Dagegen ist es nicht so schwierig, den Raum zu finden, welchen ein Körper in einer bestimmten Anzahl von Sekunden zurücklegt.

Genaue Beobachtungen dieser Art sind sehr häufig gemacht worden, und man hat gefunden, dass der Raum eines Körpers in der ersten Sekunde 15,515 Niederösterreicher Fuss betrage. Man bezeichnet diesen Raum in der ersten Sekunde gewöhnlich mit dem Buchstaben g, so dass $g = 15{,}515$ Fuss ist. Diess gewährt den Vortheil, dass man nun g in jedem Lande, wo ein anderes Maass üblich ist, in diesem Maasse berechnen kann. So beträgt $g = 15{,}098$ Pariser Fuss, 15,624 Berliner Fuss u. s. w. Da nun die Gleichung $S = \frac{c \cdot t^2}{2}$ für den Fallraum der Körper allgemein gilt, so findet sie auch für $t = 1$ statt, in welchem Falle $S = 15{,}5 = g$ wird, und wenn man diess substituirt, so ist $15{,}5 = \frac{c \cdot 1}{2} = g$, woraus $\underbrace{c = 31 \text{ Fuss} = 2\, g}$ folgt, d. h. die Endgeschwindigkeit eines freifallenden Körpers nach der ersten Sekunde beträgt 31 Fuss; würde daher die Schwere nach der ersten Sekunde auf den Körper zu wirken aufhören, so würde er in der zweiten und jeder folgenden Sekunde den Raum von 31 Fuss zurücklegen.

Wir haben daher zur Bestimmung des freien Falles der Körper die 2 Gleichungen $S = \frac{c \cdot t^2}{2} = g \cdot t^2$ und $v = c \cdot t = 2\, g \cdot t$. *)

§. 484.

Aus der Gleichung $S = g \cdot t^2$ folgt, dass **die Räume, welche in verschiedenen Zeiten bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zurückgelegt werden, sich wie die Quadrate dieser Zeiten verhalten.**

Wenn man nämlich für t verschiedene Werthe annimmt, und zwar: $t = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$, so ist $S = 0,\ g,\ 4\,g,\ 9\,g,\ 16\,g \ldots\ldots$, d. h. die Räume sind den Quadraten der natürlichen Zahlen proportional; wenn man jedoch in der Reihe $0,\ g,\ 4\,g,\ 9\,g,\ 16\,g \ldots$ die Differenzen nimmt, so betragen selbe $g,\ 3\,g,\ 5\,g,\ 7\,g \ldots$, d. h. **die Räume, welche durch den freien Fall in gleichen hinter einander folgenden Zeitabtheilungen zurückgelegt werden, wachsen wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9**

§. 485.

In den Gleichungen $S = g \cdot t^2$ und $v = 2\, g \cdot t$ kommen (da g bestimmt ist) 3 veränderliche Grössen S, t und v vor; wenn daher nur eine Grösse gegeben ist, so kann man die übrigen 2 finden, und zwar:

*) Nach den Gesetzen der Differenzialrechnung wird der Raum $d\,S$ in einer unendlich kleinen Zeit $d\,t$ erhalten, wenn die Geschwindigkeit $2\,g \cdot t$, womit sich der Körper bewegt, mit $d\,t$ multiplicirt wird, indem in der unendlich kleinen Zeit keine Beschleunigung eintritt, also ist $d\,S = 2\,g \cdot t \cdot d\,t$. Das Integral hievon ist $S = g \cdot t^2$, wo keine beständige Grösse beizusetzen kommt, weil für $t = 0$ der Raum S verschwindet.

Wenn t gegeben ist, so ist $S = g \cdot t^2$ und $v = 2\, g \cdot t$.

Wenn S gegeben ist, so ist $v = 2 \sqrt{g \cdot S}$ und $t = \sqrt{\frac{S}{g}}$.

Wenn v gegeben ist, so ist $t = \frac{v}{2\,g}$ und $S = \frac{v^2}{4g}$; den letzten Ausdruck werden wir bei den folgenden Berechnungen sehr häufig brauchen und bemerken, dass man $S = \frac{v^2}{4g}$ die Geschwindigkeitshöhe oder diejenige Höhe nennt, von welcher ein Körper herabfallen müsste, um die Endgeschwindigkeit v zu erhalten.

1. Beispiel. Wie gross ist die Endgeschwindigkeit, welche ein Stein erhält, wenn er in einen 100 Klafter tiefen Schacht frei fällt, und binnen welcher Zeit kommt er hinab?

Es ist $v = 2 \sqrt{g \cdot S} = 2 \sqrt{15{,}5 \cdot 600} = 192{,}88$ Fuss; der Körper erreicht sonach am Ende seines Falles die Geschwindigkeit einer Flintenkugel. Die Zeit, in welcher der Körper unten in dem Schachte auffällt, ist $t = \sqrt{\frac{S}{g}} = \sqrt{\frac{600}{15{,}5}} = 6{,}22$ Sekunden.

2. Beispiel. Nach den Erzählungen von Reisenden soll es in Schweden Höhlen geben, wobei man, wenn man Steine hineinfallen lässt, selbe erst nach 25 Sekunden unten auffallen hört. Wie tief sind diese Höhlen?

Es ist $S = g \cdot t^2 = 15{,}5 \cdot 25^2 = 9687{,}5$ Fuss $=$ 1614 Klafter 3 Fuss 6 Zoll.

Diese Rechnungen gewähren inzwischen keine sehr grosse Genauigkeit, weil:

1tens Die oben angeführten 15,5 Fuss der Fallraum der Körper in einer Sekunde und zwar im luftleeren Raume sind, wo allerdings alle Körper einen gleichen Raum zurücklegen, da kein Widerstand der Luft statt findet. Da nun aber alle Körper in der Luft fallen, so erleiden sie eine Verminderung der Bewegung, welche sich nach ihrer Gestalt, ihrem Gewichte u. s. w. richtet, und hiernach erst abgeleitet werden müsste.

2tens Bei dem zweiten Beispiele findet insbesondere noch eine wichtige Rücksicht statt, nämlich, dass die Zeit von 25 Sekunden nicht nur die eigentliche Zeit des Fallens des Körpers, sondern auch jene Zeit enthält, welche der Schall braucht, ehe er von dem Momente, wo der Körper unten auffällt, bis hinauf kommt. Dieser letztere Umstand lässt sich jedoch in Rechnung ziehen, nachdem es bekannt ist, welchen Raum der Schall in 1 Sekunde zurücklegt. Dieser Raum beträgt nämlich nach den Versuchen von *Benzenberg* 1058 Nieder-Oesterreicher Fuss. Es zerfällt demnach die Zeit von 25 Sekunden in zwei Theile x und y, wovon x die eigentliche Fallzeit und y jene Zeit ist, in welcher der Schall von unten bis hinauf kommt.

Es ist daher $S = 15{,}5\, x^2$, und da der Schall nach der obigen Erfahrung in einer Sekunde 1058 Fuss zurücklegt, so ist auch $S = 1058\, y$, folglich: $15{,}5\, x^2 = 1058\, y$, wozu die zweite Gleichung $25 = x + y$ kommt. Um aus diesen zwei Gleichungen die Grössen x und y zu finden, substituiren wir den Werth $y = 25 - x$ in die erste Gleichung,

und erhalten sonach: $15{,}5\, x^2 = 1058\,(25 - x)$ und $x^2 + \frac{1058\,x}{15{,}5} = \frac{1058\,.\,25}{15{,}5}$,

woraus $x = -\frac{1058}{31} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{1058}{31}\right)^2 + 2\frac{.\,1058\,.\,25}{31}\right\}}$ folgt, wo offenbar bloss $+\sqrt{}$ statt finden kann, weil sonst x negativ wäre, folglich ist $x = -\frac{1058}{31} + \frac{1661{,}103}{31} = 19{,}455$ Sec., mithin $y = 25 - 19{,}455 = 5{,}545$ Sekunden für den Schall. Hieraus ergibt sich nun die eigentliche Tiefe jener Höhlen $S = 15{,}5\,.\,x^2 = 5866{,}7$ Fuss $= 977{,}8$ Klafter, wobei aber noch der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt ist; die Tiefe der Höhlen beträgt daher weniger.

§. 486.

Nebst dem freien Falle haben wir vorzüglich noch die Bewegung geworfener Körper zu betrachten. Ein jeder Körper kann nach dreierlei Richtungen, nämlich senkrecht hinab, senkrecht hinauf und in einer zwischen diesen liegenden schiefen Richtung geworfen werden; wir haben daher diese 3 Fälle nach einander zu untersuchen.

Es sey C die Geschwindigkeit, welche einem Körper durch den Wurf senkrecht hinab gegeben wird, so ist offenbar, dass, wenn die Schwere nicht auf den Körper wirken würde, er sich mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit C gleichförmig fortbewegen und den Raum C . t beschreiben müsste; allein, da der Körper selbst schwer ist, und wie wir gesehen haben, die Schwere seine Geschwindigkeit in einer Sekunde um c vermehrt, oder ihm diese Geschwindigkeit gibt, so muss die Geschwindigkeit des herabgeworfenen Körpers am Ende der ersten Sekunde C + c seyn. Da nun der Körper die anfängliche Geschwindigkeit C immer behält, die Wirkung der Schwere aber in jeder Sekunde ein c zusetzt, so ist die Geschwindigkeit nach t Sekunden, welche wir v nennen wollen, $\underbrace{v = C + 2\,g\,.\,t}$. Auf gleiche Art ist der Raum $\underbrace{S = C\,.\,t + g\,.\,t^2}$, da er aus dem Theile C . t, welchen der Körper wegen der ihm anfangs ertheilten Geschwindigkeit mit gleichförmiger Bewegung beschreibt, und nebstbei aus $g\,.\,t^2$ oder der Wirkung der Schwere besteht.

§. 487.

In den zwei Gleichungen $v = C + 2\,g\,.\,t$ und $S = C\,.\,t + g\,.\,t^2$ kommen vier veränderliche Grössen v, C, t und S vor; man muss daher zwei hievon wissen, um die Bewegung eines senkrecht herabgeworfenen Körpers berechnen zu können. Ist nämlich C und t bekannt, so ist $v = C + 2\,g\,.\,t$ und $S = C\,.\,t + g\,.\,t^2$; wäre aber v und C gegeben, so ist $\frac{v - C}{2g} = t$ und $S = (C + g\,t)\,t = \left(C + g\,\frac{(v - C)}{2\,g}\right)\left(\frac{v - C}{2\,g}\right)$ $= \frac{v^2 - C^2}{4\,g}$, d. h. S ist gleich der Differenz der Fallhöhen, da $\frac{v^2}{4g}$ und $\frac{C^2}{4\,g}$ die Höhen sind, von welchen ein Körper herabfallen müsste, um am Ende die Geschwindigkeit v und C zu erhalten.

Wäre endlich S und C bekannt, so ist aus der letzten Formel

$v = \sqrt{(C^2 + 4\,g\,.S)}$ und $t = \frac{\sqrt{(C^2 + 4\,g\,.\,S)} - C}{2\,g}$. Wir erhalten sonach folgende

sechs Formeln $v = C + 2g.t = \sqrt{(C^2 + 4g.S)}$, dann $S = C.t + g.t^2 = \frac{v^2 - C^2}{4g}$ und $t = \frac{v - C}{2g} = \frac{\sqrt{(C^2+4g.S)} - C}{2g}$. Wenn man in diesen Formeln die Geschwindigkeit $C = 0$ setzt, so erhält man gerade dieselben Ausdrücke, welche wir §. 485 für den freien Fall der Körper gefunden haben.

§. 488.

1. Beispiel. Man wirft einen Körper mit der Geschwindigkeit von $C = 5$ Fuss hinab, er soll aber eine Geschwindigkeit $v = 80$ Fuss erhalten, wie tief und wie lange muss er zu diesem Behufe fallen?

Es ist $S = \frac{v^2 - C^2}{4g} = \frac{6400 - 25}{62} = 102{,}82$ Fuss und

$t = \frac{v - C}{2g} = \frac{80 - 5}{31} = 2{,}419$ Sekunden.

2. Beispiel. Man wirft einen Körper mit der Geschwindigkeit $C = 10$ Fuss, und er fällt $S = 100$ Fuss tief, wie gross ist die Geschwindigkeit, mit der er unten anschlägt?

Es ist $v = \sqrt{(C^2 + 4g.S)} = \sqrt{(100 + 62.100)} = 79{,}37$ Fuss.

§. 489.

Ein jeder Körper, der senkrecht hinaufgeworfen wird, nimmt eine gleichförmig verminderte oder gleichförmig verzögerte Bewegung an, da seine Geschwindigkeit nach einem beständigen Gesetze abnimmt. Die Ursache dieser Verminderung ist die Schwere, welche der Bewegung des hinaufgeworfenen Körpers entgegensteht, und weil sie immer gleich stark wirkt, seiner Bewegung eben so viel entzieht, als sie ihm zusetzen würde, wenn er senkrecht herabfiele. Nach diesem Grundsatze lässt sich die Geschwindigkeit und der Raum eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers für jede gegebene Zeit bestimmen.

Es sey nämlich C die Geschwindigkeit, womit der Körper in die Höhe geworfen wird, so würde derselbe, wenn nichts auf ihn einwirkte, in jeder folgenden Sekunde den Raum C zurücklegen. Da nun aber die Schwere ihn senkrecht herabzieht, und seine Geschwindigkeit nach Verlauf der ersten Sekunde um 2 g vermindert, so ist seine wirkliche Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde $= C - 2g$. Aus gleichem Grunde ist seine Geschwindigkeit am Ende der zweiten Sekunde $= C - 2.2g$, am Ende der dritten Sekunde $= C - 3.2g \ldots\ldots$; am Ende von t Sekunden ist die Geschwindigkeit $v = C - t.2g$.

Hinsichtlich des Raumes entzieht die Schwere dem Körper von Sekunde zu Sekunde $g, 4g, 9g, \ldots. g.t^2$, folglich ist der Raum, welchen er in der ersten Sekunde beschreibt $= C - g$, der Raum bis zum Ablauf von 2 Sekunden $= 2C - 4g$, bis zum Ende der dritten Sekunde $= 3C - 9g \ldots\ldots$, folglich ist der ganze in t Sekunden beschriebene Raum $S = C.t - g.t^2$.

§. 490.

In den zwei Gleichungen: $v = C - 2g.t$ und $S = C.t - g.t^2$ kommen vier unbekannte Grössen v, C, t, S vor; es müssen daher abermal 2 hievon gegeben seyn, um die andern bestimmen zu können. Zu dieser Bestimmung erhält man folgende Gleichungen: $v = C - 2g.t = \pm\sqrt{(C^2 - 4g.S)}$, dann $S = C.t - g.t^2 = \frac{C^2 - v^2}{4g}$, und $t = \frac{C - v}{2g} = \frac{C \mp \sqrt{(C^2 - 4g.S)}}{2g}$.

Vergleicht man diese Formeln mit jenen, welche §. 487 für die Bewegung senkrecht hinab geworfener Körp er gefunden wurden, so sieht man, dass selbe einander ganz gleich kommen und sich nur in Hinsicht des Einflusses der Schwere durch das Zeichen + und — vor der Grösse g unterscheiden, nachdem diejenige Grösse, um welche die Bewegung senkrecht hinab geworfener Körper durch die Schwere vermehrt wird, eine eben so grosse Verminderung bei der Bewegung senkrecht hinauf geworfener Körper hervorbringt.

§. 491.

Beispiel. Es sey die Bewegung eines, mit der Geschwindigkeit von 310 Fuss senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers zu berechnen.

Man nehme für t in den zwei Formeln $v = C - 2g.t$ und $S = C.t - g.t^2$ verschiedene Werthe an, und man erhält:

t in Sekunden	$v = C - 2g.t = 310 - 31\,t.$	$S = C.t - g.t^2 = 310\,t - 15{,}5\,t^2.$
0	310 Fuss	0 Fuss
1	279 „	294,5 „
2	248 „	558 „
3	217 „	790,5 „
4	186 „	992 „
5	155 „	1162,5 „
6	124 „	1302 „
7	93 „	1410,5 „
8	62 „	1488 „
9	31 „	1534,5 „
10	0 „	1550 „
11	— 31 „	1534,5 „
12	— 62 „	1488 „
13	— 93 „	1410,5 „
14	— 124 „	1302 „
15	— 155 „	1162,5 „
16	— 186 „	992 „
17	— 217 „	790,5 „
18	— 248 „	558 „
19	— 279 „	294,5 „
20	— 310 „	0 „

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass der Körper 10 Sekunden in die Höhe steigt, und da er sodann seine grösste Höhe erreicht hat, so fällt er wieder herab, d. h. er erhält eine der vorigen entgegengesetzte oder negative Geschwindigkeit und sein Raum, d. h. seine Entfernung von dem Punkte, wo er ausgeworfen wurde, vermindert sich, da er demselben wieder näher kommt.

§. 492.

Die grösste Höhe, auf welche ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper steigt, wird auf folgende Art gefunden:

Der Körper steigt so lange, bis er seine ganze, durch den Wurf erworbene Geschwindigkeit verliert, d. i. bis $v = C - 2g.t = 0$, woraus die Zeit $t = \frac{C}{2g}$ gefunden wird. Substituirt man nun diesen Werth in die Gleichung für den Raum, so ist $S = C.\frac{C}{2g} - g.\frac{C^2}{4g^2} = \frac{C^2}{4g}$, d. i. der Körper steigt so hoch, als er hätte fallen müssen, um seine Wurfsgeschwindigkeit C zu erhalten. Wir haben bereits bemerkt, dass diese Höhe die Geschwindigkeitshöhe, d. h. die zur Erlangung der Geschwindigkeit C gehörige Höhe ist. In dem Beispiele §. 491 war $C = 310$, folglich ist die grösste Höhe, welche der Körper ersteigt $S = \frac{C^2}{4g} = \frac{310.310}{62} = 1550$ Fuss und die Zeit, in welcher der Körper diese grösste Höhe erreicht, ist $t = \frac{C}{2g} = \frac{310}{31} = 10$ Sekunden.

§. 493.

Auf gleiche Art ergibt sich die Zeit, in welcher ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper wieder zurück kommt. Man findet diess aus der Gleichung für den Raum $S = C.t - g.t^2 = t\,(C - g.t)$. Dieser Ausdruck wird offenbar in zwei Fällen zu Null, nämlich, wenn der Körper zu steigen anfängt, und wenn er wieder herunter oder in den Punkt zurück kommt, von wo er ausgeworfen wurde. Im Anfange des Steigens ist $t = 0$, folglich auch $S = 0$, es muss daher der Ausdruck $C - g.t = 0$ werden, wenn der Körper wieder herabkommt. Hieraus findet man $t = \frac{C}{g}$, welches sonach die Zeit ist, in welcher der Körper wieder von oben herabkommt. Zieht man von dieser Zeit $t = \frac{C}{g}$ die gefundene Zeit des Steigens $t = \frac{C}{2g}$ ab, so bleibt $\frac{C}{g} - \frac{C}{2g} = \frac{C}{2g}$ die Zeit des Rückfalles. Hieraus folgt, dass die Zeit, während welcher ein Körper senkrecht hinaufsteigt, eben so gross sey, als die Zeit, durch welche er wieder herabfällt. In dem obigen Beispiele, wo ein Körper mit 310 Fuss Geschwindigkeit hinaufgeworfen wurde, steigt er 10 Sekunden und braucht zu seinem Rückfalle abermal 10 Sekunden.

§. 494.

Aus der Zeit, in welcher ein Körper wieder herabkommt, kann man nun auch die Geschwindigkeit finden, mit der er geworfen wurde.

Da nämlich die Zeit, welche der Körper zum Hinaufsteigen und Herabfallen braucht, $t = \frac{C}{g}$ ist, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er ausgeworfen wurde, $C = g.t$. In

unserm Beispiele kommt der in die Höhe geworfene Körper in 20 Sekunden wieder auf den Punkt, von wo er ausgeworfen wurde, herab, er ist sonach mit der Geschwindigkeit $C = g \cdot t = 15{,}5 \cdot 20 = 310$ Fuss in die Höhe geworfen worden.

Von diesem Satze wird bei den Pulverproben in der Artillerie Gebrauch gemacht; man beobachtet nämlich die Zeit, in welcher eine Kugel, welche durch eine gewisse Menge Pulver aus der Kanone geschossen wurde, wieder herabkommt; aus dieser Zeit lässt sich die Wurfsgeschwindigkeit berechnen, und sonach die Güte des Pulvers beurtheilen. Da nämlich die Wurfsgeschwindigkeit desto grösser ist, je grösser die Zeit ist, bis der Körper wieder herabkommt, so wird auch dasjenige Pulver besser seyn, bei dessen Anwendung eine abgeschossene Kugel später den Boden trifft.

§. 495.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper wieder auf seinen Ort zurück kommt, ist eben so gross wie jene, mit welcher er ausgeworfen worden ist.

Wir fanden die Zeit, in welcher der Körper wieder auf den Boden herabkommt $t = \frac{C}{g}$. Wird diess in die allgemeine Formel für die Geschwindigkeit substituirt, so ist $v = C - 2g \cdot t = C - 2g \cdot \frac{C}{g} = -C$, d. h. die Geschwindigkeit am Ende ist so gross, als die anfängliche, jedoch in entgegengesetzter Richtung, indem der Körper im Augenblicke, als er herabkommt, das Vermögen hat, denselben Raum, welchen er beim Werfen in einer Sekunde hinauf beschrieb, nun hinunter zurückzulegen.

§. 496.

Man kann nun auch die Zeit, binnen welcher der Körper eine bestimmte Höhe erreicht, berechnen. Es ist nämlich $S = C \cdot t - g \cdot t^2$, woraus man $t = \frac{C \pm \sqrt{(C^2 - 4g \cdot S)}}{2g}$ findet.

Beispiel. Wann kommt ein Körper, der mit der Geschwindigkeit von 310 Fuss abgeschossen wurde, auf die Höhe von 1410,5 Fuss?

Es ist $t = \frac{310 \pm \sqrt{(310^2 - 62 \cdot 1410{,}5)}}{31} = \frac{310 \pm 93}{31}$. Es fragt sich nun, ob man hier den positiven oder negativen Werth für die Wurzel nehmen solle? Um diess zu entscheiden, stelle A D den ganzen Raum, welchen der Körper beschreibt, vor, A B seyen die 1410,5 Fuss, für welche die Zeit des Steigens gesucht wird, so wird offenbar der Körper, wenn er in B keinen Widerstand findet, bis D weiter gehen; also ist $\frac{310 - 93}{31}$ die Zeit, in welcher der Körper von A nach B kommt. Hierauf geht er bis D und von da wieder herunter nach B, es ist daher $\frac{310 + 93}{31}$ die Zeit, in welcher der Körper zum zweitenmale nach B kommt. Fig. 1. Tab. 28.

Fig. 1. Tab. 28. Diess lässt sich auch auf folgende Art zeigen: Da $C = 310$ Fuss die Wurfsgeschwindigkeit, so ist die grösste Höhe, welche der Körper erreicht, $AD = \frac{C^2}{4g} = \frac{310^2}{62} = 1550$ Fuss, folglich das übrige Stück $BD = AD - AB = 1550 - 1410{,}5 = 139{,}5$ Fuss. Soll der Körper diesen Raum zurücklegen, so muss seine in B vorhandene Geschwindigkeit $C = 2\sqrt{g \, . \, BD} = 2\sqrt{(15{,}5 \, . \, 139{,}5)} = 93$ Fuss seyn. Hieraus ergibt sich nun die Zeit, wie lange er von B bis D steigt, nach §. 492, $t = \frac{C}{2g} = \frac{93}{31} = 3^{\text{Sec.}}$, was gerade auch in der obigen Tabelle vorkommt. Demnach ist die Zeit, wann der Körper zum erstenmal in B eintrifft $= \frac{310 - 93}{31} = 7$ Sekunden und die Zeit, wann er zum zweitenmal in B ankommt $= \frac{310 + 93}{31} = 13$ Sekunden.

§. 497.

Der Körper mag steigen oder fallen, so hat er auf gleichen Höhen immer gleiche Geschwindigkeiten. Um diess zu beweisen, muss man die Geschwindigkeit v durch den Raum S ausdrücken. Es ist nämlich

$$v = C - 2g \, . \, t \text{ und } t = \frac{C \mp \sqrt{(C^2 - 4g \, . \, S)}}{2g}, \text{ folglich}$$

$$v = C - 2g \left\{ \frac{C \mp \sqrt{(C^2 - 4g \, . \, S)}}{2g} \right\} = \pm \sqrt{(C^2 - 4g \, . \, S)},$$ woraus man sieht, dass die Geschwindigkeit auf gleichen Höhen, welche der Körper im Hinauf- oder Herabgehen erreicht, auch gleich ist, indem sie sich nur durch das Zeichen + und — vor dem Wurzelzeichen unterscheidet.

Es sey in dem obigen Beispiele die Geschwindigkeit zu finden, welche der Körper auf der Höhe von 1302 Fuss erreicht; es ist demnach $v = \pm \sqrt{(310^2 - 62 \, . \, 1302)} = \pm 124$, d. h. der Körper hat, wenn er auf die Höhe von 1302 Fuss kommt, im Hinaufsteigen die Geschwindigkeit + 124 und im Hinabfallen auf derselben Höhe die Geschwindigkeit — 124 Fuss.

Die bisherige Rechnung ist ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft gemacht; die Aenderungen, welche derselbe verursacht, werden im zweiten Bande, wo von dem Widerstande der Flüssigkeiten gehandelt werden wird, gezeigt werden.

§. 498.

Fig. 2. **Die Bahn eines schief in die Höhe geworfenen Körpers wird auf folgende Art bestimmt.** Es sey $c = AB$ die Geschwindigkeit, mit der ein Körper geworfen wird, oder der Raum, welchen er ohne Einfluss seiner Schwere in der ersten Sekunde beschreiben würde. Man löse diesen Raum in zwei Theile A D und A C auf, so wird der Körper offenbar in einer Sekunde um B D gehoben, und geht zu gleicher Zeit in der horizontalen Richtung um A D weiter. Nennen wir den Winkel, unter welchem der Körper geworfen oder geschossen wird $= w$, so ist $BD : AB = \text{Sin}\, w : 1$ und $BD = c \, . \, \text{Sin}\, w$, ferner $AD : AB = \text{Cos}\, w : 1$ und $AD = c \, . \, \text{Cos}\, w$.

Es ist offenbar, dass die Schwere nur der senkrechten, nicht aber der horizontalen Richtung entgegenwirken wird; wenn sich daher der obige Körper nur allein in der horizontalen Richtung bewegen möchte, so würde er fortwährend die Geschwindigkeit c . Cos w behalten, und den horizontalen Raum = c . t . Cos w in t Sekunden beschreiben. Was jedoch die senkrechte Bewegung des Körpers betrifft, so wird selbe durch die Wirkung der Schwere fortwährend vermindert, und zwar hinsichtlich der Geschwindigkeit um die Grösse 2g, 2.2g, 3.2g, ... t . 2g, so dass allgemein die senkrechte Geschwindigkeit = c . Sin w — 2 g . t seyn wird, und der senkrechte Raum, welchen der Körper nach t Sekunden zurücklegt, oder die Höhe, auf welcher sich der Körper nach t Sekunden befindet, wird = c . t . Sin w — g . t^2 seyn. Fig. 2. Tab. 28.

Dasselbe lässt sich auch auf folgende Art zeigen: Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit c nach der Richtung A O geworfen wird, so wird er während der Zeit t ohne Rücksicht auf die Schwere den Raum A O = c . t beschreiben. Weil aber die Linie A O mit dem Horizonte den Winkel w macht, so würde derselbe in gleicher Zeit auf die Höhe A N = c . t . Sin w gehoben, und nach der horizontalen Richtung den Raum A N = c . t . Cos w zurückgelegt haben. Diess stimmt mit dem vorher Angeführten überein. Weil aber die Schwere den Körper nach der senkrechten Richtung um die Höhe g . t^2 = O M herabzieht, so wird derselbe sich nur auf der Höhe N O — M O = N M = c . t . Sin w — g . t^2 befinden, was abermal mit dem Vorhergehenden übereinstimmt. Wir haben daher zu der Bestimmung der Bewegung eines, unter einem schiefen Winkel geworfenen Körpers folgende vier Gleichungen:

I. Die vertikale Geschwindigkeit v = c . Sin w — 2 g . t.

II. Der vertikale Raum y = c . t . Sin w — g . t^2.

III. Die horizontale Geschwindigkeit v′ = c . Cos w.

IV. Der horizontale Raum x = c . t . Cos w.

Hieraus lässt sich die Bahn eines jeden geworfenen Körpers berechnen und verzeichnen: Man theile nämlich die horizontale Linie A N in gleiche Theile, wovon jeder den Raum c . Cos w vorstellt, ziehe unter dem gegebenen Winkel w die Linie A O, errichte in den Theilungspunkten b, b′, b″ die Perpendikeln b d, b′ d′, b″ d″ und ziehe hievon die Wirkung der Schwerkraft g, 4 g, 9 g ab, so erhält man eine krumme Linie A M, in welcher sich der Körper wirklich bewegen wird, und die ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft eine Parabel seyn wird. Fig. 3.

Um die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn v″ = A e zu finden, haben wir A e^2 = e b^2 + A b oder substituirt

$(v'')^2 = (c . \text{Sin } w - 2 g . t)^2 + c^2 . \text{Cos}^2 w = c^2 - 4 g (c . t . \text{Sin } w - g . t^2) = c^2 - 4 g . y$

woraus $v'' = \pm \sqrt{(c^2 - 4 g . y)}$ (V) folgt.

Dieser Ausdruck gibt sammt den obigen nunmehr fünf Gleichungen, in welchen acht veränderliche Grössen: x, y, v, v′, v″, t, c und w vorkommen; wenn daher drei von diesen Grössen gegeben sind, so kann man die fünf andern berechnen.

§. 499.

Beispiel. Es sey die Bahn eines Körpers zu bestimmen, welcher mit der Geschwindigkeit von 310 Fuss geworfen wird, uud zwar für die Wurfswinkel von 15, 30, 45, 60, 75 und 90 Grad.

In diesem Falle ist c = 310 Fuss, der Winkel w hat für die erste Bahn den Werth von 15 Grad und für die andern Bahnen die Werthe von 30, 45, 60, 75 und 90 Grad; die Zeit t wird der Reihe nach = 1, 2, 3, 4 Sekunden angenommen, und sonach erhält man folgende Tabellen:

Bahn für w = 15 Grad.						Bahn für w = 30 Grad.					
t in Sekunden.	Horizontale Geschwindigkeit v'	Horizontaler Raum x	Vertikale Geschwindigkeit v	Vertikaler Raum y	Geschwindigkeit in der Bahn v''	t in Sekunden.	Horizontale Geschwindigkeit v'	Horizontaler Raum x	Vertikale Geschwindigkeit v	Vertikaler Raum y	Geschwindigkeit in der Bahn v''
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	299,4	299,4	49,2	64,7	303,5	1	268,5	268,5	124	139,5	295,7
2	299,4	598,9	18,2	98,5	300,0	2	268,5	536,9	93	248,0	284,1
3	299,4	898,3	— 12,8	101,2	299,7	3	268,5	805,4	62	325,5	275,5
4	299,4	1197,7	— 43,8	72,9	302,6	4	268,5	1073,9	31	372,0	270,3
5	299,4	1497,2	— 74,8	13,7	308,6	5	268,5	1342,3	0	387,5	268,5
6	299,4	1796,6	—105,8	— 76,6	317,6	6	268,5	1610,8	— 31	372,0	270,3
7	299,4	2096,1	—136,8	—197,9	329,2	7	268,5	1879,3	— 62	325,5	275,5
8	299,4	2395,5	— 167,8	— 350,1	343,2	8	268,5	2147,7	— 93	248,0	284,1
9	299,4	2694,9	— 198,8	—533,4	359,4	9	268,5	2416,2	— 124	139,5	295,7
10	299,4	2994,4	—229,8	—747,7	377,4	10	268,5	2684,7	— 155	0	310,0

Auf gleiche Art werden die Bahnen für w = 45 w = 60 und w = 75 Grad berechnet; die Bahn des Körpers für w = 90 Grad wurde bereits §. 491 berechnet. Um die gefundenen Fig. 4. Werthe in einer Uibersicht zusammen zu stellen, sind dieselben Fig. 4 aufgetragen wor- Tab. 28. den, woraus man nunmehr den Einfluss, welchen der Schusswinkel auf die Bahn des Körpers bewirkt, leichter beurtheilen kann.

§. 500.

Die grösste Höhe, auf welche der Körper steigt, zu finden.

Wir haben §. 498 die vertikale Geschwindigkeit $v = c \,.\, \text{Sin}\, w - 2g\,.\,t$ gefunden; wenn der Körper auf dem höchsten Punkt angekommen ist, verliert er seine ganze Geschwindigkeit in der vertikalen Richtung, oder es ist $v = 0 = c \,.\, \text{Sin}\, w - 2\,g\,.\,t$, woraus die Zeit $t = \frac{c\,.\,\text{Sin}\, w}{2g}$ folgt. Wird dieser Werth in der allgemeinen Gleichung für den vertikalen Raum $y = c\,.\,t\,.\,\text{Sin}\, w - g\,.\,t^2$ substituirt, so ist

$y = c\,.\,\text{Sin}\, w\,.\,\frac{c\,.\,\text{Sin}\, w}{2\,g} - \frac{g\,.\,c^2\,.\,\text{Sin}^2\, w}{4\,g^2} = \frac{c^2\,.\,\text{Sin}^2\, w}{4\,g}$ die grösste Höhe, welche der Körper erreicht. Diese Höhe ist genau dieselbe, auf welche der Körper steigt, wenn er mit der Geschwindigkeit c . Sin w senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Beispiel. In dem obigen Falle, wo $C = 310$ Fuss ist, hat die grösste Höhe des Körpers

wenn $w = 15$ Grad den Werth $\frac{310^2 \,.\, \text{Sin}^2\, 15}{62} = \frac{310^2 \,.\, 0{,}2588190^2}{62} = 103{,}8$ Fuss

$w = 30$ „ „ „ $\frac{310^2 \,.\, \text{Sin}^2\, 30}{62} = \frac{310^2 \,.\, 0{,}5^2}{62} = 387{,}5$ Fuss

$w = 45$ „ „ „ $\frac{310^2 \,.\, \text{Sin}^2\, 45}{62} = \frac{310^2 \,.\, 0{,}7071068^2}{62} = 775{,}0$ Fuss

$w = 60$ „ „ „ $\frac{310^2 \,.\, \text{Sin}^2\, 60}{62} = \frac{310^2 \,.\, 0{,}8660254^2}{62} = 1162{,}5$ Fuss

$w = 75$ „ „ „ $\frac{310^2 \,.\, \text{Sin}^2\, 75}{62} = \frac{310^2 \,.\, 0{,}9659258^2}{62} = 1446{,}2$ Fuss.

§. 501.

Um die **horizontale Entfernung des höchsten Punktes der Bahn** zu finden, substituiren wir in den allgemeinen Ausdruck für den horizontalen Raum $x = c\,.\,t\,.\,\text{Cos}\, w$ den gefundenen Werth für die Zeit (§. 500) $t = \frac{c\,.\,\text{Sin}\, w}{2g}$, und wir erhalten $x = c\,.\,\text{Cos}\, w\,.\,\frac{c\,.\,\text{Sin}\, w}{2g} = \frac{c^2}{4g}\,.\,\text{Sin}\, 2\, w$, d. h. man findet die horizontale Entfernung des höchsten Punktes der Bahn, wenn man die Fallhöhe $\frac{c^2}{4g}$, welche der Geschwindigkeit c gehört, mit dem Sinus des doppelten Wurfswinkels oder mit $\text{Sin}\,.\,2w$ multiplicirt.

In dem obigen Beispiele hat daher die Entfernung des höchsten Punktes

für $w = 15$ Grad den Werth $\frac{310^2\,.\,\text{Sin}\, 30}{62} = 775{,}0$ Fuss

$w = 30$ „ „ „ $\frac{310^2\,.\,\text{Sin}\, 60}{62} = 1342{,}3$ Fuss

$w = 45$ „ „ „ $\frac{310^2\,.\,\text{Sin}\, 90}{62} = 1550{,}0$ Fuss

$w = 60$ „ „ „ $\frac{310^2\,.\,\text{Sin}\, 120}{62} = 1342{,}3$ Fuss

$w = 75$ „ „ „ $\frac{310^2\,.\,\text{Sin}\, 150}{62} = 775{,}0$ Fuss.

Weil aber der Körper auf dem höchsten Punkte seiner Bahn nur die senkrechte Geschwindigkeit $c\,.\,\text{Sin}\, w - 2g\,.\,t$ verliert, dagegen aber die horizontale behält, so ergibt sich von selbst, dass er **am höchsten Punkte** nur die Geschwindigkeit $c\,.\,\text{Cos}\, w$ haben werde.

Dasselbe folgt aus der Gleichung für die Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung der Bahn $v'' = \sqrt{(c^2 - 4g\,.\,y)}$. Substituirt man nämlich hierin die gefundene grösste Höhe $\frac{c^2\,.\,\text{Sin}^2 w}{4g}$, auf welche der Körper steigt, so ist

$v'' = \sqrt{\left(c^2 - \frac{4g\,.\,c^2\,.\,\text{Sin}^2 w}{4g}\right)} = \sqrt{\left(c^2 (1 - \text{Sin}^2 w)\right)} = c\,.\,\text{Cos}\, w$, d. h. die Geschwin-

digkeit im Scheitel der krummen Linie ist dieselbe als die horizontale Geschwindigkeit, mit welcher der Körper ausgeworfen wurde.

§. 502.

Wann kommt ein schief geworfener Körper wieder herab?

Wir haben (§. 498) den Werth für den vertikalen Raum $y = c.t.\text{Sin } w - g.t^2 = t(c.\text{Sin } w - g.t)$ gefunden. Dieser Ausdruck wird zu Null, wenn erstens $t = 0$ ist, d. h. am Anfange der Bewegung; ferner wird der vertikale Raum am Ende der Bewegung $= 0$, wo der Körper wieder auffällt, wo sonach $c.\text{Sin } w - g.t = 0$ und daher $t = \frac{c.\text{Sin } w}{g}$ ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Zeit $t = \frac{c.\text{Sin } w}{2g}$, welche der Körper bis zu seinem höchsten Punkte braucht, so ergibt sich, dass derselbe gerade doppelt so gross sey, und dass derselbe in der Zeit $\frac{c.\text{Sin } w}{g} - \frac{c.\text{Sin } w}{2g} = \frac{c.\text{Sin } w}{2g}$ von seinem höchsten Punkte bis auf den Boden kommt, **dass also die Zeit, während welcher der Körper steigt, jener gleich sey, durch welche er herab fällt.**

§. 503.

Die Entfernung, in welcher ein Körper auf den Boden wieder auffällt, oder die Wurfsweite eines geworfenen Körpers zu finden.

Der allgemeine Ausdruck für den horizontalen Raum ist $x = c.t.\text{Cos } w$ und substituirt man hierin den gefundenen Werth für die Zeit, wann der Körper wieder auffällt $t = \frac{c.\text{Sin } w}{g}$, so ist $x = c.\text{Cos } w.\frac{c.\text{Sin } w}{g} = \frac{c^2}{2g}.\text{Sin } 2w$, welches die Schussweite eines Körpers ist.

Vergleicht man nun wieder diesen Ausdruck mit der Entfernung des Körpers bis zu seinem höchsten Punkte $x = \frac{c^2}{4g}.\text{Sin } 2w$, so folgt, **dass die Wurfsweite gerade noch einmal so gross ist, als die horizontale Entfernung des höchsten Punktes der Bahn.**

In den obigen Beispielen erhält die Wurfsweite

für $w = 15$ Grad den Werth $\frac{310^2.\text{Sin } 30}{31} = 1550{,}0$ Fuss

$w = 30$ „ „ „ $\frac{310^2.\text{Sin } 60}{31} = 2684{,}7$ Fuss

$w = 45$ „ „ „ $\frac{310^2.\text{Sin } 90}{31} = 3100{,}0$ Fuss

$w = 60$ „ „ „ $\frac{310^2.\text{Sin } 120}{31} = 2684{,}7$ Fuss

$w = 75$ „ „ „ $\frac{310^2.\text{Sin } 150}{31} = 1550{,}0$ Fuss

§. 504.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper wieder auf den Boden auffällt, zu finden.

Die senkrechte Geschwindigkeit für einen jeden Ort ist $= c . \text{Sin}\, w - 2g . t$ und da wir $t = \frac{c . \text{Sin}\, w}{g}$ gefunden haben, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper wieder auffällt $= c . \text{Sin}\, w - \frac{2g . c . \text{Sin}\, w}{g} = - c . \text{Sin}\, w$, d. h. der Körper hat wieder die anfängliche Geschwindigkeit, aber nun in entgegengesetzter Richtuug, da er herabgeht.

§. 505.

Wir haben die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn $v'' = \pm \sqrt{(c^2 - 4g . y)}$ gefunden; es hat daher die Geschwindigkeit in der Bahn zwei gleiche Werthe, welche sich nur durch das Zeichen + und — unterscheiden **und der Körper mag steigen oder fallen, so hat er auf gleichen Höhen immer gleiche Geschwindigkeiten.** Wenn $y = 0$ wird, so ist die Geschwindigkeit in der Bahn $v'' = \pm . \sqrt{c^2} = \pm c$, d. h. der Körper schlägt mit derselben Geschwindigkeit c auf, mit welcher er ausgeworfen wurde. Wirft man also oder schiesst man auf einen Berg hinauf, so wird der Stein oder die Kugel mit einer viel geringeren Geschwindigkeit oben anschlagen, als wenn man in einer horizontalen Ebene wirft oder schiesst; denn erst in dem Falle, wenn der Punkt, wo der Stein oder die Kugel auffällt, in derselben horizontalen Ebene mit dem Punkte liegt, wo man sie ausgeworfen hat, ist $v'' = c$, früher immer kleiner. Aus gleichem Grunde folgt, dass, wenn von einem Berge herabgeschossen wird, die Kugeln mit grösserer Geschwindigkeit anschlagen, weil dann noch die Geschwindigkeit von der Höhe des Berges hinzukommt.

§. 506.

Unter welchem Winkel wird die Wurfsweite eines Körpers am grössten?

Die Wurfsweite oder der ganze horizontale Raum des Körpers ist (nach §. 503) $= c . \text{Cos}\, w . \frac{c . \text{Sin}\, w}{g}$. Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $\text{Cos}\, w = \text{Sin}\, w$ oder $w = 45$ Grad ist, man schiesst oder wirft daher unter einem Winkel von 45 Grad am weitesten. Dasselbe sieht man aus Fig. 4. Fig. 4. Tab. 28.

Um nun die **grösstmögliche Schussweite** zu finden, haben wir $\text{Sin}^2 45^0 + \text{Cos}^2 45^0 = 1 = 2\, \text{Cos}^2 45^0$, woraus $\text{Cos}\, 45 = \sqrt{½} = 0{,}707 = \text{Sin}\, 45$, und wenn man diess substituirt, so ist die grösste Schussweite $= \frac{c^2 . \text{Sin}^2 . 45^0}{g} = \frac{c^2 . ½}{15{,}5} = \frac{c^2}{31}$, folglich in dem obigen Beispiele $= \frac{310 . 310}{31} = 3100$ Fuss.

§. 507.

Ein jeder Körper, welcher sich **auf einer schiefen Ebene** befindet, wird mit der Kraft $\frac{Q . h}{l}$, wie §. 123 berechnet wurde, über dieselbe herabgezogen. Wenn er daher durch nichts gehindert wird, so läuft er über diese Fläche herab.

Da die Kraft, welche den Körper über eine schiefe Fläche herunter treibt, beständig ist, folglich der Bewegung des Körpers in gleichen Zeiten gleiche Zusätze geben muss, so wird hiebei eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen. Es handelt sich nun, die Gesetze dieser Bewegung zu entwickeln; wir wollen sie zuerst ohne Reibung und dann mit Rücksicht auf Reibung behandeln.

§. 508.

Wenn ein Körper über eine schiefe Fläche herabläuft, seine Geschwindigkeit und den durchlaufenen Raum nach einer gegebenen Zeit ohne Rücksicht auf die Reibung zu finden. Wenn der Körper senkrecht herabfallen würde, so wäre $S = g . t^2$ und $v = 2 g . t$; da aber derselbe nicht senkrecht, sondern auf der schiefen Fläche und zwar parallel zu ihr herabgehen muss, so löse man das Gewicht des Körpers $Q = DF$ in zwei Theile auf, wovon der eine D N winkelrecht auf die schiefe Fläche drückt, und daher von ihr getragen wird, der andere Theil D M aber die wirkliche Bewegung über die schiefe Fläche bewirkt.

Fig. 5. Tab. 28.

Es ist ausser Zweifel, dass überhaupt alle Bewegungen den Kräften, welche sie hervorbringen, proportional sind. Wir erkennen nämlich die Kräfte nicht anders, als durch die von ihnen bewirkten Bewegungen und sagen desshalb, eine Kraft sey 2, 3, ... n^{mal} so gross als eine andere, wenn sie dem Körper, worauf sie wirkt, eine 2, 3, ... n^{mal} grössere Bewegung als eine andere Kraft ertheilt hat. Man vergleicht gewöhnlich die Kräfte, welche einen Körper in Bewegung setzen, mit der Schwere, und nimmt jedesmal bei der Schwere die Wirkung derselben im luftleeren Raume als Vergleichungsmaasstab an, da diese Kraft und ihre Wirkung für jeden Ort der Erde einen beständigen Werth hat. Nennen wir daher die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Fläche herabzieht K, die von ihr in der Zeit t bewirkte Geschwindigkeit v und den in gleicher Zeit beschriebenen Raum S, so kann man sagen: Würde die Schwere auf den Körper wirken oder derselbe der Kraft und Richtung seines Gewichtes folgen, so erlangt er in der Zeit t die Geschwindigkeit $2 g . t$; nun wird er aber durch eine Kraft K bewegt, er erlangt daher die Geschwindigkeit v, demnach ist $Q : 2 g . t = K : v$. Nun ist aber $l : Q = h : K$, folglich $l : 2 g . t = h : v$, woraus die Geschwindigkeit $v = \frac{h}{l} . 2 g . t$ folgt.

Auf gleiche Art findet man den Raum, welchen der Körper in t Sekunden auf der schiefen Fläche zurücklegt; würde sich nämlich der Körper durch sein Gewicht Q bewegen, so wäre der von ihm in der Zeit t beschriebene Raum $= g . t^2$, nun wird aber nicht das ganze Gewicht, sondern nur der Theil $\frac{Q . h}{l}$ zum Herabtreiben des Körpers verwendet, man findet daher den Raum aus der Proportion $Q : g . t^2 = \frac{Q . h}{l} : S$, woraus der Raum auf der schiefen Fläche $S = \frac{h}{l} . g . t^2$ folgt. Auf diese Weise kann man sowohl die Geschwindigkeit, als auch den Raum eines jeden Körpers, der sich über eine schiefe Fläche herab bewegt, berechnen.

§. 509.

Aus den zwei Gleichungen $v = \frac{h}{l} . 2g . t$ und $S = \frac{h}{l} . g . t^2$ ergibt sich:

1^tens. Da die Geschwindigkeit im geraden Verhältnisse mit der Zeit, der Raum aber wie das Quadrat der Zeit wächst, so folgt, dass die Bewegung der Körper über eine schiefe Ebene eine gleichförmig beschleunigte sey, welche in gleichem Verhältnisse mit der Zeit, wie es bei der Schwere der Fall ist, zunimmt.

2^tens. Da die Grösse des Gewichtes Q des Körpers ganz aus der Rechnung gefallen ist, so beschreiben offenbar schwere und leichte Körper in gleichen Zeiten auch gleiche Räume, wie es bei dem freien Falle schon gezeigt wurde. Hiebei darf jedoch nie vergessen werden, dass bei diesen Berechnungen auf keine Reibung und keinen Widerstand der Luft Rücksicht genommen wurde, wesshalb die so eben entwickelten Gesetze genau genommen, nur in einem luftleeren Raume statt finden, und sich daher in der Ausübung dem berechneten Werthe mehr oder weniger nähern.

3^tens. Je kleiner die Höhe und je grösser die Länge der schiefen Fläche ist, desto langsamer wird die Bewegung; wäre aber $h = 0$, so ist $v = 0$, oder es tritt gar keine Bewegung ein.

Will man den Raum S durch die Geschwindigkeit ausdrücken, so ist: $\frac{l}{h} . \frac{v}{2g} = t$, folglich substituirt $S = \frac{h}{l} . g . t^2 = \frac{h}{l} . g . \frac{l^2}{h^2} . \frac{v^2}{4g^2} = \frac{l}{h} . \frac{v^2}{4g}$.

Eben so kann man umgekehrt die Geschwindigkeit v durch den Raum S ausdrücken, indem $v = \sqrt{\left(\frac{h}{l} . 4g . S\right)}$. Man erhält sonach zur Bestimmung der Geschwindigkeit und des Raumes eines Körpers, der sich über eine schiefe Fläche herab bewegt, ohne Rücksicht auf Reibung folgende Gleichungen: $S = \frac{h}{l} . g . t^2 = \frac{l}{h} . \frac{v^2}{4g}$ und $v = 2g . t . \frac{h}{l} = \sqrt{\left(\frac{h}{l} . 4g . S\right)}$.

§. 510.

Die Geschwindigkeit, welche ein Körper am Ende der schiefen Fläche erlangt, ist gerade so gross, als die Geschwindigkeit, die er erlangen würde, wenn er durch die vertikale Höhe der schiefen Fläche herabfiele.

Wir haben im vorigen Paragraphe die Geschwindigkeit, womit sich ein Körper über eine schiefe Fläche bewegt, $v = \sqrt{\left(\frac{h}{l} . 4g . S\right)}$ gefunden, wo unter S die Länge des zurückgelegten Weges verstanden wird. Nehmen wir daher für S die ganze Länge der schiefen Fläche l an, so ist die Geschwindigkeit am Ende derselben, nämlich in dem Punkte $B = \sqrt{\left(\frac{h}{l} . 4g . l\right)} = 2\sqrt{g . h}$. Dagegen ist bei dem senkrechten Falle nach §. 485 die Endgeschwindigkeit $v = 2\sqrt{g . S}$, und wenn man für den Raum S die Höhe der schiefen Fläche $h = AC$ annimmt, so ist abermal $v = 2\sqrt{g . h}$, d. h. der Körper hat in B dieselbe Geschwindigkeit, wie in C. Fig. 5. Tab. 28.

Da sich dasselbe von einem jeden andern Punkte, der in der horizontalen Linie BC liegt, beweisen lässt, so folgt, dass die Neigung der schiefen Fläche auf die Geschwindigkeit des Körpers keinen Einfluss habe. Zieht man daher aus einem Punkte A mehrere schiefe Flächen AB, AC, AE und lässt nun von diesem Punkte A Körper über die schiefen Flächen herab laufen, so werden alle diese Körper in denselben Horizontallinien, nämlich in MN, oder in OP, oder in FB gleiche Geschwindigkeiten haben, nachdem die Körper daselbst gleiche Fallhöhen erlangen. Dieses wird aber nicht nur bei der Bewegung über gerade Linien, sondern auch bei jener über eine krumme AF statt finden, indem man eine krumme Linie als aus unendlich vielen geraden Linien so zusammengesetzt denken kann, dass diese Linien keinen messbaren Winkel mit einander bilden.

Fig. 6. Tab. 28.

§. 511.

Wenn ein Körper über eine schiefe Fläche hinab gestossen wird, die Bewegung desselben ohne Rücksicht auf Reibung zu berechnen.

Es sey die Geschwindigkeit, welche der Körper durch den Stoss erhält $= c$, so würde sich derselbe mit gleicher Geschwindigkeit fortwährend bewegen, wenn nicht die Schwerkraft auf ihn wirken möchte; die Wirkung derselben beträgt nach §. 508 in der Geschwindigkeit die Grösse $\frac{h}{l} \cdot 2g.t$, folglich wird nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit des Körpers, der über eine schiefe Fläche hinabgestossen wird $v = c + \frac{h}{l} \cdot 2g.t$ und auf gleiche Art der Raum $S = c.t + \frac{h}{l} \cdot g.t^2$ seyn.

Auf gleiche Weise wird die Bewegung eines Körpers, welcher über eine schiefe Fläche hinauf gestossen wird, berechnet. Es sey die Geschwindigkeit des Stosses abermal $= c$, so ist offenbar, dass selbe durch die Schwere um die Grösse $\frac{h}{l} \cdot 2g.t$ vermindert wird, sonach wird nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit des Körpers $v = c - \frac{h}{l} \cdot 2g \cdot t$ seyn. Die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers ist c, die Endgeschwindigkeit (nämlich nach t Sekunden) ist $c - \frac{h}{l} \cdot 2g.t$, folglich die mittlere Geschwindigkeit $= c - \frac{h}{l} \cdot g.t$. Hieraus findet man den Raum, welchen der Körper in t Sekunden zurücklegt $S = c.t - \frac{h}{l} \cdot g.t^2$.

Der Körper geht so weit auf der schiefen Fläche hinauf, bis seine Geschwindigkeit $= 0$ ist, also bis $c - \frac{h}{l} \cdot 2g.t = 0$, woraus die Zeit $t = \frac{l}{h} \cdot \frac{c}{2g}$ folgt. Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck für den Raum, so ist der gesuchte Raum $S = \left(c - \frac{h}{l} \cdot g.t\right) t = \left(c - \frac{h}{l} \cdot g \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{c}{2g}\right) \frac{l.c}{h.2g} = \frac{l}{h} \cdot \frac{c^2}{4g}$. Wird hier $S = l$, so ist $h = \frac{c^2}{4g}$, d. h. der Körper steigt eben so hoch, als wenn er mit der Geschwindigkeit c senkrecht hinauf geworfen wird.

§. 512.

Fig. 7. Man lasse nun einen Körper (Fig. 7) über die schiefe Fläche A B C D E von A auslaufen, so wird er in C eine Geschwindigkeit haben, welche eben so gross ist, als wenn

er durch die Höhe J C senkrecht herabgefallen wäre, nämlich $v = 2\sqrt{g \cdot JC}$. Da der Körper in C diese ihm nun eigenthümlich gewordene Geschwindigkeit besitzt, so wird er in C nicht ruhig bleiben, sondern über die schiefe Fläche C D E hinaufgehen, und zwar so lange, bis er seine ganze Geschwindigkeit verliert. Wir haben nämlich §. 511 gezeigt, dass jeder Körper so hoch steigt, als er hätte fallen müssen, um seine Wurfsgeschwindigkeit zu erhalten, oder dass $S = \frac{v^2}{4g} = JC$ sey, d. h. der Körper steigt bis zu dem Punkte E oder auf die Höhe $EG = JC$ hinauf. Sobald nun der Körper sich in E, wo er seine ganze Geschwindigkeit verloren hat, befindet, geht er dem Gesetze der Schwere zufolge wieder über die schiefe Fläche E C herab, erlangt dadurch in C die Geschwindigkeit $2\sqrt{g \cdot CJ}$ und steigt desshalb anderseits wieder bis A hinauf, wo er seine ganze Geschwindigkeit verloren hat, abermal herunterläuft, und so diese Bewegung bis ins Unendliche fortsetzen würde, wenn nicht der Widerstand der Luft und der Reibung in den Weg treten möchte. Fig. 7. Tab. 28.

Bei dieser Bewegung wird der Körper wieder auf gleichen Höhen z. B. in B und D auch gleiche Geschwindigkeiten haben, und daher wird die Bewegung über A B C herab der Bewegung über C D E hinauf vollkommen gleich kommen.

Auf diesem Grundsatze beruht die Bewegung der Pendel. Ein Pendel ist ein schwerer Körper A (Fig. 8) der an einem unbiegsamen, in C befestigten Faden A C herab hängt. Wird dieser Körper von D nach A aufgezogen, und dort ausgelassen, so wird sein Gewicht Q, welches senkrecht herabzieht, in zwei Theile zerlegt, wovon einer in der Richtung des Fadens liegt und bloss auf die Spannung dieses Fadens verwendet wird, der andere aber die Bewegung des Körpers in der krummen Linie A D veranlasst. Langt der Körper in D an, so hat er eine Geschwindigkeit, welche so gross ist, als wenn er über die senkrechte Höhe O D herabgefallen wäre, er steigt desshalb wieder anderseits auf eine gleiche Höhe, nämlich bis E hinauf, geht von da wieder herunter und setzt so seine Schwingungen in dem Bogen A D E fort. Fig. 8.

Der Gebrauch des Pendels zum Zeitmaasse und eine umständlichere Erklärung seiner Bewegung wird bei den Uhren vorkommen.

§. 513.

Der vertikal durchlaufene Raum verhält sich zu dem auf der schiefen Ebene in derselben Zeit zurückgelegten Wege, wie die Länge der schiefen Ebene zur Höhe derselben.

Wenn zwey Körper zu gleicher Zeit von dem höchsten Punkte der schiefen Ebene A ausgehen und einer hievon sich über die Ebene A C bewegt, der andere aber senkrecht herabfällt, so wird der letztere in der Zeit t den Raum $AD = g \cdot t^2$ nach dem Gesetze des freien Falles der Körper zurücklegen. Zieht man nun aus dem Punkte D ein Perpendikel D E auf A C, so ist A E der Weg auf der schiefen Fläche, welchen der Körper in derselben Zeit t beschreibt. Es ist nämlich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke A E D und A B C, $AE : AD = h : l$, oder $AE : g \cdot t^2 = h : l$, woraus $AE = g \cdot t^2 \cdot \frac{h}{l}$ folgt. Nun haben wir aber §. 508 gefunden, dass der Raum, welchen der Körper in der Fig. 9.

Fig. 9. Tab. 28. Zeit t auf der schiefen Fläche beschreibt, $S = g . t^2 . \frac{h}{l}$ sey, es muss daher ein Körper, der von A ausläuft, sich nach t Sekunden auf der schiefen Ebene in E, in der senkrechten Linie aber in D befinden, und da $AD = g . t^2$ und $AE = \frac{h}{l} . g . t^2$ ist, so ist auch $AD : AE = l : h$, d. h. der vertikal beschriebene Raum verhält sich zu dem Raume, welcher in gleicher Zeit auf der schiefen Fläche zurück gelegt wurde, wie die Länge der schiefen Fläche zur Höhe derselben.

Hieraus folgt, dass alle Sehnen (Fig. 10) AO, AR, AF, ... eines Fig. 10. Kreises, die aus einem Punkte A gezogen werden können, in gleicher Zeit, als der senkrechte Durchmesser AN des Kreises zurückgelegt werden.

Es sey nämlich A N der Durchmesser eines Kreises, welcher zugleich die Höhe verschiedener schiefen Flächen AE, AD, AG vorstellt. Will man bei einer jeden schiefen Fläche den Punkt wissen, wo sich der Körper befindet, wenn er im freien Falle von A bis N gekommen ist, so muss man nach dem vorigen Paragraphe Perpendikeln auf diese schiefen Flächen aus dem Punkte N ziehen. Es ist jedoch aus den Eigenschaften des Kreises bekannt, dass die Scheitel aller dieser rechten Winkel in der Peripherie eines Kreises liegen, der AN zum Durchmesser hat, folglich sind AO, AR, AF, ..., Sehnen eines Kreises und werden als Theile von schiefen Flächen in derselben Zeit zurück gelegt, in welcher der Durchmesser senkrecht beschrieben wird.

Wenden wir diesen Satz auf Pendeln an, so folgt, dass grosse und kleine Schwingungen (für dieselbe Pendellänge) in gleicher Zeit zurückgelegt werden, wovon aber umständlicher bei der Theorie der Uhren gehandelt werden wird.

§. 514.

Fig. 5. Bei den bisherigen Berechnungen haben wir die Bewegung der Körper auf schiefen Flächen ohne Rücksicht auf Reibung behandelt; allein eine jede solche Bewegung ist in der Natur mit Reibung vorhanden, da wir noch keine Körper kennen, welche bei der Bewegung auf einander keine Reibung äussern. Es sey daher Q das Gewicht des Körpers, welches wir in einen Theil zerlegen, der winkelrecht auf die schiefe Fläche wirkt, folglich für die Bewegung verloren geht, und in einen Theil $Q . \frac{h}{l}$, der den Körper parallel zur schiefen Fläche herabtreibt. Die Reibung, welche bei dieser Bewegung statt findet, rührt offenbar von dem winkelrechten Drucke DN des Körpers gegen die schiefe Fläche her, und da $DN : Q = b : l$ oder $DN = Q . \frac{b}{l}$, so ist $m . \frac{b}{l} . Q$ die Kraft, welche zur Ueberwältigung der Reibung nothwendig ist. Da nun die Kraft $Q . \frac{h}{l}$, welche den Körper über die schiefe Fläche herabtreibt, durch den Widerstand der Reibung vermindert wird, so ist bloss der Unterschied $Q . \frac{h}{l} - m . Q . \frac{b}{l}$ die eigentliche Kraft, welche den Körper auf der schiefen Fläche in Bewegung setzt, und man kann sagen: Würde der Körper durch eine Kraft, welche

so gross als sein eigenes Gewicht Q ist, bewegt, so bechriebe er in der Zeit t den Raum $g \cdot t^2$, nun wird er aber bloss durch die Kraft $Q \cdot \frac{h}{l} - m \cdot Q \cdot \frac{b}{l}$ bewegt, also wird sein Raum, den er in der Zeit t beschreibt, aus folgender Proportion gefunden: Fig. 5. Tab. 28.

$Q : g \cdot t^2 = Q \cdot \frac{h}{l} - m \cdot Q \cdot \frac{b}{l} : S$, woraus $S = g \cdot t^2 \left(\frac{h - m \cdot b}{l}\right)$. Auf gleiche Weise ist: $Q : 2g \cdot t = Q \cdot \frac{h}{l} - m \cdot Q \cdot \frac{b}{l} : v$, woraus $v = 2g \cdot t \left(\frac{h - m \cdot b}{l}\right)$. Diess sind die Formeln, welche zur Berechnung der wirklichen Bewegung der Körper über schiefe Flächen dienen. Man ersieht aus ihnen, dass nur dann eine Bewegung möglich ist, wenn h grösser als m.b, oder wenn $\frac{h}{b}$ grösser als m ist; es muss daher das Verhältniss der Höhe zur Grundlinie der schiefen Fläche grösser seyn, als der Reibungscoeffizient, oder da $\text{tang}\, w = \frac{h}{b}$, so muss die Tangente des Neigungswinkels der schiefen Fläche grösser seyn, als der Reibungscoeffizient, wenn eine Bewegung über die schiefe Fläche statt finden soll.

§. 515.

Die gefundenen Formeln lassen sich auch auf folgende Art herleiten: Es sey A B C die schiefe Fläche, über welche der Körper hinabgeht, so wird die Höhe $CB = h$ dieser schiefen Fläche wegen der vorhandenen Reibung um die Grösse $AD = m \cdot b$ vermindert, wenn der Körper von C nach A herabläuft; die Höhe der schiefen Fläche, über die er ohne Reibung herabrollt, beträgt demnach nur noch $h - m \cdot b$, und wir können itzt die Formeln des §. 508 anwenden, wornach $v = \left(\frac{h - m \cdot b}{l}\right) 2\,g \cdot t$ und $S = \left(\frac{h - m \cdot b}{l}\right) g \cdot t^2$, welches dieselben Ausdrücke sind, die wir im vorigen Paragraphe gefunden haben. Fig. 11.

Beispiel. Bei unsern Strassen sind die Gebirgssteigungen für längere Strecken gewöhnlich nur 4 Zoll auf die Klafter, oder es verhält sich $h : l = 1 : 18$. Die Widerstände der Bewegung auf der Strasse betragen bei einer guten Strasse bloss 5 Procent, oder $m = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Da nun die Tangente des Neigungswinkels w sehr klein ist, so kann man $b = l$ setzen und erhält $v = \left(\frac{h}{l} - m\right) 2 g \cdot t. = \left(\frac{1}{18} - \frac{5}{100}\right) 2\,g \cdot t = \frac{1}{180} \cdot 2\,g \cdot t$ und $S = \left(\frac{h}{l} - m\right) g \cdot t^2 = \frac{1}{180} \cdot g \cdot t^2$. Nehmen wir nun für t verschiedene Werthe an, so ist:

für $t = 1$ Sekunde, die Geschwindigkeit $v = 0{,}172$ und der Raum $S = 0{,}086$,
„ $t = 2$ „ „ „ $v = 0{,}344$ „ „ $S = 0{,}344$,
„ $t = 3$ „ „ „ $v = 0{,}517$ „ „ $S = 0{,}775$,
„ $t = 4$ „ „ „ $v = 0{,}689$ „ „ $S = 1{,}378$ u. s. w.

Berechnet man diese Werthe ohne den Einfluss der Reibung, so wird sich ein bedeutender Unterschied ergeben.

§. 516.

Wenn ein Körper über eine schiefe Fläche hinab gestossen wird, die Bewegung desselben mit Rücksicht auf Reibung zu bestimmen.

Es sey die Geschwindigkeit, welche der Körper im Anfange seiner Bewegung durch den Stoss erhält $= c$, so ist offenbar, dass ihm diese Geschwindigkeit beständig bleibt, und dass selbe ausserdem durch die Wirkung der Schwere einen Zusatz erhält; sonach wird die ganze Geschwindigkeit $v = c + \left(\frac{h}{l} - m\right) 2g \cdot t$, und der Raum $S = c \cdot t + \left(\frac{h}{l} - m\right) g \cdot t^2$ seyn.

Auf gleiche Art wird die Bewegung eines Körpers, der **über eine schiefe Fläche hinauf gestossen wird, mit Rücksicht auf Reibung** gefunden.

Es sey die Geschwindigkeit, welche der Körper durch den Stoss erhält $= c$, so wird dieselbe durch die Schwere um $\left(\frac{h}{l} + m\right) 2g \cdot t$ vermindert, und daher ist $v = c - \left(\frac{h}{l} + m\right) 2g \cdot t$ und $S = c \cdot t - \left(\frac{h}{l} + m\right) g \cdot t^2$. Die Reibung steht hier der Bewegung abermal entgegen, wie es auch bei den vorigen Aufgaben der Fall war.

Die Bewegung des Körpers hört auf, wenn die Geschwindigkeit $= 0$ wird, oder wenn $0 = c - \left(\frac{h}{l} + m\right) 2g \cdot t$, woraus die Zeit $t = \frac{c}{2g\left(\frac{h}{l} + m\right)}$; substituirt man diess in der Gleichung für den Raum, so erhält man die Länge des Weges, wie weit der Körper hinaufgeht oder $S = \frac{c^2}{4g\left(\frac{h}{l} + m\right)}$. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem §. 511 gefundenen, so ergibt sich, dass der Nenner abermal um die Grösse m vermehrt worden sey; der Raum, wie hoch ein Körper über eine schiefe Fläche hinaufsteigt, wird daher wegen des Einflusses der Reibung ebenfalls kleiner.

§. 517.

Die Einrichtung einer Schraube zu finden, welche von selbst aufspringt.

Wenn eine Schraube von selbst aufspringen soll, so will diess eben so viel sagen,
Fig. 12. Tab. 28. als dass die Last auf der schiefen Fläche von selbst herablaufen soll. Es sey (Fig. 12) ABC die schiefe Fläche eines Gewindes, wobei also AB die Länge der ganzen Peripherie ist. Man mache $AD = m \cdot b$, so ist offenbar, dass wenn h grösser als $m \cdot b$, die Last Q von selbst hinab geht; wenn $h = m \cdot b$, so ist für die Bewegung keine schiefe, sondern nur mehr eine horizontale Fläche vorhanden, die Schraube bleibt daher überall stehen, wäre aber h kleiner als $m \cdot b$, so braucht man noch eine Kraft, um die Schraube zurück zu drehen. Es wird daher im erstern Falle die Geschwindigkeit $v = \left(\frac{h - m \cdot b}{b}\right) 2g \cdot t$ seyn, und wenn $\frac{h}{b}$ grösser als m, so wird der Körper eine Geschwindigkeit erreichen, oder die Schraube von selbst aufspringen.

Beispiel. Bei einer eisernen Schraube ist der Reibungscoeffizient $m = \frac{1}{9}$, es muss daher $\frac{h}{b}$ grösser als $\frac{1}{9}$ seyn, damit die Schraube von selbst aufspringt; wenn also der Durchmesser der Schraube 2 Zoll beträgt, so ist die Peripherie $b = \frac{22}{7} \cdot 2$ Zoll, also muss $\frac{h}{\frac{44}{7}}$ grösser als $\frac{1}{9}$ oder h grösser als $\frac{44}{7 \cdot 9}$ und sonach h grösser als $\frac{2}{3}$ Zoll seyn; die Schraube muss demnach beiläufig 1 Zoll zur Höhe eines Gewindes erhalten.

Bei hölzernen Schrauben kann man $m = \frac{1}{2}$ annehmen, also muss h grösser als $\frac{b}{2}$ seyn, und wenn wir abermal eine Schraube von 2 Zoll Durchmesser annehmen, so muss h grösser als $\frac{44}{7 \cdot 2}$ oder h grösser als $3\frac{1}{7}$ Zoll seyn; sonach wären 3 Zoll für die Höhe eines Gewindes noch nicht genug, und die Schraube müsste, um von selbst aufzuspringen, Gewinde erhalten, die beinahe 4 Zoll hoch sind, während die Schraube nur 2 Zoll dick ist. Aus dieser Ursache werden solche Schrauben immer doppelt oder dreifach gemacht.

§. 518.

Wir kommen nunmehr zur Berechnung der Gesetze der Bewegung, wenn ein schwerer Körper durch einen andern bewegt wird, welcher nicht frei, sondern mittelst eines Hebels auf ihn wirkt. Dieses ist der Fall bei dem Rade an der Welle, wenn die Kraft als ein Gewicht betrachtet das Uibergewicht oder die Uiberwucht hat, und daher ihr eigenes Gewicht, die Last und auch die Maschine, an welcher gewöhnlich ein Schwungrad angebracht ist, in Bewegung setzen muss. Der einfachste Fall dieser Art kommt bei einer festen Rolle vor.

Da hiebei die Hebelsarme der Kraft und Last gleich sind, so ist offenbar, dass in dem Falle keine Bewegung von selbst erfolgen werde, wenn auch $P = Q$ ist. Gibt man einem dieser Körper einen Stoss, und wäre abermal $P = Q$ und keine Reibung vorhanden, so erfolgt eine gleichförmige Bewegung. Nehmen wir aber an, dass an derselben Rolle zwei ungleiche Gewichte hängen, so wird die Bewegung offenbar nach der Seite des grössern Gewichtes vor sich gehen, und zwar wird $P - Q$ die Kraft seyn, welche nun auf der einen Seite zieht und eine Bewegung bewirkt. Diese bewegende Kraft bleibt sich beständig gleich, die hervorgebrachte Bewegung wird daher eine gleichförmig beschleunigte seyn. Fig. 13. Tab. 28.

Es ist offenbar, dass die bewegende Kraft nicht bloss das Gewicht Q, sondern auch das Gewicht P in Bewegung setzen muss, denn beide Gewichte $P + Q$, welche an der Rolle angebracht sind, werden bei einer eintretenden Uiberwucht bewegt. Da nun die Kräfte und ihre Wirkungen immer proportional sind, so hat man folgende Proportion: Würden die beiden Körper sich selbst überlassen seyn, folglich von ihrem ganzen Gewichte $P + Q$ bewegt, so würden sie in der Zeit t die Geschwindigkeit $2g \cdot t$ erlangen; nun werden sie aber bloss von der Kraft $P - Q$ bewegt, wie gross ist daher ihre Geschwindigkeit v, oder $P + Q : 2g \cdot t = P - Q : v$, woraus $v = 2g \cdot t \left(\frac{P - Q}{P + Q}\right)$. Auf gleiche Weise findet man den Raum durch die Proportion:

Fig. 13. Tab. 28. $P + Q : g \cdot t^2 = P - Q : S$, woraus $S = g \cdot t^2 \cdot \left(\frac{P - Q}{P + Q}\right)$. Aus diesen Formeln folgt, dass die Geschwindigkeit, welche die Körper annehmen, ihrer Zeit, und der Raum, welchen sie beschreiben, dem Quadrate der Zeit proportional sey; die Bewegung wird daher gleichförmig beschleunigt seyn.

Beispiel. Es sey $P = 33$ Loth und $Q = 32$ Loth, so ist $v = \frac{1}{65} \cdot 2\,g \cdot t$ und $S = \frac{1}{65} \cdot g \cdot t^2$.

Wenn daher $t = 1^{Sec.}$, so ist $S = \frac{15{,}5}{65} = 0{,}238$ Fuss.

— — $t = 2^{Sec.}$, so ist $S = \frac{4 \cdot 15{,}5}{65} = 0{,}954$ Fuss.

— — $t = 3^{Sec.}$, so ist $S = \frac{9 \cdot 15{,}5}{65} = 2{,}146$ Fuss u. s. w.

§. 519.

Die Uiberwucht bei einer Rolle gibt uns ein Mittel, den Fallraum der Körper in der ersten Sekunde, oder die Grösse g zu bestimmen. Wir können nämlich die Räume, welche von einer kleinen Uiberwucht an einer Rolle veranlasst werden, weit leichter messen, als die Räume, welche bei der Bewegung eines frei herabfallenden Körpers zurückgelegt werden, denn die erstern Räume, welche in den einzelnen Sekunden beschrieben werden, sind, wie wir aus den Gleichungen des vorigen Paragraphes sehen, viel kleiner, als die Räume beim freien Falle. Um diess näher zu bestimmen, nehmen wir an, dass auf einer Seite der Rolle das Gewicht Q, auf der andern Seite aber das Gewicht $Q + p$ vorhanden sey, so wird p die Uiberwucht bewirken, und wir erhalten die Proportion $Q + Q + p : g \cdot t^2 = p : S$, woraus $S = \frac{g \cdot t^2 \cdot p}{2\,Q + p}$ folgt. Gesetzt, es soll nun, wenn t eine Sekunde beträgt, der Raum S ein Zoll werden, so ist, wenn wir den Fallraum der Körper in der ersten Sekunde $g = 15{,}5$ substituiren $\frac{1}{12}$ Fuss $= \frac{15{,}5 \cdot 1^{Sec.} \cdot p}{2\,Q + p}$ oder $2\,Q + p = 186\,p$, woraus $p = \frac{2\,Q}{185}$ folgt.

Wenn man daher das Zulagsgewicht so schwer nimmt, als der 185^{te} Theil der beiderseits angehängten, gleich schweren Gewichte beträgt, so wird der Raum, welchen die Gewichte an dieser Rolle beschreiben, in der ersten Sekunde einen Zoll betragen. Hat man im Gegentheile die Gewichte Q und p gewogen und misst den Raum S, welcher in einer Sekunde, oder auch in mehreren Sekunden beschrieben wird, so kann man die Grösse g, d. h. den Raum, welchen schwere Körper bei dem freien Falle in der ersten Sekunde beschreiben, aus der obigen Formel berechnen.

Fig. 14. Die Maschine, welche zu dem Zwecke dient, die Grösse g aus der Uiberwucht bei einer Rolle zu berechnen, hat *Attwood* in England Fallmaschine genannt; um die Reibung, welche in der obigen Berechnung weggelassen wurde, möglichst zu vermindern, legte derselbe die feine Achse m n der Rolle A an jeder Seite auf 2 andere grössere Rollen B, C und D, E. In Deutschland hat man dagegen die Achse in sehr feinen stählernen Spitzen laufen lassen, und der Rolle einen Durchmesser von mehreren Zollen gegeben, wodurch die Reibung ebenfalls unmerklich geworden ist.

Wird eine Fallmaschine nach dem oben berechneten Beispiele, wo $p = \frac{2Q}{185}$ war, eingerichtet, und will man mit derselben Versuche über den Fallraum während acht Sekunden machen, so muss die Höhe der Maschine $S = 1$ Zoll . $8^2 = 64$ Zoll betragen. *Attwood* hat der Fallmaschine noch die Einrichtung gegeben, dass man das Zulagsgewicht p bei dem zurückgelegten Raume von 1, 4, 9 Zoll auffangen kann, so dass für die weitere Fortsetzung der Bewegung keine Beschleunigung mehr statt findet, folglich dieselbe gleichförmig wird. Zu diesem Behufe erhält p die Form eines Blechstreifens und Q geht bei seiner Bewegung durch einen Ring M, dessen Durchmesser kleiner als die Länge des Blechstreifens ist, der sonach an dem Orte, wo der Ring befestiget ist, auf demselben liegen bleibt. Man findet auf diese Art, dass z. B. ein Körper, welcher nach einer Bewegung von 2 Sekunden von seinem Zulagsgewichte befreit wird, in jeder folgenden Sekunde nur die Geschwindigkeit von 4 Zoll hat, folglich am Ende der dritten Sekunde bei 8 Zoll, am Ende der vierten Sekunde bei 12 Zoll sich befindet, während er mit dem Zulagsgewichte bei der beschleunigten Bewegung zu 9, 16 Zoll gekommen wäre. Die Fallmaschine dient daher zur Versinnlichung der Beweise: Fig. 14. Tab. 28.

1tens. Dass die Geschwindigkeiten in geradem Verhältnisse mit der Zeit, und

2tens. Dass die Räume mit dem Quadrate der Zeit zunehmen. Endlich kann man

3tens. Die Grösse g (die Beschleunigung der Schwere) hieraus berechnen.

§. 520.

Die Uiberwucht bei einem Rade an der Welle zu berechnen, wo die zwei Kräfte oder Gewichte an ungleichen Hebelsarmen wirken.

Es sey der Hebelsarm des Rades = a, jener der Welle = b, und der Halbmesser des Zapfens = e, so ist im Zustande des Gleichgewichtes $P.a = Q.b + (P + Q + M)e.m$ oder $P = \frac{Q.b + (P + Q + M)\,m.e}{a}$. So lange nun die Kraft P nicht grösser ist, als dieser berechnete Widerstand, so bleibt die Maschine im Zustande der Ruhe oder wenn sie eine Bewegung erhielt, setzt sie dieselbe gleichförmig fort. Nur der Uiberrest oder die Grösse $\frac{P.a - Q.b - m.e\,(P + Q + M)}{a}$ kann eine Bewegung bewirken, und zwar muss von diesem Gewichte sowohl das Gewicht von P, als auch jenes von Q und wenn die Maschine ein bedeutendes Gewicht hat oder ein Schwungrad vorhanden ist, auch diess bewegt werden. Da sonach 2 Körper zu bewegen sind, so setzen wir $\frac{P.a - Q.b - m.e\,(P + Q + M)}{a} = x + y$ (I), wo x das am Hebelsarme a angebrachte Gewicht ist, welches P und y das an demselben Hebelsarme angebrachte Gewicht ist, das Q bewegen muss. Würde nun das Gewicht P sich selbst überlassen, oder durch seine Schwere bewegt, so würde es in der Zeit t die Geschwindigkeit $2g.t$ bekommen, nun wird es aber durch x bewegt, wie gross ist daher die Geschwindigkeit v, welche es in t Sekunden erhält oder $P : 2g.t = x : v$, woraus $v = \frac{x}{P} \cdot 2g.t$ und $x = \frac{P.v}{2g.t}$ folgt (II). Fig. 15.

Fig. 15. Tab. 28. Das Gewicht y ist in E angebracht, während das Gewicht Q in F befestigt ist; nennen wir daher y′ dasjenige Gewicht, welches in der Richtung der Last Q oder an dem Hebelsarm b wirkt, so ist $y'.b = a.y$ und $y' = \frac{a.y}{b}$, welches nunmehr das Gewicht ist, wovon Q unmittelbar bewegt wird. Die Geschwindigkeit von Q, nämlich v′ findet man aus der Proportion $v' : v = b : a$ und $v' = v.\frac{b}{a}$; wir haben daher $Q : 2g.t = \frac{a.y}{b} : \frac{b.v}{a}$, woraus $y = \frac{Q.b^2.v}{a^2.2g.t}$ (III).

Setzt man nun die zwei Werthe II und III in die Gleichung I, so ist:

$$\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{a} = \frac{P.v}{2g.t} + \frac{Q.b^2.v}{a^2.2g.t}$$ und hieraus

$$v = 2g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a^2 + Q.b^2}\right).$$ Hier erscheinen im Nenner die Gewichte P und Q mit dem Quadrate ihrer Hebelsarme multiplicirt, welches man die **Trägheits-Momente** nennt, es ist daher v =

$$\frac{\text{der Geschwindigkeit 2 g t, welche die Schwere gibt} \times \text{Hebelsarm a} \times \text{Differenz der statischen Momente}}{\text{Summe der Trägheits-Momente.}}$$

Auf gleiche Art findet man die Geschwindigkeit der Last:

$$v' = \frac{v.b}{a} = 2g.t.b\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a^2 + Q.b^2}\right)$$ d. h. man erhält die Geschwindigkeit der Last, wenn man die Geschwindigkeit, welche die Schwere in t Sekunden ertheilt (2 g.t) mit dem Hebelsarme der Last b und mit der Differenz der statischen Momente multiplicirt, und das Produkt mit der Summe der Trägheits-Momente dividirt.

Um die **Räume** zu bestimmen, hat man dieselben Gleichungen; es ist nämlich: $P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M) = a\,(x + y)$, (I) und für das Gewicht P erhält man die Proportion $P : g.t^2 = x : S$, woraus $x = \frac{P.S}{g.t^2}$. (II) Um das Gewicht y′ zu finden, welches die Lat Q unmittelbar zieht, oder in Bewegung setzt, haben wir wieder $y.a = y'.b$ und $y' = y.\frac{a}{b}$. Der Raum S′, welchen die Last beschreibt, wird aus der Proportion gefunden $S' : S = b : a$, woraus $S' = \frac{S.b}{a}$ und nun erhält man die weitere Proportion $Q : g.t^2 = y.\frac{a}{b} : \frac{S.b}{a}$, woraus $y = \frac{Q.S.b^2}{a^2.g.t^2}$ (III)

Substituirt man die Gleichungen II und III in I, so erhält man

$$P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M) = a\left(\frac{S.P}{g.t^2} + \frac{Q.S.b^2}{a^2.g.t^2}\right),$$ woraus

$$S = g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a + Q.b^2}\right),$$ d. h. S ist =

$$\frac{\text{dem Raume, welchen die Schwere gibt} \times \text{mit dem Hebelsarme a} \times \text{Differenz der statischen Momente}}{\text{Summe der Trägheits-Momente.}}$$

Den Raum, welchen die Last Q beschreibt, erhält man auf gleiche Art aus der Gleichung, $S' = g.t.b\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a^2 + Q.b^2}\right)$.

§. 521.

Aus der gefundenen Formel sieht man, dass, so oft die Kraft bei einem Rade an der Welle die Uiberwucht hat, eine beschleunigte Bewegung entsteht. Da nun die Kraft bei den meisten Maschinen nicht durchaus gleich stark zu wirken im Stande ist, so bringt man in solchen Fällen ein Schwungrad an. Man versteht darunter ein schweres, grosses Rad, welches zugleich an der Welle, woran die Kraft wirkt, oder auch an einer andern mit der Kraft verbundenen Welle angebracht ist und den Zweck hat, die Bewegung der Maschine so gleichförmig als möglich zu machen. In allen Fällen, wo die Kraft ihrer Natur nach nicht gleichförmig wirken kann, bedient man sich eines Schwungrades z. B. die Drechsler, Porzellaindreher, Spinner haben an ihren Drehbänken, Spinnrädern Schwungräder, weil sie mit ihrem Fusse das Rad mittelst des an einer Kurbel angebrachten Hebels nur herunter, nicht aber hinauf bewegen können, demnach das Rad nur durch einen Halbkreis bewegen, wogegen die Bewegung durch den andern halben Kreis von dem, dem Rade ertheilten Schwunge fortgesetzt werden muss. Die Menschen, welche an Kurbeln oder Haspeln arbeiten, üben hiebei eine grössere Kraft aus, wenn sie drücken oder ziehen, als wenn ihre Arme horizontal ausgespannt sind, man wendet daher auch bei allen Kurbelbewegungen Schwungräder an.

Bei Dampfmaschinen wird der Kolben und der mit ihm verbundene Hebel durch die Kraft der Dämpfe nur hinauf und hinabgezogen, man muss daher bei allen Dampfmaschinen ebenfalls Schwungräder anbringen, um die Bewegung während des Wechsels der Dämpfe durch die dem Rade ertheilte Schwungkraft zu bewirken. Derselbe Fall tritt auch bei Brettsägen und vielen andern Maschinen ein.

§. 522.

Alle diese Schwungräder dienen bloss dazu, die Bewegung der Maschine, wenn die Kraft nicht fortwährend gleich stark wirkt, möglichst gleichförmig zu machen; das Schwungrad selbst kann nie eine Bewegung hervorbringen, weil es in seinem Mittelpunkte auf der Achse liegt; der einzige Zweck desselben besteht darin, die Ungleichförmigkeiten der Bewegungen zu vermindern und den Gang der Maschinen so gleichförmig als möglich zu machen.

Um nun zu finden, wie ein Schwungrad eingerichtet seyn müsse, um den Zweck einer gleichförmigen Bewegung zu bewirken, wollen wir dessen Gewicht $= R$ und seinen Hebelsarm $= f$ setzen, ferner, um eine einfachere Formel zu erhalten, auf den Widerstand der Reibung keine Rücksicht nehmen. Demnach ist $P.a - Q.b$ das Moment, welches die Bewegung hervorbringt und $P.a - Q.b = a\,(x + y + z)$, (I) wo x das Gewicht ist, welches zur Bewegung von P, y das Gewicht, welches zur Bewegung von Q, und z derjenige Theil ist, welcher zur Bewegung des Schwungrades R verwendet wird. Demnach erhält man folgende Proportionen, $P : 2g.t = x : v$ und $x = \frac{P.v}{2g.t}$ (II), Fig. 16. Tab. 28.

Fig. 16. Tab. 28. ferner $Q : 2g.t = \frac{y.a}{b} : \frac{v.b}{a}$ und $y = \frac{Q.v.b^2}{a^2.2g.t}$, (III) endlich $R : 2g.t = z.\frac{a}{f} : \frac{v.f}{a}$ woraus $z = \frac{R.v.f^2}{a^2.2g.t}$ (IV). Substituirt man die Werthe II, III, IV in die Gleichung I, so erhält man $\frac{P.a - Q.b}{a} = \frac{P.v}{2g.t} + \frac{Q.v.b^2}{a^2.2g.t} + \frac{R.v.f^2}{a^2.2g.t}$ $= \frac{v}{2g.t}\left(\frac{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}{a^2}\right)$, woraus $\frac{v}{a} = 2g.t\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right) = \frac{v'}{b}$ $= \frac{v''}{f}$ und die Geschwindigkeit $v = 2g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$. Auf gleiche Weise findet man den Raum $S = g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$. Auf gleiche Art wird der Werth für die Räume S′ und S″ gefunden. Alle diese Formeln stimmen mit jenen, welche wir bisher für die beschleunigte Bewegung bei einem Rade an der Welle aufstellten, vollkommen überein; man erhält daher abermal die Geschwindigkeit oder den von einem Körper beschriebenen Raum, indem man die Differenz der statischen Momente mit der Summe der Trägheitsmomente aller Körper, die sich um den gemeinschaftlichen Punkt herumdrehen, dividirt und diess mit dem zugehörigen Hebelsarme und mit $g.t^2$ für den Raum, oder mit $2g.t$ für die Geschwindigkeit multiplicirt.

§. 523.

Den Raum und die Geschwindigkeit bei dem Rade an der Welle mit einem Schwungrade zu finden, wenn die Maschine, ehe die Kraft zu wirken anfing, schon eine Geschwindigkeit hatte.

Wenn das Rad eine Geschwindigkeit C erhält, so wird es sich immerfort mit derselben bewegen, und ausserdem noch jene Geschwindigkeit annehmen, die von der Uiberwucht herrührt; wir erhalten demnach die Geschwindigkeit von P, oder $v = C + 2g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$, und der von P beschriebene Raum ist $S = C.t + g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$. Findet hingegen an der Kraft eine Verminderung statt, oder wenn man den Körper P hinauf oder entgegendrückt, so ist: $v = C - 2g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$ und $S = C.t - g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$

Wenn daher bei der Umdrehung eines Rades an der Welle der Fall eintritt, dass das Moment der Kraft P.a an einem Orte grösser und an einem andern Orte kleiner als Q.b ist, so wird die Geschwindigkeit wechseln und zwar wird der Unterschied in der Geschwindigkeit die Grösse $\pm 2g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$ und der Unterschied im Raume die Grösse $\pm g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$ betragen. Hieraus sieht man den Grund, warum bei den Maschinen, wenn sich die Kraft, oder der Widerstand ändert, bald eine beschleunigte und bald eine verzögerte Bewegung erfolgen müsse.

Weil wir aber in dieser Rechnung die Kraft als ein Gewicht angenommen haben, welches in allen Punkten seiner Bewegung dieselbe Wirkung äussert, so versteht es sich von selbst, dass man diese Rechnung nur als eine Annäherung zur bessern Erklärung dieses Gegenstandes betrachten könne.

In dieser Hinsicht kommt es vorzüglich auf die obige Grösse $\frac{P.a - Q.b}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}$ an. Man sieht, dass eine Beschleunigung erfolgt, wenn das statische Moment der Kraft P.a grösser als das Moment der Last Q.b, und im Gegentheile erfolgt eine Verzögerung, wenn Q.b grösser als P.a ist. Eine ganz gleichförmige Bewegung ist nur zu erhalten, wenn diese zwei Momente einander gleich sind. Man muss daher in allen Fällen darauf sehen, diese Momente einander gleich zu machen; ist diess aber nicht möglich, so wird die Ungleichheit in der Bewegung durch die Grösse des Nenners vermindert. Da eine Vermehrung von $P.a^2$ und $Q.b^2$ in mancher Hinsicht nicht wohl geschehen kann, so kommt es vorzüglich auf das Moment $M.f^2$ an, d. h. das Schwungrad muss schwer seyn und was noch besser ist, die schweren Theile des Schwungrades müssen auf einer möglichst grossen Entfernung von der Achse angebracht werden.

Auf diese Weise wird in allen Fällen, wo die Kraft oder die Widerstände ungleichförmig wirken, eine möglichst gleichförmige Bewegung hervorgebracht. Hieraus erhellet aber auch, dass in jenen Fällen, wo sowohl die Kraft, als auch die Widerstände einander gleichförmig entgegenwirken, z. B. bei einem Pferdezuge das Anbringen eines Schwungrades sehr unschicklich seyn würde, weil diess der Kraft nichts nützen, nur die Reibung und die Hindernisse der Bewegung vermehren, und dem Effekte vielmehr nachtheilig seyn würde.

§. 524.

Will man auf den Widerstand der Reibung Rücksicht nehmen, so ist die Geschwindigkeit $v = C \pm 2\,g.t.a\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right)$ und der Raum

$$S = C.t \pm g.t^2.a\left(\frac{P.a - Q.b - e.m\,(P + Q + M)}{P.a^2 + Q.b^2 + R.f^2}\right).$$

Beispiel. Es sey die Last Q = 100 ℔, die Kraft P = 30 ℔, das Gewicht des Schwungrades R = 200 ℔, und das Gewicht der Maschine M = 240 ℔. Der Reibungscoeffizient $m = \frac{1}{8}$, der Halbmesser des Zapfens e = 1 Zoll, der Halbmesser der Welle b = 3 Zoll, und der Halbmesser der Kraft a = 12 Zoll, so ist:

$$v = C \pm 2g.t.12\left(\frac{30.12 - 100.3 - 1.\frac{1}{8}\,(30 + 100 + 240)}{30.144 + 100.9 + 200.f^2}\right), \text{ oder}$$

$$v = C \pm \frac{2\,g.t.165}{5220 + 200\,f^2}.$$

Wenn nun der Halbmesser des Schwungrades oder der Halbmesser derjenigen Peripherie, in welcher das Gewicht aller Bestandtheile des Schwungrades vereinigt gedacht werden kann, f = 36 Zoll, so ist $v = C \pm \frac{31\,t}{1603}$; wäre aber f doppelt so gross oder

$f = 72$ Zoll, so ist $v = C \pm \frac{31\,t}{6315}$, die Bewegung ist daher in dem zweiten Falle viel gleichförmiger, als in dem ersten. Setzt man im zweiten Falle $C = 2{,}5$ Fuss und

$t = 0^{Sec.}$ so ist $v = 2{,}5 \pm 0{,}00000$ Fuss

$t = 1$ „ „ $v = 2{,}5 \pm 0{,}00491$ „

$t = 2$ „ „ $v = 2{,}5 \pm 0{,}00982$ „

$t = 3$ „ „ $v = 2{,}5 \pm 0{,}01473$ „ u. s. w.

Die Unterschiede dieser Geschwindigkeiten zeigen zwar das Daseyn einer gleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung, allein diese ist so gering, dass die Bewegung offenbar durch mehrere Sekunden als gleichförmig betrachtet werden kann.

§. 525.

Wir kommen nun zu einem in der Mechanik sehr häufig vorkommenden Falle, nämlich zur Untersuchung der Bewegung mittelst eines Krummzapfens
Fig. 17. Tab. 28. durch menschliche Kräfte. Wenn bei einem Haspel die eiserne Achse verlängert, und wie Fig. 17 zweimal unter einem rechten Winkel gebogen ist, so wird diess ein Krummzapfen genannt; die Kraft treibt hier die Handhabe A am Hebelsarme c d im Kreise herum, wodurch sonach auch die an der Achse befestigte Welle umgedreht, und die Last mittelst der Aufwindung des Seiles senkrecht in die Höhe gehoben wird. Es
Fig. 18. sey A R U F, Fig. 18 dieser Kreis, so ist offenbar, dass der Arbeiter seine Kraft $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ nicht in allen Punkten des Kreises auf gleiche Art äussern, und durch abwechselndes Heben, Schieben, Drücken und Ziehen eine gleichförmige Erhebung der Last bewirken könne. Die allgemeine Erfahrung belehrt Jedermann, dass ein Arbeiter mit ausgestrecktem Arme keine so grosse Last heben kann, als in der Nähe seines Körpers; wenn der Arbeiter in U die Handhabe mit der ganzen Kraft seines Körpers herabzudrücken vermag, so kann er im Gegentheile bei R die Handhabe nur von sich schieben, und hiebei vom Gewichte seines Körpers keinen Gebrauch machen; in A wird er die Handhabe nur heben und bei F nur an sich ziehen können.

Um diese verschiedenen Kraftäusserungen auf eine einfachere Art auszuüben, pflegen die Arbeiter gewöhnlich die Krummzapfen nur in F an sich zu ziehen, in R mit einer grössern Schnelligkeit von sich zu schieben und die weitere Bewegung in der Zwischenzeit der eigenen sogenannten Trägheitskraft der Last und des Schwungrades zu überlassen. Diese Wirkungsart gewährt den Vortheil, dass die Kraft in R und F mit dem ganzen Halbmesser der Kurbel als Hebelsarm wirkt, wogegen in A und U ein Zug oder Stoss nach der Richtung A U gar nichts zu bewirken vermag, indem der ganze Stoss oder Zug von der Achse C ganz aufgehalten wird. Es ist demnach vortheilhafter, die Kraft bei A und U ganz ruhen zu lassen und dagegen in der Nähe der Punkte R und F einen um so stärkern Stoss auszuüben. Um eine noch grössere Ausgleichung zu bewirken,
Fig 19 und 20. hat man die Einrichtung angebracht, dass der eine Arbeiter bei P vermittelst der Zugstange P M, welche bei S aufgehängt ist, den Punkt M wechselweise anzieht und abstösst, während an derselben Welle ein zweiter Kurbelarm C R untern rechtem Winkel mit dem

ersten befestigt ist, der von dem zweiten Arbeiter in Q mittelst der in E aufgehängten Zugstange QR bewegt wird.

Diese Einrichtung gewährt den wesentlichen Vortheil, dass zu der Zeit, wann die Kraft des ersten Arbeiters sich in A befindet und zur Erhebung der Last nichts wirken kann, dagegen der andere Arbeiter in F seine volle Zugkraft ausübt; wenn sonach der erste Arbeiter von A nach F gelangt ist und in F seine volle Kraft ausübt, so kann der andere, der inzwischen nach U kam, und daselbst zur Bewegung der Last nichts wirken kann, durch mindere Anstrengung sich wieder erholen. Wir wollen zuerst die Kraft eines Arbeiters, der für sich allein mit ungleicher Kraft am Krummzapfen wirkt, betrachten. Fig. 18. Tab. 28.

Nehmen wir an, dass die Kraft des Arbeiters sich in der Mitte zwischen M und N nämlich in m befinde, und dass die Geschwindigkeit, womit sich der Krummzapfen im Kreise herumbewegen soll, $v = MN$ sey, so ist offenbar, dass der Arbeiter während der Zurücklegung seines Weges von M nach N nur den Raum Mo nach der horizontalen Richtung zurücklege, folglich auch die Geschwindigkeit, mit welcher der Krummzapfen der Kraft nach der horizontalen Richtung ausweicht, nur $= Mo$ seyn werde. Nun sind die Dreiecke MoN und m s′ C einander ähnlich, folglich verhält sich $Mo : MN = m\,s' : mC$; setzen wir nun $m\,s' = y$ und den Halbmesser des Krummzapfens $mC = a$, so ist $Mo : v = y : a$ und die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt m der Kraft nach der horizontalen Richtung ausweicht, ist $Mo = \frac{v \cdot y}{a}$. Substituiren wir diess in den ersten Theil der Kraftformel $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$, so ist die Kraft in $m = k\left(2 - \frac{v \cdot y}{c \cdot a}\right)$. Wir sehen hieraus, dass die Kraft sich fortwährend verändert, weil y in dem ganzen Kreise immer andere Werthe bekommt; in A und in U ist $y = 0$, demnach die Kraft $= 2k$, weil jedoch der Hebelsarm, mit welchem die Kraft in diesen zwei Punkten wirkt $= 0$ ist, so ist auch die Wirkung der Kraft daselbst $= 0$. Bei F ist dagegen $y = a$, demnach die Kraft $k\left(2 - \frac{v}{c}\right)$ oder am grössten.

Nachdem wir bereits gezeigt haben, dass bei einer jeden Maschine, wenn eine gleichförmige Bewegung statt finden soll, die Rücksicht auf Hebelsarme aus der Rechnung entfalle, und das Produkt der Last in ihren Raum gleich dem Produkte der Kraft in den gleichzeitig beschriebenen Raum sey, so muss auch hier die Kraft $k\left(2 - \frac{v \cdot y}{c \cdot a}\right)$ multiplicirt mit ihrem Raume Mo (welchen wir allgemein $= x$ setzen wollen) gleich seyn der Last Q multiplicirt mit ihrem in gleicher Zeit beschriebenen Raume Pp ($= p$) oder $k\left(2 - \frac{v \cdot y}{c \cdot a}\right) x = Q \cdot p$ (I).

Wenn die Kraft weiter von N nach D kommt, so wird der von ihr horizontal beschriebene Raum $Nn = x'$ und der von der Last beschriebene Raum $= p'$ seyn, und wir erhalten daher $k\left(2 - \frac{v \cdot y'}{c \cdot a}\right) x' = Q \cdot p'$ (II). Wenn die Kraft von D nach E kommt,

Fig. 18. Tab. 28. so erhalten wir abermal $k\left(2-\frac{v.y''}{c.a}\right)x''=Q.p''$ (III). So geht es nun durch die ganze krumme Linie von A über E bis U fort, und wir erhalten, wenn wir alle Gleichungen I, II, III addiren

$$2k(x+x'+x''.....)-\frac{k.v}{c.a}(x.y+x'.y'+x''.y''.....)=Q(p+p'+p''.....).$$

Diess ist die Gleichung für die obere halbe Peripherie, und da bei der untern halben Peripherie genau dasselbe statt findet, so ist der obige Ausdruck die allgemeine Gleichung zwischen Kraft und Last bei einem Krummzapfen sowohl für die obere als für die untere **halbe Peripherie des Kreises.** Es werden aber in diesem Falle die Grössen $x+x'+x''....=$ dem Durchmesser $2a$ seyn; ferner ist $x.y$ der Flächeninhalt des Trapezes M N s″s, $x'.y'$ die Fläche des zweiten Trapezes N D s‴s″......, demnach ist die Summe $x.y+x'.y'+x''.y''.....=$ der Fläche des halben Kreises $=\frac{22}{7}.a.\frac{a}{2}$. Endlich sind die Räume $p+p'+p''.....=$ der halben Peripherie der Welle $\frac{22}{7}.b$. Wir erhalten sonach, wenn alle diese Werthe substituirt werden:

$$2k(2a)-k.\frac{v}{c.a}\left(\frac{22}{7}.a.\frac{a}{2}\right)=Q.(\tfrac{22}{7}.b) \text{ oder } Q=k.\frac{a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right).$$

Wir wissen jedoch, dass die Kraft noch von der Zeit abhängt, wie viel Stunden der Arbeiter in einem Tage beschäftigt wird, und dass wir in dieser Hinsicht noch mit dem Faktor $\left(2-\frac{z}{t}\right)$ multipliciren müssen; wir erhalten sonach den Ausdruck:

$$Q=\frac{k.a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right),$$ welches nunmehr die Last ist, welche die Kraft zu gewältigen im Stande ist, wenn sie an einem Krummzapfen wirkt *).

Fig. 21. Tab. 28. *) Auf eine allgemeine Art würde der Gegenstand der Frage über die **Bewegung mittelst Krummzapfen** so zu behandeln seyn: Es sey der Halbmesser des Rades $AC=a$, jener der Welle $BC=b$, der Winkel ACM, welchen Kraft und Last in der Zeit t um den Mittelpunkt C beschrieben haben, sey $=w$. Demnach ist der Raum AM, den die Kraft in der Peripherie des Kreises in der Zeit t zurückgelegt hat $=a.w$, und eben so ist der Raum der Last in derselben Zeit $=b.w$; folglich ist die Geschwindigkeit, womit sich der Punkt M nach der Richtung des Kreises bewegt $v=\frac{Mm}{dt}=\frac{a.dw}{dt}$ und eben so ist die Geschwindigkeit der Last Q oder $\frac{Nn}{dt}=\frac{b.dw}{dt}$. Weil aber die **menschliche** Kraft sich nur nach der horizontalen Richtung Mo äussert, so müssen wir in der Kraftformel $k\left(2-\frac{v}{c}\right)$ für v die Grösse $\frac{Mo}{dt}=\frac{Mm.\operatorname{Sin}w}{dt}=v.\operatorname{Sin}w$ setzen; wir erhalten daher $k\left(2-\frac{v.\operatorname{Sin}w}{c}\right)$. Die Kraft wirkt in der horizontalen Richtung Mo mit dem Hebelsarme $ME=a.\operatorname{Sin}w$, also ist das statische Moment derselben $=k\left(2-\frac{v.\operatorname{Sin}w}{c}\right)a.\operatorname{Sin}w$. Das statische Moment der Last bleibt $=Q.b$; wir haben also für den Fall der Uiberwucht des Momentes der Kraft über das Moment der Last $k.a\left(2-\frac{v.\operatorname{Sin}w}{c}\right)\operatorname{Sin}w-Q.b=a(q+p)$ (I), wo q auf die Vermehrung der Geschwindigkeit der Last Q und p auf die Vermehrung der Geschwindigkeit des Schwungrades verwendet wird. Aus dem Gesetze, dass die Wirkungen den Kräften, von welchen sie bewirkt werden, proportional sind, folgt die Proportion: die Last Q durch sich selbst bewegt, würde in der Zeit dt die Geschwindigkeit $2g.dt$ erlangen; nun wird sie aber durch die

Diese Formel ist von jener verschieden, welche wir §. 19 für die unmittelbare Wirkung der Kraft der Menschen und Thiere gefunden haben. Wir sehen, dass bei einer Kurbel die Kraft desto grösser wird, je grösser der Halbmesser des Krumm-

Kraft $\frac{a.q}{b}$ bewegt und erhält die Geschwindigkeit $d\left(\frac{Nn}{dt}\right) = d\left(\frac{b.dw}{dt}\right)$ oder $Q:2g.dt = \frac{a.q}{b}:d\left(\frac{b.dw}{dt}\right)$. Weil aber $\frac{dw}{dt} = \frac{v}{a}$, so erhalten wir $Q:2g.\frac{a.d}{v} = \frac{a.q}{b}:\frac{b}{a}.dv$, Fig. 21. Tab. 28.
woraus $q.a.dw = \frac{Q.b^2}{a^2}.\frac{v.dv}{2g}$ (II).

Auf gleiche Art ist für die Beschleunigung des Schwungrades $M:2g.dt = \frac{a.p}{f}:\frac{f}{a}.dv$; da nun $\frac{f.v}{a} = \frac{f.dw}{dt}$, so ist auch $dt = \frac{a.dw}{v}$, folglich $M:\frac{2g.a.dw}{v} = \frac{a.p}{f}:\frac{f}{a}.dv$, also $p.a.dw = \frac{M.f^2.v.dv}{a^2.2g}$ (III). Diese zwei Gleichungen addirt geben $(p+q)\,a.dw = \left(\frac{Q.b^2}{a^2} + \frac{M.f^2}{a^2}\right)\frac{v.dv}{2g}$. Wird statt $(p+q)\,a$ der oben angegebene Werth gesetzt, so ist $k.a\left(2 - \frac{v.\text{Sin}\,w}{c}\right)\text{Sin}\,w.dw - b.Q.dw = \left(\frac{Q.b^2}{a^2} + \frac{M.f^2}{a^2}\right)\frac{v.dv}{2g}$ (IV).

Um das vollständige Integral dieser Gleichung zu finden, ist zu bemerken, dass die Beschleunigung bei dem Anfange der Bewegung verschwindet, und dass daselbst die Geschwindigheit, welche wir allgemein = v gesetzt haben, im Punkte A = der mittlern, die wir mit V bezeichnen, seyn muss. Das Integrale dieser Gleichung ist daher

$$k.2a(1-\text{Cos}\,w) - \frac{k.a.v}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\,w.\text{Cos}\,w}{2}\right) + \int\frac{k.a.dv}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\,w.\text{Cos}\,w}{2}\right) - b.Q.w = \left(\frac{Q.b^2 + M.f^2}{a^2}\right)\left(\frac{v^2 - V^2}{4g}\right).$$

Wir erhalten hieraus $\frac{v^2}{4g} =$

$$\frac{V^2}{4g} + \frac{k.a^2}{Q.b^2 + M.f^2}\left\{2a(1-\text{Cos}\,w) - \frac{a.v}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\,w.\text{Cos}\,w}{2}\right) + \int\frac{a.dv}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\,w.\text{Cos}\,w}{2}\right) - \frac{b.Q.w}{k}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke ist $\frac{V^2}{4g}$ die Geschwindigkeitshöhe in A bei dem Anfange der Beschleunigung, die folgenden Glieder enthalten sowohl die Beschleunigung als Verzögerung und man sieht daraus, dass dieselbe um so kleiner werde, je kleiner der Coeffizient $\frac{k.a^2}{Q.b^2 + M.f^2}$ ist. Weil k, Q, a und b gewöhnlich gegeben sind, so kommt es vorzüglich darauf an, das Bewegungsmoment $M.f^2$ gegen $k.a^2$ sehr gross zu machen, wenn die Bewegung möglichst gleichförmig werden soll. Da nun in diesem Falle der Unterschied v — V sehr klein wird, demnach der Ausdruck für die noch weitere Ungleichförmigkeit dieser Beschleunigung, wo dv vorkommt, gegen die übrigen Grössen vernachlässigt werden kann, so haben wir nur die Gleichung

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{V^2}{4g} + \frac{k.a^2}{Q.b^2 + M.f^2}\left\{2a(1-\text{Cos}\,w) - \frac{a.v}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\,w.\text{Cos}\,w}{2}\right) - \frac{b.Q.w}{k}\right\}$$

zu betrachten, woraus wir nun zuerst die Gleichung für den Beharrungszustand der Maschine, dann die Beschleunigung und Verzögerung der Bewegung ableiten können.

Die vorstehende Gleichung ist eigentlich nur für den Zustand der Maschine, wo die Kraft schiebt, berechnet, sie beschränkt sich daher bis zu $w = \pi$, oder bis eine halbe Umdrehung vollendet ist. Hierauf wirkt diese Kraft zurückziehend und da wir diese der erstern gleich annehmen, so findet auch für die zweite halbe Peripherie dieselbe Gleichung wieder statt. Beim Beharrungsstande der Maschine wird vorausgesetzt, dass an denselben Punkten immer wieder dieselbe Geschwindigkeit eintritt. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit V, welche anfangs statt fand, auch nach 180 Grad wiederkehre; in diesem Falle ist also $v = V$ und wenn wir $w = \pi$ setzen, so haben wir für den Beharrungsstand $0 = 2.2 - \frac{V}{c}.\frac{\pi}{2} - \frac{b.Q.\pi}{a.k}$ oder $2a.k\left(2 - \frac{V}{c}.\frac{\pi}{4}\right) = b.Q.\pi$. Diese

zapfens (a) ist, allein diess ist durch die Länge des menschlichen Armes bestimmt, und kann nicht leicht grösser als $a = 12$ Zoll genommen werden. Auf gleiche Weise kann der Halbmesser der Welle nicht leicht kleiner als 3 Zoll seyn; nehmen wir nun

Fig. 21. Tab. 28. Gleichung zeigt, dass die Kraft k mit dem Raume 2 a und mit dem Coeffizienten $2 - \frac{V \cdot \pi}{4c}$ multiplicirt = der Last Q multiplicirt mit ihrem Raume $b \cdot \pi$ sey. Geht das Schwungrad mit der mittlern Geschwindigkeit $V = c$ der Kraft herum, so ist $2\,a \cdot k\,(2 - {}^{11}/_{14}) = b \cdot Q \cdot {}^{22}/_{7}$ oder $a \cdot k \cdot 17 = Q \cdot b \cdot 22$, wogegen bei der Winde $a \cdot k = Q \cdot b$ ist; es gehen also $^{5}/_{22}$ der Kraft bei dem Krummzapfen in dem Falle verloren, wenn er mit der mittlern Geschwindigkeit der menschlichen Kraft bewegt wird. Uiberhaupt ist $k = \frac{b \cdot Q}{a}\left(\frac{\pi}{4 - \frac{v}{c} \cdot \frac{\pi}{2}}\right)$; daraus sieht man, dass die Kraft sich um so mehr anstrengen müsse, je grösser das Verhältniss $\frac{v}{c}$ angenommen wird, oder je schneller die Maschine umgedreht werden soll. Die Bestimmung des vortheilhaftesten Werthes von v zur Bewirkung des grössten Effektes ist im Texte §. 526 enthalten.

Wird in dem obigen Integrale $v = c$ gesetzt, oder die Kurbel mit der mittlern Geschwindigkeit der Kraft herumgetrieben, so ist für den Beharrungsstand $k \left\{ 2\,(1 - \text{Cos}\,w) - \frac{w}{2} + \frac{\text{Sin}\,w \cdot \text{Cos}\,w}{2} \right\} - \frac{b \cdot Q \cdot w}{a} = 0$. Weil $v = V$, wenn $w = 180 = \pi$, so ist für den Beharrungsstand $k\left(4 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{b \cdot Q \cdot \pi}{a} = 0$; dieselbe Gleichung findet aber auch statt, wenn wir statt w nur 90 Grad $= \frac{\pi}{2}$ setzen, denn in diesem Falle ist $k\left(2 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{b \cdot Q \cdot \pi}{a \cdot 2} = 0$, oder wenn mit 2 multiplicirt wird, $k\left(4 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{b \cdot Q \cdot \pi}{a} = 0$; folglich kehrt auch am Ende des ersten Quadranten die Geschwindigkeit, welche zu Anfang der Bewegung vorhanden war, zurück. Dasselbe lässt sich für den dritten Quadranten zeigen; also findet dieselbe Geschwindigkeit viermal in der Peripherie statt, nämlich bei $w = 0$, $w = \frac{\pi}{2}$, $w = \pi$, $w = {}^{3}/_{2}\,\pi$, dann $w = 2\pi$

Die Maximen und Minimen finden statt, wenn in der obigen allgemeinen Differenzialgleichung IV das $d\left(\frac{v^2}{4g}\right) = 0$ gesetzt wird, oder wenn $k\left(2 - \frac{v \cdot \text{Sin}\,w}{c}\right) d\,w \cdot \text{Sin}\,w - \frac{b.Q.\,d\,w}{a} = 0$ ist. Setzt man hier $v = V = c$, so ist $k\left(2 - \text{Sin}\,w\right) \text{Sin}\,w - \frac{b \cdot Q}{a} = 0$. Das zweite Differenzial hievon ist $2\,d\,w \cdot \text{Cos}\,w - 2\,\text{Sin}\,w \cdot d\,w \cdot \text{Cos}\,w = 2\,d\,w \cdot \text{Cos}\,w\,(1 - \text{Sin}\,w)$. Weil Sin w immer kleiner als 1, folglich 1 — Sin w eine positive Grösse ist, so wird der Fall des Maximum oder Minimum nur aus dem Cosinus bestimmt. Ist nämlich w kleiner als 90 Grad, so ist der Cosinus positiv, folglich die Geschwindigkeit ein Minimum; ist aber w grösser als 90 Grad, so ist Cos w negativ, folglich die Geschwindigkeit ein Maximum.

Für den Beharrungsstand haben wir $v = c$ angenommen und es war $k\left(4\,a - \frac{a \cdot \pi}{2}\right) = Q \cdot b \cdot \pi$ oder $\frac{b \cdot Q}{k \cdot a} = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$, also haben wir für den Fall des Maximum $2\,\text{Sin}\,w - \text{Sin}^2 w = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$, woraus $\text{Sin}\,w = 1 \pm \sqrt{^{5}/_{22}}$. Hier kann nur $-\sqrt{\ }$ statt finden, weil der Sinus nie grösser als 1 werden kann, demnach ist $\text{Sin}\,w = 1 - \sqrt{^{5}/_{22}} = 0{,}5233$; hiezu gehört $w = 31^0\,33^{\text{Min.}}$ und $w = 148^0\,27^{\text{Min.}}$

Im ersten Falle ist der Cos w positiv, folglich gibt die obige Gleichung ein Minimum; im zweiten Falle ist der Cos w negativ, wir haben daher ein Maximum. Man sieht hieraus, dass die

noch einen mittelmässig starken Menschen an, wobei $k = 25$ ℔, $v = c = 2{,}5$ Fuss und $z = t = 8$ Stunden ist, so erhalten wir die Kraft, welche dieser Arbeiter am Krummzapfen ausübt $= 25 \cdot \frac{12''}{3''}\left(\frac{14}{11} - \frac{2{,}5}{5}\right)\left(2 - \frac{8}{8}\right) = 77{,}27$ ℔, wogegen derselbe Arbeiter bei einer Winde, wo er im Kreise herumgeht, die Kraft $k \cdot \frac{a}{b} = 25 \cdot \frac{12''}{3''} = 100$ ℔ ausüben würde; hieraus folgt, dass die Kraft eines Arbeiters am Krummzapfen um beiläufig ein Viertheil geringer sey, als wenn derselbe Arbeiter zieht oder trägt. Die geringere Wirkung der Kurbelbewegung hat bereits *Desaguliers* bemerkt, jedoch ihre Grösse nicht genau angegeben. Da überdiess die Erfahrung in allen Ländern diess bestätigt hat, so wird die Kurbel nur selten gebraucht.

§. 526.

Den Effekt bei einem Haspel (Krummzapfen) zu berechnen, wenn bloss ein Arbeiter angestellt ist.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit der Last mit v' und jene der Kraft mit v, so ist $v' = \frac{v \cdot b}{a}$, die Zeit eines Aufzuges $= \frac{H \cdot a}{v \cdot b}$ und die Anzahl der Aufzüge in 1 Tage $= \frac{3600 \cdot z \cdot v \cdot b}{H \cdot a}$ endlich findet man den Effekt, wenn man die Last Q, welche der Arbeiter auf einmal aufzieht, mit der Anzahl der Aufzüge multiplicirt

$$= \frac{k \cdot a}{b}\left(\frac{14}{11} - \frac{v}{2c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)\frac{3600 \cdot z \cdot v \cdot b}{H \cdot a} = \frac{3600 \cdot t \cdot c \cdot k}{H} \cdot \frac{v}{c} \cdot \frac{z}{t}\left(\frac{14}{11} - \frac{v}{2c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right).$$

Dieser Ausdruck soll nun ein Maximum werden, zu welchem Behufe zuerst der Faktor $\frac{z}{t}\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ ein Maximum werden muss, welches der Fall ist, wenn man $z = t$ annimmt. Ferner muss der zweite Faktor $\frac{v}{c}\left(\frac{14}{11} - \frac{v}{2c}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{c}\left(\frac{28}{11} - \frac{v}{c}\right)$ ebenfalls ein Maximum werden. Wenn man zu diesem Behufe die Linie $AD = \frac{28}{11}$ und Fig. 2. Tab. 1.

Bewegung von $w = 0$ bis $w = 31^\circ\ 33^{Min.}$ verzögert wird, bei diesem Winkel am kleinsten ist, hierauf beschleunigt wird, bei $w = 90^\circ$ zur ursprünglichen Geschwindigkeit zurückkehrt, und bei der fortwährenden Beschleunigung bei $w = 148^\circ\ 27^{Min.}$ am grössten wird; von da aus wird sie wieder verzögert, kehrt bei 180° zur ursprünglichen Geschwindigkeit zurück u. s. w. Fig. 21. Tab. 28.

Die wirkliche Grösse der grössten uud kleinsten Geschwindigkeit ergibt sich aus der Gleichung $\frac{v^2}{4g} = \frac{V^2}{4g} + \frac{k \cdot a^2}{Q \cdot b^2 + R \cdot f^2}\left\{2a(1 - \text{Cos}\, w) - \frac{a \cdot v}{c}\left(\frac{w - \text{Sin}\, w \cdot \text{Cos}\, w}{2}\right) - \frac{b \cdot Q \cdot w}{k}\right\}$. Setzt man hier im letzten Gliede $v = c$ und statt $\frac{b \cdot Q}{k \cdot a}$ den im Beharrungszustande gefundenen Werth $\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$, so ist $\frac{v^2}{4g} = \frac{V^2}{4g} + \frac{a \cdot k \cdot a^2}{Q \cdot b^2 + R \cdot f^2}\left\{2 - 2\,\text{Cos}\, w + \frac{\text{Sin}\, 2w}{4} - \frac{4w}{\pi}\right\}$. Setzt man hier $w = 31^\circ\ 33^{Min.}$ und $\pi = {}^{22}/_{7}$, so ist $\frac{v^2}{4g} = \frac{V^2}{4g} - \frac{0{,}1822 \cdot a \cdot k \cdot a^2}{Q \cdot b^2 + R \cdot f^2}$.

Wird aber $w = 148^\circ\ 27^{Min.}$ gesetzt, so ist $\frac{v^2}{4g} = \frac{V^2}{4g} + \frac{0{,}1839 \cdot a \cdot k \cdot a^2}{Q \cdot b^2 + R \cdot f^2}$.

Fig. 2. Tab. 1. $BD = \frac{28}{11} - \frac{v}{c}$ macht, so ist $\left(\frac{28}{11} - \frac{v}{c}\right)\frac{v}{c} = AB \,.\, BD = BE^2$, und diess wird ein Maximum, wenn $AB = BD$ oder $\frac{28}{11} - \frac{v}{c} = \frac{v}{c}$ wird. Hieraus findet man $v = \frac{14\,c}{11}$, wofür man $v = \frac{5}{4}\,c$ annehmen kann. Die beste Wirkung eines Arbeiters bei einem Krummzapfen findet daher statt, wenn derselbe nicht mit der mittlern Geschwindigkeit, sondern beiläufig um $\frac{1}{4}$ schneller arbeitet. Diess wird abermal durch die Erfahrung bestätigt, indem nach *Desaguliers* die englischen Arbeiter am Krummzapfen eine um $\frac{1}{4}$ grössere Geschwindigkeit haben, als es bei den andern Arbeiten derselben Menschen der Fall ist.

Wenn wir nun die gefundenen Werthe in die, im vorigen Paragraphe abgeleitete Gleichung für die Kraft des Arbeiters am Krummzapfen $Q = \frac{k.a}{b}\left(\frac{14}{11} - \frac{v}{2c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$ substituiren, so ist $Q = \frac{k.a}{b}\left(\frac{14}{11} - \frac{7}{11}\right)\left(2 - \frac{1}{1}\right) = \frac{k.a}{b} \cdot \frac{7}{11}$. Wenn daher der Arbeiter von mittelmässiger Stärke ist, so beträgt dessen Kraft $Q = \frac{7}{11} \cdot 25$ ℔ $\times \frac{a}{b}$, d. h. die Kraft des Arbeiters am Krummzapfen beträgt bei seiner vortheilhaftesten Verwendung nur $\frac{7}{11}$ oder 64 Procent jener Kraft, welche derselbe Arbeiter im Zuge oder bei dem Tragen einer Last verwendet.

Wenn wir die gefundenen Werthe in die Gleichung für den Effekt substituiren, so ist derselbe $= \frac{3600}{H} . t . \frac{14\,c}{11} \cdot \frac{b}{a} \cdot k . \frac{a}{b} \cdot \frac{7}{11} = \frac{98}{121} \cdot \frac{3600 . t . c . k}{H} = 0{,}81 \times \frac{3600 . t . c . k}{H}$ d. h. der Effekt eines Arbeiters am Krummzapfen wird erhalten, wenn man dessen mittleres Bewegungsmoment mit der Höhe dividirt, und hievon $\frac{81}{100}$ nimmt. Dieser Effekt ist daher um $\frac{19}{100}$ kleiner, als es bei dem Tragen oder Ziehen einer Last der Fall ist, und wir ersehen sonach als Resultat dieser Rechnungen, dass der Effekt oder die Arbeit eines Menschen am Krummzapfen 19 Procente weniger, als seine Arbeit beim Ziehen (z. B. bei einer Winde) oder beim Tragen beträgt; es ist daher weit besser, eine Winde statt eines Haspels oder Krummzapfens zum Aufziehen von Lasten zu verwenden.

Beispiel. Es sey die Aufzugshöhe $H = 10^0 = 60$ Fuss, so ist der Effekt

$$= 0{,}81 \times \frac{3600 . 8 . 2{,}5 . 25}{60} = 24300 \text{ ℔}.$$

Ein Arbeiter kann daher aus der Tiefe von 10 Klaftern mit einem Hornhaspel täglich 243 Zentner aufziehen, wobei jedoch der Widerstand der Reibung und Unbiegsamkeit der Seile noch nicht berechnet ist, und daher noch anzuschlagen kommt.

§. 527.

Betrachten wir nunmehr zwei Arbeiter, die gemeinschaftlich an einem Haspel arbeiten, wobei die Krummzapfen unter rechtem Winkel gestellt sind.

Die Gleichung für die Kraft des ersten Arbeiters ist nach §. 525.

$$2k(x+x'+x''......)-\frac{k.v}{c.a}(x.y+x'.y'+x''.y''....)=Q(p+p'+p''....).$$

Die Gleichung für die Kraft des zweiten Arbeiters ist:

$$2k(X+X'+X''......)-\frac{k.v}{c.a}(X.Y+X'.Y'+X''.Y''....)=Q(p+p'+p''....).$$

Es fallen nämlich die Werthe von $x, x', x''....$ in den ersten Quadranten, und die Werthe von $X, X', X''....$ in den zweiten Quadranten, und wenn die Last einen Quadranten beschreibt, so wird $x+x'+x''....=a$, und eben so $X+X'+X''....=a$, der Flächeninhalt $x.y+x'.y'+x''.y''....$ beträgt die Fläche des Quadranten $\frac{22}{7}\cdot\frac{a^2}{4}$, und dasselbe beträgt $X.Y+X'.Y'+X''.Y''....$ Endlich beträgt der Raum der Last $p+p'+p''....$ ebenfalls den vierten Theil der Peripherie der Welle oder $\frac{22}{7}\cdot\frac{b}{2}$. Wenn wir demnach substituiren, so ist die Gleichung für den ersten Arbeiter $2k.a-\frac{k.v}{c.a}\left(\frac{22}{7}\cdot\frac{a^2}{4}\right)=Q\left(\frac{22}{7}\cdot\frac{b}{2}\right)$ und die Gleichung für den zweiten Arbeiter ist $2k.a-\frac{k.v}{c.a}\left(\frac{22}{7}\cdot\frac{a^2}{4}\right)=Q\left(\frac{22}{7}\cdot\frac{b}{2}\right)$. Werden diese zwei Gleichungen addirt, so erhalten wir die Gleichung zwischen Kraft und Last bei einem Krummzapfen, wobei zwei Arbeiter angestellt sind $2k.2a-\frac{k.v}{c.a}\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{a^2}{2}=Q.\frac{22}{7}.b$, woraus

$Q=\frac{k.a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)$ und mit Rücksicht auf die Arbeitszeit

$$Q=\frac{k.a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right).$$

Diese Gleichung ist genau dieselbe, welche wir §. 525 gefunden haben.

§. 528.

Den Effekt bei einem Haspel zu berechnen, wenn zwei Menschen unter rechten Winkel der Krummzapfen mit einander arbeiten.

Ist die Geschwindigkeit der Arbeiter v, so ist abermal die Anzahl der Aufzüge in einem Tage $n=\frac{3600.z.v.b}{H.a}$, dagegen ist aber die Last doppelt so gross als jene, die oben gefunden wurde, oder $Q=\frac{2k.a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$. Das Produkt beider gibt den Effekt $=\frac{3600.z.v.b}{H.a}\cdot\frac{2k.a}{b}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$

$$=\frac{3600.t.c.2k}{H}\cdot\frac{v}{c}\cdot\frac{z}{t}\left(\frac{14}{11}-\frac{v}{2c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right).$$

Soll diess ein Maximum werden, so muss abermal $z=t$ und $\frac{v}{c}=\frac{14}{11}$ seyn, demnach ist der grösste Effekt in einem Tage $=\frac{98}{121}\cdot\frac{3600.t.c.2k}{H}$. Diess ist genau dieselbe Grösse, welche wir §. 526 fanden, nur ist 2k statt k in unserem Aus-

drucke, weil dermalen zwei Menschen und oben nur ein Arbeiter angenommen wurde. Der Effekt ist daher mit zwei Arbeitern gerade doppelt so gross, als bei einem Arbeiter, allein die Verwendung zweier Arbeiter gewährt den Vortheil, dass sich die Kraft und Geschwindigkeit viermal innerhalb einer Peripherie herstellt, während diess bei einem Arbeiter nur zweimal innerhalb einer Peripherie eintritt, dass also die Bewegung weit gleichförmiger wird. Hiebei ist jedoch in Erinnerung zu bringen, dass bei zwei an einer Kurbel arbeitenden Menschen die Kraftanstrengung eines jeden einzelnen nicht sichtbar ist, demnach die mindere Verwendung des einen dem andern zur Last fällt. —

Uiber die vorstehende Theorie der Bewegung am Krummzapfen ist zu bemerken, dass selbe hier nur in der Hinsicht abgehandelt wurde, als die bewegende Kraft jene der Menschen ist, und dass diese Kraft auch auf dieselbe Art, wie es bei den Dampf- oder Wassersäulmaschinen der Fall ist, nur als schiebend und zurückziehend betrachtet wurde. Für die Kräfte der Dämpfe und des Wassers werden wir die Kurbelbewegung bei diesen Maschinen noch eigends behandeln.

VII. K a p i t e l.

Frachtwägen, Strassen- und Eisenbahnen.

§. 529.

Die ältesten Maschinen, welche die Menschen erfunden haben, sind unstreitig der Pflug und der Wagen. Es musste gleich den ersten Menschen einfallen, wenn sie eine ihre Kräfte übersteigende Last bewegen wollten, selbe auf der Erde fortzuziehen, statt ihr ganzes Gewicht zu tragen. Da jedoch auch bei dem Fortziehen oder Schleppen einer Last ein grosser Widerstand dadurch entsteht, indem die untere Seite der Last von der rauhen Erde, Sand und Steinen angegriffen, Theile abgerissen und die Last selbst beschädigt wird, so verfiel man wohl bald auf den Gedanken hölzerne Schleifen unterzulegen, um dadurch die Waaren vor Beschädigungen zu schützen. Diese Schleifen konnten überdiess auch mehr eben gemacht werden, als es in den meisten Fällen bei der Last möglich ist; durch die grössere Länge derselben wurde der Druck auf die Erde gleichförmiger vertheilt und sie konnten über die Unebenheiten des Bodens leichter fortgebracht werden. Dieses Fuhrwerk, nämlich die Schleife oder der Schlitten ist noch bis zum heutigen Tage die einfachste Art, eine Last zu transportiren, und wenn der Boden, auf welchem gefahren wird, sehr eben und glatt ist, welches in unsern Gegenden im Winter auf einer gefrorenen und schon hinlänglich befahrenen Schlittenbahn der Fall ist, so werden die Pferde dadurch in Stand gesetzt, sehr grosse Lasten fortzuziehen. Nennen wir nämlich das Gewicht der Ladung und der Schleife $= Q$ und den Reibungscoeffizienten, welcher den Widerstand Fig.
zwischen der Schleife und dem Boden ausdrückt $= m$, so ist offenbar, dass die Kraft 1. Tab.
nur den Widerstand $m . Q$ zu überwältigen hat, und dass sonach $K = m . Q$ ist. Im 29.
Winter ist auf einer gefrorenen und hinlänglich abgefahrenen Bahn $m = \frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$, ein Pferd kann sonach 20 bis 30 Zentner auf einer guten Schlittenbahn fortziehen. Allein im Sommer und vorzüglich auf schlechten Strassen ist der Widerstand solcher Schleifen sehr gross, und wir sehen gewöhnlich, dass Stücke Holz von denselben abgerissen werden und auf der Strasse zurückbleiben; man kann demnach für solche Fälle $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ und selbst $\frac{1}{2}$ setzen, der Vortheil solcher Schleifen ist daher bei schlechten Strassen äusserst gering.

In dieser Hinsicht musste wohl die Erfahrung gleich die ersten Menschen belehren, dass es in vielen Fällen leichter sey, die Lasten zu wälzen, als sie auf einer und derselben Fläche fortzuschleppen. Diese Leichtigkeit findet vorzüglich bei kreisrunden Körpern statt, wobei die gleiche Entfernung der Aussenseite von ihrer Mitte oder vom Schwerpunkte das Wälzen ungemein erleichtert. Hieraus ergab sich von selbst die Anwendung kreisrunder Körper bei dem Fortschaffen grosser Lasten, welcher Vortheil bis auf unsere Zeiten beibehalten und nur noch zweckmässig verbessert worden ist. Ein merkwürdiges Beispiel einer solchen bloss wälzenden Bewegung erzählt *Vitruvius* im 6ten Kapitel des 10ten Buches vom Baumeister *Ktesiphon*, welcher bei dem berühmten Baue des Tempels der Diana zu Ephesus für die Zufuhr der grossen, übermässig schweren

60 Fuss langen marmorenen Säulen, welche die stärksten Räder und Wägen eingedrückt haben würden, das Mittel wählte, dass er die runden Säulenschäfte von beiden Seiten in der Mitte anbohren, mit Achsen versehen, und durch vorgespannte Zugthiere auf dieselbe Art fortwälzen liess, welche noch gegenwärtig bei unsern Garten- und Feldwalzen im Gebrauche ist. Andere Denkmale des Alterthums, welche nicht rund waren, und desshalb sich nicht stürzen oder wälzen liessen, wurden auf Gerüste gebracht, und auf untergelegten Walzen eben so fortgeführt, wie noch zu unsern Zeiten der grosse Felsen, den die Kaiserinn *Katharina* zum Monumente *Peter des Grossen* bestimmt hatte, nach Petersburg geschafft worden ist. Da hiezu der Boden vorläufig geebnet und zur Beseitigung von Eindrücken mit starkem Zimmerholze belegt, dann die hintersten ausgelaufenen Walzen wieder vorwärts getragen, und wenn die Last gross ist, auch noch Pfähle vorgeschlagen werden müssen, um Erdwinden und Flaschenzüge daran zu befestigen, so fällt die Langsamkeit eines solchen Fuhrwerkes von selbst in die Augen.

Zur Vermeidung des Aufenthaltes, der vom Auslaufen und Vorwärtstragen der Walzen entsteht, verfiel Jemand in dem unbekannten Alterthume auf den sinnreichen Gedanken, von den Walzen nur Scheiben oder kurze runde Klötze abzuschneiden, selbe in der Mitte zu durchbohren, und an feste runde Hölzer oder Achsen zu stecken, damit auf diese Weise die Scheiben oder kurzen Walzen mit dem Gerüste, worauf die Last liegt, zugleich fortgebracht werden. Man machte wohl bald die Erfahrung, dass man leichter fährt, wenn diese Scheiben gross und leicht sind, und diess hatte nunmehr die Bauart der Wagenräder mit Naben, Speichen und Radfelgen, die mit eisernen Schienen zusammengebunden wurden, zur Folge; hiedurch wurden nun unsere Wagenräder grösser, leichter und auch dauerhafter, als die ehemaligen Scheiben, deren sich noch die Türken nach der letzten Belagerung Wiens zur Fortführung ihrer Kanonen bedient haben sollen.

Die übrige Einrichtung der Frachtwägen, nämlich die Leitern mit ihren Verbindungen und Stützen, um dazwischen zu laden und die Gepäcke zu verwahren, die Stange oder Deichsel sammt Wage oder Widerhalt, um der Fahrt die gehörige Richtung zu geben, beide Zugpferde mit gleicher Arbeit zu belegen und den Wagen bergab anhalten zu können, die Verbindung des Vorder- und Hintergestelles mit einer einfachen Stange (Ruthe oder Langwiede) um den vier Rädern auf ungleichem Boden das gleiche Aufsitzen zu verschaffen, der Reihnagel, um ausweichen und umkehren zu können u. dgl. gehören eigentlich zur praktischen Ausfertigung, zur Regierung und Bedienung des Wagens und kommen daher bei der gegenwärtigen Theorie in keine Rechnung.

§. 530.

Der Vortheil der Wägen besteht daher darin, dass der Boden oder die Erde die Last trägt und die vorgespannten Thiere bloss die Widerstände zu überwältigen haben. Diese Widerstände oder Hindernisse sind folgende:

1tens Durch die Achsen, welche an dem Gestelle des Wagens befestigt sind, wird die Reibung nicht so, wie durch die ehemaligen Walzen behoben, sondern eigentlich nur von dem Erdboden oder von der Peripherie der Räder an die Peripherie ihrer Achsen übersetzt. Es wird nämlich die innere oder hohle Seite der Nabe des Rades an der auswärtigen Seite der Achse noch eben so fortgeschoben und gerieben, wie es bei der Schleife auf dem Erdboden der Fall

war. Nur der Umstand kommt hiebei zu statten, dass die Achsen und Naben rund abgedreht, geschmiert und mit Eisen beschlagen werden können, wodurch sowohl der Reibungswiderstand vermindert, als auch für längere Dauer gesorgt wird.

2tens Sowohl durch einzelne im Wege liegende S t e i n e, als auch auf dem festen S t e i n p f l a s t e r verlieren die Wägen durch das Anstossen der Räder an die Steine einen Theil von ihrer Bewegung, der von der Zugkraft wieder ersetzt werden muss. Das Rasseln und Poltern der Wägen auf den Gassen und Strassen gibt dem Gehöre sehr merklich zu erkennen, welche bedeutende Kraft zur fortwährenden Unterhaltung dieses Getöses erforderlich seyn müsse. Zuweilen sind die Radreifen auf den Felgen mittelst eiserner Nägel befestigt, deren Köpfe über den Radreifen hervorstehen. Hieraus entsteht ein Widerstand, der gerade derselbe ist, als wenn Steine im Wege lägen, deren Höhe der Höhe der Nagelköpfe gleich kommt.

3tens Die runde Peripherie der Räder, welche dem Wagen die leichte Beweglichkeit gibt, hat den merkwürdigen Nachtheil gegen sich, dass der Wagen nur von einer sehr kleinen unbedeutenden Fläche unterstützt, sonach der Punkt, wo die Räder die Strasse berühren, von der Last des Wagens eingedrückt wird. Die Räder lassen desshalb G e l e i s e zurück, welche nach Verhältniss der Ladung und der Nachgiebigkeit des Bodens tiefer werden, und in demselben Maasse auch die Fahrt beschwerlicher machen.

4tens Die meisten Wagenräder sind k o n i s c h gebaut, d. h. die Speichen stehen mit den Radfelgen nicht in einer und derselben Ebene, sondern sie bilden die Oberfläche eines Kegels, dessen Achse in die Mitte der Wagenachse fällt. Da nun die Oberfläche des Radreifens senkrecht auf diesen Kegel steht, so laufen nicht alle Punkte in der Oberfläche des Radreifens mit gleicher Geschwindigkeit herum, und zwar werden die Punkte ausserhalb am Wagen einen kleinern und die Punkte am Radreifen zunächst des Wagenkastens einen grössern Kreis beschreiben, folglich entsteht eine Reibung oder Schleifung des Radreifens auf dem Erdboden, wodurch wieder ein besonderer Widerstand hervorgebracht wird.

5tens Die Art der Bespannung oder die Richtung der Zugstränge kann auch ein Hinderniss für die Zugkraft werden, wenn dadurch der Druck des Wagens an die vorkommenden Steine, Sand und Erde vermehrt, oder im Gegentheile durch eine zu hohe Richtung den Pferden zu viel Last aufgebürdet wird.

6tens Nebst diesen Widerständen, welche auf horizontalen Strassen vorhanden sind, kommt bei Gebirgsstrassen noch ein bedeutender Widerstand vor, indem nur ein Theil der Last von der Strasse getragen wird, der übrige Theil aber von den Pferden gezogen werden muss, wobei nicht nur das Gewicht des leeren Wagens, sondern auch jenes der Zugpferde der Kraft entgegen wirkt.

Wir wollen nun versuchen, alle diese Gegenstände in Rechnungsformen zu bringen, um vorläufig mit den Gesetzen, denen diese Hindernisse unterliegen, bekannt zu werden, und ihre eigentliche Grösse aus der Erfahrung entnehmen zu können. Diese Theorie wird dann von selbst die Regeln angeben, wie ihre nachtheilige Wirkung zweckmässig vermindert, dagegen die Vortheile der Frachtwägen vermehrt und sonach von einer ge-

gebenen Zugkraft die grösste Last in der kürzesten Zeit an den Ort ihrer Bestimmung gebracht werden könne.

§. 531.

Fig. 2. Tab. 29. Widerstand der Reibung an den Achsen der Räder. Wenn die Räder an den Achsen unbeweglich fest sitzen, oder gesperrt (gebremset oder mit Radschuhen unterlegt) werden, so drückt die Last des geladenen Wagens bei b auf die Strasse, und die Zugkraft hat die ganze Reibung zu überwältigen, womit das Rad von der rauhen Strasse angehalten wird. Dieser Widerstand lässt sich, wie wir wissen, allgemein durch m . Q ausdrücken, wo Q die Last bedeutet, womit die reibenden Flächen an einander gedrückt werden (also das Gewicht des Wagens und der Ladung) und m eine Zahl vorstellt, welche mit der Rauhigkeit der Flächen im Verhältnisse steht, und mittelst eigener Erfahrungen bestimmt werden müsste. Wenn jedoch die Räder um die Achse beweglich sind, so findet die Reibung m . Q nur bei a statt, wo die Achse auf der hohlen Nabe aufliegt. Diesen Widerstand wollen wir nun dahin zurückführen, wie stark der Wagen von der Erde zurückgehalten wird, wenn die Reibung m . Q an der Achse ist. Wir müssen daher eine Kraft suchen, die an der Peripherie des Rades wirkt und mit der Reibung an der Achse im Gleichgewichte ist; sey diese $= \mathfrak{K}$, ferner sey der Halbmesser des Rades bc $=$ A, jener der Achse ca $=$ a, so ist $\mathfrak{K} . A = a . m . Q$, und hieraus ist die Kraft $\mathfrak{K} = \frac{a}{A} . m . Q$. Es ist demnach eben so viel, als ob an der Peripherie des Rades bei b nur der Widerstand $\frac{a}{A} . m . Q$ vorhanden und das Rad um die Achse unbeweglich wäre, die Räder gewähren demnach den Vortheil, dass der Widerstand, welcher ohne die Beweglichkeit des Rades $= m . Q$ seyn würde, nur $= \frac{a}{A} . m . Q$ beträgt.

Gewöhnlich ist die Last Q auf vier Rädern vertheilt, folglich ist der Druck auf ein Rad $\frac{Q}{4}$ und der Widerstand für ein Rad $= \frac{m.Q}{4} . \frac{a}{A}$; der gesammte Widerstand für alle vier Räder beträgt daher $4 . \frac{m . Q}{4} . \frac{a}{A} = m . Q . \frac{a}{A}$ wie zuvor.

Hieraus lässt sich nun beurtheilen, unter welchen Umständen die Wägen in Hinsicht der Reibung an den Achsen leicht gehen; nämlich

1^tens. Je kleiner das Verhältniss $\frac{a}{A}$ ist; ein Wagen wird daher leicht gehen, wenn er grosse Räder und dünne Achsen erhält. Allein die Grösse der Räder darf nicht zu sehr vermehrt werden, weil in diesem Falle auch das Gewicht der Räder zunimmt, und daher der Widerstand vorzüglich bei dem Bergauffahren wächst. Wägen mit hohen Rädern schwanken mehr, und fallen auf geneigten Strassen leichter um, als jene mit niedrigen Rädern, dann sind grosse Räder in der Regel auch gebrechlicher als kleine; wir sehen daher, dass die Erfahrung uns ein gewisses Maass für A festsetzt, welches nicht überschritten werden darf. Man pflegt in dieser Hinsicht die Räder bei zweirädrigen Wägen gewöhnlich $4\frac{1}{2}$ bis 5 Fuss, und bei vierrädrigen Lastwägen 4 bis $4\frac{1}{2}$ Fuss gross zu machen. Die Achsen werden von Holz oder Eisen gemacht, und die höl-

zernen mit Eisen beschlagen. Da die Tragungsfähigkeit des Eisens viel grösser als jene des Holzes ist, so kann man eiserne Achsen auch viel schwächer als hölzerne machen, und die erstern werden daher vorzüglich bei Stadtwägen angewendet. Die Verminderung der Durchmesser der Achsen hat inzwischen auch ihre Gränze, indem sie so berechnet werden müssen, um das Brechen zu vermeiden; es gibt daher auch hier ein bestimmtes Maass, das nicht überschritten werden darf.

2tens. Die Zugkraft wird desto geringer, je kleiner der Reibungscoeffizient m ist, in welcher Hinsicht die Nabe ausgedreht, vollkommen geglättet und gut geschmiert wird. Man dreht daher auch die Achsen genau ab, und beschlägt sie mit Eisen, wenn sie von Holz sind; die Nabe erhält ebenfalls wenn sie von Holz ist, eine metallene Büchse, demnach kann man in den meisten Fällen $m = \frac{1}{8}$ setzen.

3tens. Die Zugkraft wird desto geringer, je kleiner die Last Q ist, wie sich übrigens von selbst versteht. Unter Q wird jedoch immer nur jene Last verstanden, welche den Druck und sonach die Reibung an der Nabe verursacht; diess ist das Gewicht der Ladung und das Gewicht des Wagengestelles, die Räder sind hierunter nicht begriffen, weil selbe bloss auf die Erde drücken, und daher hinsichtlich der Reibung an den Achsen keinen Einfluss ausüben.

Wenn der Widerstand der Räder an dem Erdboden kleiner als der Widerstand an den Achsen $m \cdot Q \cdot \frac{a}{A}$ ist, so bewegen sich die Räder nicht; diess sieht man öfters im Winter, wenn die Schneebahn recht abgefahren und dagegen die Wagenschmiere eingefroren ist. Ist hingegen der Widerstand an der Erde grösser als an den Achsen, so bewegen sich die Räder.

Beispiel. Es sey der Durchmesser der Räder $2A = 5$ Fuss $= 60$ Zoll, der Durchmesser der Achsen $2a = 4$ Zoll und der Reibungscoeffizient für Eisen auf Eisen $m = \frac{1}{8}$, so ist die zur Ueberwältigung der Reibung an den Achsen nothwendige Zugkraft $\mathfrak{K} = \frac{1}{8} Q \cdot \frac{4}{60} = \frac{Q}{120}$, d. h. der Widerstand beträgt nur den 120sten Theil der Last, oder es ist eben so viel, als wenn man nur den 120sten Theil der Last zu tragen oder zu ziehen hätte. Wäre daher $Q = 20$ Zentner, so ist $\mathfrak{K} = 16\frac{2}{3}$ ℔.

Da nun die Kraft eines Pferdes zu 1 Zentner angeschlagen wird, so würde folgen, dass ein Pferd eine Last von 120 Zentner, (worunter das Gewicht der Ladung und des Wagens begriffen ist) zu ziehen vermag; allein wir wissen, dass man auf ein mittelmässig starkes Pferd gewöhnlich nur 10 bis 12 Zentner Ladung rechnet. Hieraus ergibt sich, dass die übrigen im vorigen Paragraphe bemerkten Widerstände bei weitem mehr betragen müssen, als die Reibung an den Achsen.

§. 532.

Der nächste Widerstand, welchen wir zu betrachten haben, wird durch die Steine verursacht, an welche die Räder anstossen. Da die Räder bei diesem Stosse von

Fig. 3. Tab. 29.

der ihnen eigenthümlichen Geschwindigkeit v einen Theil verlieren, so muss derselbe durch die Zugkraft der Pferde wieder ersetzt werden. Es sey die Geschwindigkeit oder der Raum, welchen der Wagen in jeder Sekunde zurücklegt $BC = CD = v$. Man ziehe durch den Berührungspunkt i des Rades am Steine die Tangente iN und den Radius Ci, so ist offenbar, dass sich das Rad nach der Richtung dieser Tangente als über eine schiefe Fläche hinauf bewegen muss. Zerlegt man daher die Geschwindigkeit CD in CF und CE, so ist CE die Geschwindigkeit, mit welcher das Rad an den Stein anstösst, die sonach verloren geht, und CF ist die Geschwindigkeit, womit das Rad über die schiefe Fläche iN hinaufsteigt. Man kann nun abermal CF in die Senkrechte FG und die Horizontale CG auflösen. Die erstere FG trägt offenbar zur horizontalen Fortbewegung des Wagens nichts bei; es bleibt demnach nur die Bewegung CG übrig, folglich verliert das Rad von seiner Geschwindigkeit CD den Theil $CD - CG = GD$, welcher von der Zugkraft der Pferde wieder ersetzt werden muss, wenn der Wagen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $BC = CD$ fortgeführt werden soll.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke verhält sich $CD : CF = Ci : CK$, ferner $CF : CG = Ci : CK$, demnach $CD : CG = Ci^2 : CK^2$ oder $v : CG = A^2 : CK^2$, woraus $CG = \frac{v \cdot CK^2}{A^2}$; folglich ist der Verlust der Geschwindigkeit, welchen das Rad durch den Stoss an den Stein erleidet $CD - CG = v - \frac{v \cdot CK^2}{A^2} = v\left(\frac{A^2 - CK^2}{A^2}\right) = \frac{v \cdot Ki^2}{A^2} = \frac{v \cdot AK \cdot KM}{A^2}$, und setzt man annäherungsweise $KM = 2A$ und die Höhe des Steines $h = AK$, so ist $GD = \frac{2v \cdot h}{A}$.

Da nun der Wagen mit einerlei Geschwindigkeit fortgehen soll, so müssen die Pferde die an dem Steine verlorne Geschwindigkeit des Wagens wieder ersetzen. Es sey nun Q das Gewicht des W a g e n s s a m m t R ä d e r n u n d d e r L a d u n g, so erhält dieses Q, wenn es sich selbst bewegt, in der Zeit t die Geschwindigkeit $2g \cdot t$; nun wird es aber durch einen Theil der Zugkraft der Pferde oder $\mathfrak{K}'$ bewegt, und dieser muss die verlorene Geschwindigkeit $\frac{2v \cdot h}{A}$ wieder ersetzen, oder $Q : 2g \cdot t = \mathfrak{K}' : \frac{2v \cdot h}{A}$ woraus $\mathfrak{K}' = \frac{Q \cdot v \cdot h}{A \cdot g \cdot t}$.

Da der Wagen mit der mittlern Geschwindigkeit v fortgehen soll, und durch den Stoss an Steine von seiner Bewegung nichts verlieren darf, so ist offenbar, dass die verlorene Geschwindigkeit in der Zeit von einem Steine bis zu dem andern wieder ersetzt werden muss. Es sey daher die Entfernung eines Steines vom andern $= E$, so ist diese Zeit $t = \frac{E}{v}$, und diess substituirt ist $\mathfrak{K}' = \frac{Q \cdot v^2 \cdot h}{A \cdot g \cdot E}$ derjenige Theil der Zugkraft, welchen die Pferde wegen einzelner im Wege liegender Steine anwenden müssen. Hieraus folgt:

1^tens. Die Zugkraft wird desto grösser, je grösser Q oder das Gewicht des ganzen Wagens und der Ladung ist. Schwere Wägen fordern demnach in allen Fällen mehr Zugkraft als leichte.

2^tens. Die Zugkraft wächst mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit welcher gefahren wird. Wenn daher die Geschwindigkeit v, 2v, 3v ist, so verhält

sich die Zugkraft wie 1 : 4 : 9 Es ist also zuträglicher, auf steinigten Strassen langsam zu fahren, und dafür schwerer zu laden, als mit kleinern Ladungen schneller zu fahren. Das Poltern der Wägen, die über steinigte Strassen fahren, ist nichts anders, als das Geräusch, welches die Steine bei dem Stosse der Räder an dieselben verursachen und alle diese Stösse müssen die Pferde durch ihre Zugkraft wieder ersetzen.

3tens. Je höher die im Wege liegenden Steine sind, oder je mehr h beträgt, desto mehr Zugkraft müssen die Pferde anwenden. Man fährt demnach schwerer über grössere Steine als über kleinere.

4tens. Je grösser der Halbmesser der Räder A ist, desto kleiner wird die Zugkraft. Wenn wir nämlich zwei Wägen annehmen, deren einer höhere Räder als der andere hat, so werden die schiefen Flächen, über welche die Räder nach unserer obigen Erklärung fahren müssen, bei kleinen Rädern und denselben Steinen höher als bei grossen Rädern; demnach sind hohe Räder besser als niedere, weil sie keine so hohe schiefe Flächen bilden.

5tens. Je näher ein Stein am andern ist, oder je mehr Steine auf einer gegebenen Länge des Weges vorkommen, desto mehr Zugkraft haben die Pferde nöthig; wäre E unendlich gross, so ist $\mathfrak{K}' = 0$, weil dann gar keine Steine vorhanden sind; dasselbe ist der Fall, wenn die Höhe der Steine $h = 0$ ist.

Beispiel. Es sey das Gewicht des Wagens und der Ladung $Q = 2000$ ℔, die Geschwindigkeit $v = 4$ Fuss, die Entfernung eines Steines vom andern $E = 4$ Fuss, die Höhe der Steine $h = 2$ Zoll und die Höhe der Räder $2\,A = 60$ Zoll, so ist $\mathfrak{K}' = \frac{2000 . 4^2 . \frac{1}{6}}{2{,}5 . 15{,}5 . 4} = 34{,}4$ ℔, wogegen wir im vorigen Paragraphe den Widerstand der Reibung für sich allein $= 16\frac{2}{3}$ ℔ gefunden haben; der Widerstand 2 Zoll hoher Steine beträgt daher weit mehr.

§. 533.

Dieselbe Berechnung findet für den Widerstand statt, wenn die Radreifen an die Radfelgen mit Nägeln befestigt sind, deren Köpfe über die Oberfläche der Radreifen hervorragen; dieser Widerstand wird desshalb bedeutend, weil er auf sehr kleinen Entfernungen vorkommt, indem diese Nagelköpfe bloss einige Zolle von einander entfernt sind. Es sey nämlich die Höhe eines solchen Nagelkopfes $h = \frac{3}{8}$ Zoll, und die Entfernung eines Nagels vom andern $E = 9$ Zoll, so ist die nöthige Zugkraft zur Uiberwindung des Widerstandes, der aus den hervorstehenden Nagelköpfen entsteht, in dem obigen Beispiele $\mathfrak{K}' = \frac{2000 . 4^2 . 3}{2{,}5 . 15{,}5 . 9 . 8} = 34{,}4$ ℔ wie oben.

Der Widerstand ist daher derselbe, wenn 2 Zoll hohe Steine in der Entfernung von 4 Fuss von einander auf der Strasse liegen, oder wenn an den Radreifen Nagelköpfe von $\frac{3}{8}$ Zoll Höhe in der Entfernung von 9 Zoll von einander hervorstehen, weil $\frac{2}{48} = \frac{3}{8 . 9}$. Wenn selbst die Höhe der Nägelköpfe nur $\frac{1}{6}$ Zoll beträgt, und wenn dieselben 4 Zoll von einander entfernt sind, so entsteht ein gleicher Widerstand, als wenn Stei-

ne von 2 Zoll Höhe in der Entfernung von 4 Fuss von einander auf der Strasse liegen weil $\frac{1}{6.4} = \frac{2}{48}$. Man ersieht daher, wie nothwendig es sey, die Köpfe der Nägel genau in die Radreifen zu versenken, weil sonst ein sehr bedeutender Widerstand entsteht.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass die Berechnung in dem vorigen und in diesem Paragraphe den Fall voraus setzt, dass die im Wege liegenden Steine sich weder in den Erdboden eindrücken, noch vor dem Rade zermalmen oder zerdrücken, sondern dass dieselben auf einer harten Grundfläche liegen; eben so wird vorausgesetzt, dass die Köpfe der Nägel sich nicht in den Erdboden eindrücken, sondern auf eine vollkommen harte Unterlage, z. B. auf ein Steinpflaster treffen, wie es in den meisten Städten der Fall ist.

§. 534.

Widerstand der Steine bei einem Pflaster. Wenn ein Wagen über ein hartes Steinpflaster fährt, so erleidet derselbe an jedem Steine oder in jeder Vertiefung zwischen zwei Steinen einen Stoss und eine merkliche Erschütterung, und die Räder sinken immerwährend aus einer Vertiefung in die andere. Dieser Widerstand muss demnach für die Zugpferde um so nachtheiliger werden, je schlechter das Pflaster oder je grösser die Gruben sind, die sich zwischen den Steinen vorfinden. Es sey B E D eine solche Vertiefung zwischen zwei Steinen, worin sich das Rad befindet; man ziehe durch die Berührungspunkte B und D die Tangenten des Rades BE, DE, so muss der Wagen, wenn er sich von M nach N bewegt, über die Tangente BE herab und über ED hinauffahren. Es sey nun die Geschwindigkeit oder der Raum, welchen der Wagen in einer Sekunde von M nach N zurücklegt = v. Da die Bewegung des Wagens bei dem Hinabfahren desselben über die schiefe Fläche AE von der Schwerkraft zwar beschleunigt, aber bei dem Hinauffahren über die schiefe Fläche ED wieder um eben so viel verzögert wird, so wollen wir hier nur denjenigen Verlust in Rechnung nehmen, welcher durch den Stoss an den Punkt D entsteht, demnach die Geschwindigkeit, mit welcher der Wagen an den Stein N ankommt, oder womit er über BE herabfährt = AE = v setzen. Wird nun aus A die Linie AF winkelrecht auf DE gezogen, so zerfällt die Bewegung AE in AF, welche durch den Stoss an dem unbeweglichen Steine N verloren geht, und in FE = c, womit das Rad nach der Richtung ED seine Bewegung fortsetzt. Man beschreibe aus E mit dem Halbmesser AE den Kreisbogen GAH, so ist der erlittene Verlust an der Geschwindigkeit offenbar = AE — EF = GF = v — c. Dieser Verlust muss von der Zugkraft wieder ersetzt werden, wenn die Geschwindigkeit des Wagens nicht abnehmen, sondern auf der Strasse in M und N gleich bleiben soll.

Fig. 4. Tab. 29.

Nach der bekannten Eigenschaft des Kreises ist FG : AG = AG : GH, sonach $FG = \frac{AG^2}{GH} = \frac{AG^2}{2AE}$. Die Aehnlichkeit der Dreiecke AEG und DCB gibt AG : AE = DB : BC, sonach $AG = \frac{AE.DB}{BC}$; folglich der Geschwindigkeitsverlust $FG = \frac{AE.DB^2}{2.BC^2}$. Es sey die Entfernung der zwei Berührungspunkte B und D oder die Breite der Fuge BD = e, und die Entfernung oder die Grösse der Pflastersteine

MN = E, so haben wir, wegen A E = v und B C = A, den Verlust $FG = \frac{v \cdot e^2}{2A^2}$; Fig. 4. Tab. 29.
folglich gibt uns die Proportion $2g \cdot t : Q = \frac{v \cdot e^2}{2A^2} : \mathfrak{K}''$, oder $2g \cdot \frac{E}{v} : Q = \frac{v \cdot e^2}{2A^2} : \mathfrak{K}''$.
Sonach ist der Widerstand, welcher den Pferden bei jeder Fuge zweier Steine begegnet, oder die Zugkraft $\mathfrak{K}'' = \frac{Q \cdot v^2 \cdot e^2}{4g \cdot E \cdot A^2}$.

Man sieht aus diesem Ausdrucke, dass die Zugkraft auf einem gepflasterten Wege von denselben Umständen abhängig sey, als wenn bloss einzelne Steine im Wege liegen; die Zugkraft wird nämlich gross:

1tens. Wenn das Gewicht der Ladung und des Wagens oder Q bedeutend wird.

2tens. Nimmt die Zugkraft wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher gefahren wird, zu.

3tens. Nimmt die Zugkraft mit dem Quadrate der Breite der Fuge zwischen zwei Steinen, e^2 zu.

4tens. Wird die Zugkraft vorzüglich vermindert, je grösser der Durchmesser des Rades 2 A ist, endlich

5tens. Wird die Zugkraft desto kleiner, je grösser die Entfernung E zweier Steine von einander ist, d. h. je weniger Gruben oder Fugen zwischen den Steinen vorkommen.

Da hier die Zugkraft eigentlich im Quadrate des Verhältnisses der Breite der Vertiefungen zum Halbmesser des Rades wächst, so folgt, dass einige grosse oder tiefe Löcher in der Strasse für die Zugkraft nachtheiliger als mehrere kleine sind, und dass man überhaupt über dieselben Steine mit grossen Rädern leichter als mit kleinen fahre.

Eine gleiche Berechnung findet für den Fall statt, wenn ein Rad in eine Grube einsinkt und auf der entgegenstehenden Seite eine feste oder steinigte Widerlage findet. In diesem Falle ist nämlich der Widerstand auch um so grösser, je grösser die Breite der Grube ist.

§. 535.

Auf den angeführten Grundsätzen beruht die Anlage der Steinbahnen, welche man schon seit längerer Zeit in einigen italienischen Städten, vor mehreren Jahren in *Edinburgh* und erst im Jahre 1829 in *London* von den ostindischen *Docks* bis zu der *Royal exchange* in der *City* in einer Länge von beinahe 3 engl. Meilen angelegt hat. Diese Steinbahnen dienen für das schwere Fuhrwerk, welches die gewöhnliche Strasse theils zu sehr beschädigen, theils auch einen nicht unbedeutenden Widerstand auf derselben erleiden würde; man hat daher in die gewöhnliche Strasse zwei Reihen Quadersteine für die hingehenden, und zwei Reihen solcher Steine für die zurückgehenden Wägen eingelegt; diese Steine sind 15 Zoll tief, wenigstens 2 Fuss lang und 18 Zoll breit, sie sind auf gleiche Höhe mit der äussern Strasse versenkt und liegen im Grunde auf sehr fest zusammengeschlagenen Schotter, so wie sie auch an den zwei Seiten, wo sie mit der Strasse in Berührung kommen, vollkommen fest verstampft werden; endlich werden zu den Steinen nur die härtesten Gattungen genommen. Fig. 5.

Eine solche Steinbahn bildet für die Wägen eine vollkommen harte unnachgiebige Grundfläche, und da die Steine wenigstens 2 Fuss lang und an ihren Enden vollkommen genau zusammengefügt sind, so folgt von selbst, dass hier beinahe keine Widerstände ausser der Reibung an den Achsen (vorausgesetzt, die Strasse sey horizontal) vorhanden sind. Die Steinbahnen sind sonach ein Ersatzmittel für Eisenbahnen, und da auf ihnen ein jeder Wagen ohne Unterschied fahren kann, welches bei Eisenbahnen nicht der Fall ist, so ist es unbezweifelt, dass die Anlage solcher Steinbahnen innerhalb und in der Nähe von Städten von wesentlichen Nutzen ist.

§. 536.

Wenn auf einer Strasse unbedeutende Höhen und Tiefen vorkommen, welche keinen Stoss verursachen, sondern in Gestalt einer gestreckten Schlangenlinie sanft auf- und ablaufen, so sind sie für die Zugpferde weder zum Nachtheile noch zum Vortheile. Wenn nämlich die Steigung und der Abhang sehr sanft und von der Art ist,
Fig. 6. Tab. 29. dass die Wägen Fig. 6 von M nach N nicht in die Haltketten fallen, oder nicht angehalten zu werden brauchen, so wird der Zug über den Abhang M N um eben so viel leichter, als er bei dem Ansteigen über N O schwerer ist. Dieselbe Betrachtung findet auch bei flachrunden Steinen statt, indem von der Schwerkraft bekannt ist, dass sie bei der Bewegung über eine abhängige runde Oberfläche dem Körper eben so viel Geschwindigkeit gibt, als sie bei dem Ansteigen über eine gleiche Höhe wieder entzieht. Weil nun die Kraft der Pferde durch kein so genau bestimmtes Maass beschränkt wird, wie die Zugkraft eines Gewichtes, sondern auf eine kurze Zeit ein wenig mehr angestrengt werden kann, wenn hierauf wieder eine eben so grosse Erleichterung folgt, so wird durch diese Abwechslung weder das Kraftvermögen der Pferde, noch die gleichförmige Bewegung des Wagens merklich verändert.

Dieselbe Betrachtung kommt denjenigen Wägen zu statten, bei welchen, gewöhnlich zur Bequemlichkeit der Reisenden, der Kasten des Wagens nicht unmittelbar auf die Achsen der Räder gelegt, sondern mittelst Stahlfedern unterstützt wird, welche dem Stosse nachgeben, wodurch dann der Wagen mit der zu verführenden Last nicht mehr so viel von seiner Geschwindigkeit verliert, und überhaupt bewirkt wird, dass der Schwerpunkt des
Fig. 7. Wagens bei dem Fahren über Steine (Fig. 7) nur die gestreckte Schlangenlinie b c a c′ b beschreibt, sonach denjenigen Verlust an seiner Geschwindigkeit, den er auf dem Wege c a aufwärts erfährt, auf dem Wege a c′ abwärts beinahe wieder zurückerhält. Da es zu weitläufig seyn würde, diesen Gegenstand durch eigene Rechnungen umständlicher zu erläutern, so dürfte es hinreichend seyn, die Leser nur auf die Versuche des Engländers *R. L. Edgeworth* aufmerksam zu machen, welche in Deutschland von *Gilbert* in den Annalen der Physik, neue Folge, Band XXI. S. 322, bekannt gemacht worden sind.

§. 537.

Eine weitere Art des Widerstandes ist die Nachgiebigkeit des Bodens, über welchen der Wagen geführt wird. Eine jede Erde ist eines Eindruckes fähig, welcher sich nach der Beschaffenheit derselben richtet, indem er desto mehr beträgt, je weicher die Erde ist. Aus dieser Ursache sinkt auch ein jedes Rad in den Boden, worauf es steht

mehr oder weniger und zwar so tief ein, bis der Widerstand der runden Fläche HAE so gross ist, als der Druck des Rades auf diesen Boden. Wenn ein Wagen ruhig steht, so ist der Druck an das Rad beiderseits gleich, das Einsinken der Räder in Geleise hat daher nichts zu bedeuten. Wird aber der Wagen nach der Richtung FHE fortgeführt, so steht die zusammengedrückte Erde, wie bekannt, hinter dem Rade nicht wieder auf, sondern jedes Rad hinterlässt eine Spur oder ein Geleise; es ist daher beinahe eben so, als wenn das Rad fortwährend über eine schiefe Fläche hinauffahren und sie niederdrücken müsste. Es erhellet von selbst, dass das Rad während seiner Bewegung nicht mehr von dem rückwärtigen Bogen HA, sondern nur von dem vorwärtigen AE unterstützt und getragen werde; die mittlere Richtung dieses Bodendruckes geht demnach nicht mehr durch den Mittelpunkt des Rades C, sondern fällt vorwärts in die Linie OG, wodurch dieser Gegendruck ein statisches Moment erhält, welches von der Zugkraft der Pferde überwältigt werden muss. Da die Erde vor dem Rade bei E noch gar nicht zusammengedrückt ist, bei A hingegen die auf der Höhe AB vorhanden gewesene Erde theils auf die Seite geschoben, theils aber auch herabgedrückt und dadurch die Dichtigkeit und Festigkeit des Bodens bei A vermehrt worden ist, so erhellet, dass auch der Widerstand oder der Gegendruck des Bodens bei E und A nicht gleich sey, sondern nach Maasgabe der dichter und fester gewordenen Erde von E bis A zunehme.

Fig. 8. Tab. 29.

Um hier keine allzuschwierige Rechnung zu erhalten, können wir bei dem Umstande, dass sehr tiefe Geleise ohnehin als nachtheilig bekannt sind, und daher hier nur von minder tiefen Eindrücken inzwischen gehandelt wird, **den ganzen Druck dem kubischen Inhalte der Grube proportional setzen**, so dass bei einem 2, 3 . . . n^{mal} stärkern Drucke oder Gewichte des beladenen Wagens auch ein 2, 3 . . . n^{mal} grösserer Kubikinhalt Erde von dem Rade eingedrückt wird, und daher auch ein um eben so viel grösseres Geleise entsteht. Nennen wir die Tiefe des Einsinkens $BA = h$, die Länge der Grube $BE = B$ und die Breite der Radschiene $= b$, so wäre der Kubikinhalt der eingedrückten Grube, im Falle von A nach E eine gerade Linie ginge $= \frac{1}{2} . B . h . b$; weil jedoch AE ein Kreisbogen ist, so wird dieser Inhalt etwas grösser, und zwar nach den Berechnungen der höhern Analysis $= \frac{2}{3} . B . h . b$.

Es bezeichne nun W das Gewicht, welches nöthig ist, einen Kubikzoll solcher Erde einzudrücken, so ergibt sich das Gewicht Q, welches offenbar den Eindruck von $\frac{2}{3} B . h . b$ bewirkt, aus der Proportion $1 : W = \frac{2}{3} B . h . b : Q$, woraus $Q = \frac{2}{3} W . B . h . b$. Nun verhält sich aber in dem Kreise $h : B = B : 2A - h$, oder wenn man h in der Subtraktion gegen 2 A weglässt, (da h bei guten Strassen gewöhnlich nur $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll und 2A 4 bis 5 Fuss beträgt) so ist $h = \frac{B^2}{2A}$, und diess substituirt $Q = \frac{2}{3} . W . B . \frac{B^2}{2A} . b$, woraus $B = \sqrt[3]{\frac{3 Q . A}{W . b}}$.

Es sey nun der Schwerpunkt des eingedrückten Erdkörpers in O, so ist nach unserer obigen Erklärung das statische Moment des Widerstandes $Q . GC =$ dem Momente der Zugkraft $\mathfrak{K}'''$ multiplizirt mit A, weil wir uns wieder den Widerstand auf die Peripherie des Rades oder auf die für die Pferde hieraus entstehende Zugkraft reduzirt denken; da nun die Entfernung des Schwerpunktes nach §. 77, $GC = \frac{3}{8} . EB = \frac{3}{8} . B$

gefunden wurde, so ist $Q.\frac{3}{8}B = \mathfrak{K}'''.A$, woraus

$$\mathfrak{K}''' = \frac{Q}{A}.\frac{3}{8}B = \frac{Q}{A}.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3Q.A}{W.b}} = Q.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3Q}{W.b.A^2}}.$$

Aus dieser Rechnung ist zu ersehen:

1tens Der Widerstand der Geleise nimmt in allen Fällen in einem grössern Verhältnisse zu, als nach Maassgabe der Last Q; es ist demnach in Rücksicht auf diesen Widerstand vortheilhafter, die Fracht auf mehr Wägen zu vertheilen, als auf einen Wagen übermässig viel zu laden. Nehmen wir an, ein Wagen sammt Ladung wiege 160 Zentner, so ist die Zugkraft zur Uiberwältigung des Widerstandes der Geleise $\mathfrak{K}''' = 160.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3.160}{W.b.A^2}}$. Wenn hingegen diese Last auf acht Wägen vertheilt ist, so dass jeder Wagen sammt seiner Ladung bloss 20 Zentner wiegt, so ist der Widerstand der Geleise für jeden einzelnen Wagen $= 20.\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\frac{3.20}{W.b.A^2}}$ und sonach für alle 8 Wägen $= 8.20.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3.20}{W.b.A^2}}$; es verhält sich sonach der Widerstand der Geleise für einen 160 Zentner schweren Wagen zum Widerstand der Geleise für 8 Wägen, deren jeder bloss 20 Zentner wiegt, wie $160.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3.160}{W.b.A^2}} : 8.20.\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3.20}{W.b.A^2}} = \sqrt[3]{160} : \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{1} = 2:1$, d.h. die Zugkraft für 8 Wägen ist nur halb so gross, als jene für einen Wagen, oder auch wenn 16 Pferde zu dem einen, 160 Zentner schweren Wagen benöthigt werden, so braucht man bloss 8 Pferde, um alle 8 Wägen, deren jeder 20 Zentner (Ladung und eigenes Gewicht) Schwere hat, fortzuziehen. Wenn daher der Boden weich ist, so ist es weit besser, die Last auf mehrere Wägen zu vertheilen, man fährt nämlich leichter, oder mit einer geringern Bespannung. Ein sehr schwerer Wagen kann in einer weichen Strasse so sehr einsinken, dass man ihn gar nicht mehr weiter bringt, während die leichtern Wägen noch immer fortkommen. Da es nach der obigen Formel vorzüglich auf eine vielfache Vertheilung der Last Q auf mehrere Räder ankommt, so sehen wir, dass in dieser Hinsicht ein Wagen mit vier Rädern den Vorzug vor einem zweirädrigen und ein Wagen mit sechs Rädern den Vorzug vor einem vierrädrigen verdient, weil bei dem letztern (im Falle einer gleichen Ladung) der Druck auf mehrere Räder vertheilt ist, folglich der Widerstand der Geleise nach der obigen Berechnung bedeutend vermindert wird. In dieser Hinsicht würde sich die Einführung sechsrädriger Wägen empfehlen, wenn nicht andere Hindernisse, wohin vorzüglich die verminderte Beweglichkeit des Wagens gehört, im Wege stünden.

2tens Der Widerstand der Geleise wird desto grösser, je kleiner das Gewicht W ist, welches zum Eindrücken eines Kubikzolles erfordert wird.

3tens Der Widerstand der Geleise nimmt ab, wenn der Halbmesser des Rades A vermehrt wird; folglich fährt man abermals mit grossen Rädern leichter, als mit kleinen.

4tens Der Widerstand der Geleise wird auch kleiner, wenn die Breite der Radschienen b grösser genommen wird; demnach fährt man mit breiten Schienen leichter, als mit schmalen. Wenn nämlich die Schienen oder Felgen breiter

sind, so drücken mehr Theile auf die Strasse, folglich können die Räder nicht so tief einsinken, und daher ist auch der Widerstand und sonach die Zugkraft zur Uiberwältigung dieses Widerstandes kleiner; dieser Widerstand verhält sich nach der obigen Formel, wie $\sqrt[3]{\frac{1}{b}} : \sqrt[3]{\frac{1}{b'}}$. Wenn also bei gleicher Belastung die Radfelgen achtmal so gross gemacht werden, so wird der Widerstand der Geleise auf die Hälfte vermindert, ein solches Rad würde jedoch zu schwer werden und vorzüglich beim Bergauffahren hinderlich seyn; nehmen wir daher die Breite der Radfelgen zu 4 Zoll statt der hier Landes meistens gebrauchten von $1\frac{3}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll Breite an, so verhalten sich die Widerstände der Geleise wie $\sqrt[3]{\frac{1}{1\frac{3}{4}}} : \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4}$ beinahe, d. h. man erspart den vierten Theil an Zugkraft. Nach den Erhebungen des Grafen *Rumford* in Frankreich laden die Fuhrleute seit der eingeführten grössern Breite der Radschienen wirklich um ein Viertel mehr, als es früher bei den schmalen Schienen der Fall war.

§. 538.

Die Einführung breiter Radfelgen gewährt nicht bloss für die Zugkraft, sondern auch für die Unterhaltung der Strasse wesentliche Vortheile; schmale Radschienen schneiden in die Strasse ein und bilden tiefe Geleise, während breite Radschienen entweder keine oder sehr kleine Geleise bilden; wenn das Beschotterungsmateriale nicht vollkommen hart ist, so wird es von schmalen Radschienen bald zerdrückt oder zermalmt, während breite Radschienen, die auf mehreren kleinen Steinen aufliegen, über dieselben hinweggehen, ohne sie zu zerdrücken. Die Geleise, welche schmale Radschienen machen und vorzüglich die Erde und der Schotter, welchen sie aus den Geleisen herauswerfen, werden von den breitern Radfelgen abermal niedergedrückt und so die Strasse geebnet.

Diese Gründe haben in neuern Zeiten die Regierungen veranlasst, die Einführung der breiten Radfelgen vorzüglich zu begünstigen. In England ist für eine jede Breite der Radfelgen ein bestimmtes Gewicht gesetzlich bestimmt, welches der Wagen sammt Ladung haben darf, und dieses Gewicht beträgt im Sommer, wo die Strassen gewöhnlich im bessern Stande sind, mehr als im Winter; die beladenen Wägen werden auf der bei jedem Mauthschranken (*turnpike gate*) aufgestellten Strassenwage abgewogen und hiernach der Strassenzoll bemessen und bezahlt. Nach einer Parlamentsakte, welche im 3ten Regierungsjahre *Georg's IV.* erlassen wurde, sind folgende Gewichte für die Ladung und den Wagen auf den Heerstrassen (*turnpike roads*) erlaubt:

	Erlaubtes Gewicht im			
	Sommer		Winter	
	Ton.	Ztr.	Ton.	Ztr.
Für jeden vierrädrigen Wagen mit Rädern von 9 Zoll Felgenbreite	6	10	6	0
Für jeden 2rädrigen Karren mit Rädern von gleicher Breite	3	10	3	0
Für jeden 4rädrigen Wagen mit der Breite von weniger als 9 Zoll bis zu 6 Zoll . .	4	15	4	5
Für jeden 2rädrigen Karren von gleicher Breite	3	0	2	15
Für jeden 4rädrigen Wagen mit der Breite von weniger als 6 Zoll bis 4½ Zoll . .	4	5	3	15
Für jeden Karren mit Rädern von gleicher Breite	2	12	2	7
Für jeden 4rädrigen Wagen mit der Breite von weniger als 4½ Zoll	3	15	3	5
Für jeden Karren mit Rädern von gleicher Breite	1	15	1	10
Für 4rädrige Wägen, die zum Transporte von Kaufmannsgütern dienen und mit Federn versehen sind	4	5	3	15

Geldbetrag für das Uibergewicht.			
Ztr.	Liv. st.	sh.	d.
1	.	.	3
2	.	.	6
3	.	1	.
4	.	1	6
5	.	2	.
6	.	4	6
7	.	7	.
8	.	9	6
9	.	12	.
10	.	14	6
und 5 *shilling* mehr für jeden Zentner, der über 10 Zentner geladen wird.			

In dieser Tabelle wird die englische Tonne zu 20 Zentner und der Zentner zu 112 ℔ gerechnet. Die Zeit des Sommers wird nach der hierüber bestehenden Bestimmung vom 1ten Mai bis 31ten Oktober, und die Zeit des Winters vom 1ten November bis 30ten April, beides inclusive gezählt. Von allen Wägen, welche das an der Tabelle enthaltene erlaubte Gewicht wiegen, wird der auf jeder Strassenstrecke bestehende Strassenzoll bezahlt; jene aber, welche ein Uibergewicht haben, bezahlen ausserdem den in der letzten Rubrike beigefügten bedeutenden Geldbetrag.

§. 539.

In ganz **Frankreich** wird dermalen gar kein Strassenzoll von Fuhrwerken jeder Art erhoben, allein gesetzliche Bestimmungen verfügen ebenfalls über die Ladungsfähigkeit, welche ein jeder Wagen bei seiner Felgenbreite im Sommer und im Winter haben darf. Zu diesem Behufe sind an den Strassen (*routes royales*) von Strecke zu Strecke ebenfalls Strassenwagen (*ponts à bascule*) aufgestellt, auf welchen die Wägen gewogen werden; findet man, dass ihre Ladung das erlaubte Gewicht überschreitet, so muss nach Maassgabe desselben ein Strafbetrag entrichtet werden.

Durch das Dekret der französischen Regierung vom 23ten Juni 1806 wird für den Gebrauch der breitfelgigen Räder folgendes Gewicht der Ladung, der Frachtwägen mit Inbegriff des Wagens, des Packtuches u. dgl. festgesetzt:

Breite der Radschienen.	Gewicht des Wagens sammt Ladung vom 1. November bis 1. April.	Gewicht des Wagens sammt Ladung vom 1. April bis 1. November.	Ladung auf 1 Zoll.
I. Für Frachtwägen mit zwei Rädern:			
N. Oe. Zoll	N. Oe. Ztr.	N. Oe. Ztr.	N. Oe. Ztr.
11 *Centimetres* = 4,2	2200 *Kilog* = 39,29	2700 *Kilog* = 48,21	9 bis 11 „
14 „ = 5,3	3400 „ = 60,71	4100 „ = 73,21	
17 „ = 6,5	4800 „ = 85,71	5800 „ = 103,57	
25 „ = 9,5	6800 „ = 121,43	8200 „ = 146,43	13 bis 15 „
II. Für Frachtwägen mit 4 Rädern und gleicher Weite der Geleise bei den vordern und hintern Rädern:			
11 *Centimetres* = 4,2	3300 *Kilog* = 58,93	4000 *Kilog* = 71,43	14 bis 17 „
14 „ = 5,3	4700 „ = 83,93	5700 „ = 101,78	
17 „ = 6,5	6700 „ = 119,64	8100 „ = 144,64	
22 „ = 8,4	8700 „ = 155,36	9600 „ = 171,43	18 bis 20 „
III. Für Frachtwägen mit ungleichem Geleise, wenn die hintere Geleiseweite breiter ist, als die vordere:			
11 „ = 4,2	3700 „ = 66,07	4400 „ = 78,57	16 bis 19 „
14 „ = 5,3	5200 „ = 92,86	6200 „ = 110,71	
17 „ = 6,5	7400 „ = 132,14	8800 „ = 157,14	
22 „ = 8,4	9500 „ = 169,64	11400 „ = 203,57	20 bis 24 „

Hiebei ist noch zu bemerken, dass für den Strassenkoth, der an den Wägen hängen bleibt, oder wenn das Packzeug und die Ladung nass ist, für zweirädrige Wägen 200 *Kilog* = 3,57 N. Oe. Ztr. und für vierrädrige Wägen 300 *Kilog* = 5,36 N. Oe. Zentner Nachsicht gestattet wird.

§. 540.

In Deutschland berechnete Hr. *A. Schlichtegroll* in seiner „Abhandlung über den Nutzen der breitfelgigen Räder an Fracht und anderm schweren Fuhrwerk“ (München, bei Fleischmann 1819), auf jeden Zoll Breite der Radschienen 320 ℔ (bairisches oder Wiener Gewicht), demnach auf 10 Zoll breite Felgen 32 Zentner auf jedes Rad, und desshalb das Gewicht des Wagens sammt Ladung mit 4 Rädern zu 128 Zentner; hiezu 8 Zugpferde, so kommen auf jedes Pferd 16 Zentner. Demnach ist

für 2 Pferde, die Felgenbreite $\frac{10}{4} = 2{,}5$ Zoll u. das Gewicht des beladen. Wagens = 32 Ztr.

„ 4 „ „ $\frac{10}{2} = 5$ „ „ „ „ = 64 —

„ 6 „ „ $\frac{3.10}{4} = 7{,}5$ „ „ „ „ = 96 —

„ 8 „ „ $\frac{4.10}{4} = 10$ „ „ „ „ = 128 —

Man rechnet, dass eine gewöhnliche Strasse, deren Material aus Kiesel oder gebroche-

nem Kalksteine, Basalt u. dgl. besteht, einen Druck von 300 bis 450 ℔ auf jeden Zoll ihrer Oberfläche auszuhalten im Stande sey, ohne dass die Solidität der Strasse dadurch gefährdet werde. Hiernach kann die Ladung oder der Druck einer $2\frac{1}{2}$ Zoll breiten Radschiene $300 . 2{,}5 = 7{,}5$ Ztr. bis $450 . 2{,}5 = 11{,}25$ Zentner, folglich für 4 Räder 30 bis 45 Ztr. betragen. Hieraus folgt, dss leichtes Fuhrwerk, Kutschen u. dgl. der Verbindlichkeit breiterer Radschienen enthoben werden kann.

§. 541.

Die Vorschrift, dass die Breite der Felgen dem Gewichte des Wagens sammt Ladung proportional seyn müsse, würde noch besser entsprechen, wenn hiebei zugleich auf die Grösse oder auf den Durchmesser der Räder Rücksicht genommen würde. Jeder Wagen macht nämlich einen Eindruck auf die Strasse, welches die nach jedem Fuhrwerke zurückbleibenden Spuren oder Geleise darthun. Daraus sehen wir, dass die Last des Wagens immer auf einer Fläche ruhe, welche die Breite der Schiene zur Breite, und die Länge der Sehne zur Länge hat. Wenn wir demnach die Breite zweier Schienen mit B und b, und die Länge der Sehnen mit L und l, die Gewichte der Ladung und Wägen aber mit Q und q bezeichnen, so ist $Q : q = B . L : b . l$. Setzen wir die Durchmesser der Räder $= 2A$ und $2a$, und die Tiefe der Eindrücke $= U$ und u, so ist aus dem Kreise bekannt, dass $\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2A . U$ und $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 2a . u$, folglich $L : l = \sqrt{2A . U} : \sqrt{2a . u}$. Soll nun der Eindruck in die Strasse in beiden Fällen gleich, oder $U = u$ seyn, so ist $Q : q = B . \sqrt{2A} : b . \sqrt{2a}$, folglich die Breite der Schienen $B : b = \frac{Q}{\sqrt{2A}} : \frac{q}{\sqrt{2a}}$.

Im südlichen Deutschland bedient man sich verhältnissmässig kleinerer Räder; die vordern haben $4\frac{1}{2}$ bis 4 Fuss, die hintern Räder 5 Fuss, die Räder mit breiten Felgen aber nur $2\frac{1}{2}$ bis 3 Fuss im Durchmesser. Es verhält sich demnach $\sqrt{5} : \sqrt{2{,}5} = 7 : 5$, also wäre $B : b = \frac{Q}{7} : \frac{q}{5}$, oder wenn die Lasten Q und q gleich sind, $B : b = \frac{1}{7} : \frac{1}{5}$, also $B = \frac{5}{7} b$, demnach würden grössere Räder für eine gleiche Ladung schmälere Schienen erhalten können, als kleine.

§. 542.

In der österreichischen Monarchie sind noch keine Strassenwagen aufgestellt, und in dieser Hinsicht wird die Ladung und die Mauth nach der Anzahl der vorgespannten Pferde bemessen. Eine alte Verordnung verfügt in dieser Hinsicht, dass kein Fuhrmann über 50 Zentner auf 4 Pferde laden darf; ein späteres Hofdekret vom 7ten Jänner 1819 erlaubt eine unbedingte Ladung für alle Wägen, deren Felgen wenigstens 6 Zoll Breite haben, und diese Wägen haben zugleich auch nur die halbe Mauth zu entrichten. Die Einführung der breiten Radfelgen gewährt daher für die Fuhrleute den doppelten Vortheil, dass sie auf ein Pferd weit mehr laden können, und ausserdem noch eine geringere Mauth zu entrich-

ten haben. Die Ursache, dass diese breiten Felgen bei uns noch nicht so allgemein, wie in Frankreich und England eingeführt sind, liegt in dem Umstande, dass in jenen Ländern eine weit grössere Länge von Kunststrassen (*Chausseen*), als bei uns hergestellt ist; die Fuhrleute fahren sonach dort gewöhnlich nur auf *Chausseen*, während sie bei uns auf Landwege kommen, in denen die Geleise (und zwar häufig auch in Steine) so tief und so schmal eingeschnitten sind, dass man nur wieder mit einem Wagen von ganz gleicher Geleiseweite und schmalen Radfelgen fortzukommen im Stande ist. So lange daher nicht die meisten Kommunicationen mit guten Strassen hergestellt sind, wird auch die allgemeine Einführung breiter Radfelgen bei uns nicht statt finden können.

Aus diesem Umstande erklärt sich nun auch, warum die meisten Wägen in den österreichischen Staaten eine gleiche Geleiseweite, nämlich 3 Fuss 6 Zoll Wiener Maass innerhalb der Räder besitzen, und warum diese Geleiseweite für die vordern und hintern Räder gleich sey; man kann nämlich nur mit solchen Wägen in den tief eingeschnittenen Landstrassen und Hohlwegen fortkommen.

In dieser Hinsicht gewährt es auf den französischen Strassen einen besondern Vortheil für die Unterhaltung derselben, dass nach einer gesetzlichen Bestimmung die hintern Räder aller Wägen gerade um die Geleiseweite weiter aus einander stehen müssen, als die vordern Räder. In diesem Falle gleichen nämlich die hintern Räder die von den vordern Rädern aus der Strasse durch die Geleise hinausgedrückte Erde wieder aus, und so lassen diese Wägen beinahe keine Spuren oder Geleise zurück.

§. 543.

Widerstand der konischen Räder. Die Räder der meisten Stadtwägen sind, wie Fig. 9 so gebaut, dass die Speichen nicht in einer vertikalen Fläche, sondern in der Oberfläche eines Kegels liegen, dessen Mittellinie zugleich die Mittellinie eines Theils der Wagenachse ist, die an ihrem Ende herabgebogen wurde. Diese konischen Räder wendet man vorzüglich desshalb an: Fig. 9. Tab. 29.

1tens Damit die Wagenkästen aufwärts eine grössere Weite erhalten können, als die Geleiseweite beträgt; sind nämlich die Speichen und das ganze Rad vertikal gestellt, so kann der Wagenkasten nicht so weit (breit) gemacht werden, und nachdem derselbe bei den Stadtwägen an Federn hängt, so würde er auch bei vertikalen Speichen weit leichter an die Peripherie des Rades anschlagen, als es bei einem konischen Rade der Fall ist.

2tens Ein anderer Grund, warum konische Räder bei Stadtwägen angewendet werden, liegt darin, weil der Koth, der sich an selbe anhängt, von dem Rade auf die Strasse heraus geworfen wird, während bei vertikalen Speichen der Koth nach beiden Seiten gleich, folglich auch an den Wagenkasten geschleudert wird.

Uibrigens ist hier noch zu erinnern, dass die konischen Räder, wenn die Speichen nach beiden Seiten auswärts gestellt sind, leichter aus dem Haufen fallen, als wenn die untern Speichen auf der Strasse senkrecht stehen. Dagegen ist aber zu bemerken,

dass die konischen Räder eine **bedeutende Reibung** verursachen, welche auf folgende Art berechnet wird: *)

Fig. 10. Tab. 29. Wenn ein konisches Rad Fig. 10 um seine Achse gedreht wird, so muss jeder Punkt B, A, D wegen der Festigkeit der Materie in derselben Zeit um die Achse O C umlaufen. Es sey der mittlere Halbmesser des Rades $AC = A$, so ist die mittlere Peripherie für den Punkt $A = {}^{22}/_{7} \cdot 2A = 2\pi \cdot A$.

In derselben Zeit, in welcher die Peripherie $2\pi \cdot A$ zurückgelegt wird, muss auch ein jeder Punkt an der Peripherie beschrieben werden, allein der äussere Punkt des Rades oder der Radfelge muss einen grössern Raum und der innere einen kleinern Raum beschreiben, demnach muss der äussere Punkt sich um etwas fortschieben oder

*) Mit Differenzialrechnung wird der **Widerstand konischer Räder** auf folgende Art berechnet: Es sey der mittlere Halbmesser des konischen Rades $CB = A$, der äussere Halbmesser $AG = A + e$, der innere $DH = A - e$, der Halbmesser M m auf der Entfernung x von der Mitte, $y = A - \frac{e \cdot x}{\frac{1}{2}b} = A - \frac{2e \cdot x}{b}$, $CD = \frac{b}{2}$, $Cm = x$, die Breite der Schiene $AD = b$. Bei jeder Umdrehung legt der Punkt B in der Mitte der Schiene den Weg $2A \cdot \pi$ zurück. In derselben Zeit muss der äussere Rand G, wegen des festen Zusammenhanges der Theile des Rades den Raum $2\pi\ (A + e)$ und der innere H den Raum $2\pi\ (A - e)$ zurücklegen. Der Punkt G wird demnach bei jeder Umdrehung um den Raum $2\pi \cdot e$ zurückgehalten, und der innere H um den Raum $2\pi \cdot e$ fortgeschoben, woraus eine Reibung entsteht. Auf gleiche Art legt der Punkt M in der Zeit einer Umdrehung den Raum $2\pi \cdot y = 2\pi\left(A - \frac{2e \cdot x}{b}\right)$ zurück, und wird also um den Raum $2\pi \cdot \frac{2e \cdot x}{b}$ fortgeschoben. Da die Last Q auf der ganzen Fläche der Felge $2\pi \cdot A \cdot b$ zu liegen kommt, so liegt auf der Fläche $2\pi \cdot \frac{2e \cdot x}{b} \cdot dx$ die Last $\frac{Q}{2\pi \cdot A \cdot b} \cdot 2\pi \cdot \frac{2e \cdot x}{b} \cdot dx$. Daraus entsteht die Reibung $\frac{M \cdot Q}{A \cdot b} \cdot \frac{2e \cdot x \cdot dx}{b}$. Demnach beträgt der Reibungswiderstand von B bis M die Grösse $\frac{M \cdot Q}{A \cdot b} \cdot \frac{e \cdot x^2}{b}$ und für die halbe Breite des Rades $= M \cdot \frac{Q \cdot e}{4A}$. Eben so gross ist die Reibung von B bis G, also die Reibung für das ganze Rad $= \frac{M \cdot Q \cdot e}{2A}$; oder das Rad wird an der Strasse von dem Widerstande $\frac{M \cdot Q \cdot e}{2 \cdot A}$ aufgehalten. Da $e = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tang} \alpha$, so ist derselbe Widerstand auch $= \frac{M \cdot Q \cdot b \cdot \operatorname{tang} \alpha}{4A}$; derselbe ist demnach 1tens der Last Q, 2tens der Breite der Schiene b, 3tens der Tangente des Neigungswinkels α, und 4tens umgekehrt dem Durchmesser des Rades 2 A proportional.

Fig. 11.

Dieselbe Art des Widerstandes findet auch auf **runden, oder an beiden Kanten sehr abgewetzten Radfelgen** statt. Die Punkte B und M beschreiben in derselben Zeit die Räume $2\pi \cdot A$, und $2\pi\ (A - BC)$ also wird der Punkt M bei jeder Umdrehung des Rades auf den Raum $2\pi \cdot BC$ fortgeschleppt. Auf dem Element $MN = 2\pi \cdot BC \cdot dx$ kommt nach und nach und zwar eben so wie auf $2\pi \cdot A \cdot b$ die Last Q, demnach auf $2\pi \cdot BC \cdot dx$ die Last $\frac{Q \cdot BC \cdot dx}{A \cdot b}$ zu liegen. Daraus entsteht die Reibung $\frac{M \cdot Q \cdot BC \cdot dx}{A \cdot b}$. Setzen wir die krumme Linie B M H parabolisch oder $CB : EB = CM^2 : EH^2$ oder $CB : e = x^2 : \frac{b^2}{4}$, also $CB = \frac{4e \cdot x^2}{b^2}$ demnach $\int M \cdot \frac{Q \cdot 4e \cdot x^2 \cdot dx}{A \cdot b^3} = M \cdot Q \cdot {}^4/_3 \frac{e \cdot x^3}{A \cdot b^3}$ oder für $x = \frac{1}{2}b = M \cdot \frac{Q \cdot e}{6A}$. Auf der andern Seite ist der Widerstand eben so gross, also der gesammte Widerstand des Rades $= \frac{M \cdot Q \cdot e}{3A}$.

Fig. 12.

vorausschieben, und der innere Punkt des Radreifens muss um etwas zurückgeschoben werden. Hieraus entsteht nun eine Reibung, die mit keiner wälzenden Bewegung verbunden ist, und wobei sich ein Körper auf einem andern nämlich der Radreifen auf der Strasse fortschleift; diese Reibung muss von der Zugkraft überwältigt werden, und sonach ergibt sich, dass konische Räder einen besondern Widerstand verursachen. Fig. 10. Tab. 29.

Der äussere Punkt des Radreifens hat den Halbmesser $A + e$, wo unter e die Grösse verstanden wird, um welche der äussere Durchmesser grösser, und daher auch der innere Durchmesser kleiner als der mittlere A ist; demnach beschreibt der äussere Punkt den Raum $\pi . 2\,(A + e) = 2\,\pi . A + 2\,\pi . e$. und der innere Punkt beschreibt den Raum $= 2\pi\,(A - e) = 2\pi . A - 2\pi . e$; sonach wird der äussere Punkt um den Raum $2\,\pi . e$ vorwärts und der innere Punkt um $2\pi . e$ zurück geschoben. Da diese Bewegung unten an der Strasse vorgeht, so entsteht daraus eine Reibung, welche sowohl das Rad, als auch die Strasse abnützt. Der Widerstand ist im Punkte D am grössten, im Punkte A aber $= 0$; wir können also zwischen beiden Räumen das Mittel $\frac{2\pi . e + 0}{2}$ nehmen. Nennen wir nun den Druck der Ladung auf ein Rad und das eigene Gewicht des Rades $= Q$, so drückt die halbe Breite des Rades AD auf die Strasse mit $\frac{Q}{2}$, und wenn wir den Reibungscoeffizienten M nennen, so entsteht zwischen der Radfläche AD und der Strasse eine Reibung $= \frac{M . Q}{2}$ und der Raum, welchen dieser Widerstand bei einer Umdrehung des Rades beschreibt, ist $\frac{2\pi . e}{2}$, folglich das Produkt beider $= \frac{M . Q}{2} . \pi . e$.

Der Punkt B bleibt, wie wir oben bemerkten, um die Grösse $2\,\pi . e$ bei einer Umdrehung des Rades gegen die mittlere Geschwindigkeit desselben zurück; also gibt wieder, da der Punkt A um nichts zurückbleibt, die Grösse $\frac{2\,\pi . e + 0}{2} = \pi . e$ den Raum an, um welchen die halbe Breite des Rades AB bei einer Umdrehung zurückbleibt; die Reibung ist wieder $\frac{M . Q}{2}$ und sonach das Produkt beider $= \frac{M . Q}{2} . \pi . e$. Wenn wir nun diese beiden Widerstände für die zwei halben Breiten des Rades summiren, so sind selbe $= \frac{M . Q}{2} . \pi . e + \frac{M . Q}{2} . \pi . e = M . Q . \pi . e$. Dieser Widerstand muss von der Zugkraft während eines Radumlaufes überwältigt werden; setzen wir die hiezu nöthige Zugkraft $= \mathfrak{K}''''$, so müssen die Produkte dieser Kräfte in ihre Räume gleich seyn, oder $\mathfrak{K}'''' \times 2\pi . A = M . Q \times \pi . e$ woraus die Zugkraft $\mathfrak{K}'''' = \frac{M . Q . e}{2A}$, folgt; dieselbe wird daher desto grösser, je mehr die Reibung des Rades an der Strasse oder M beträgt, je grösser die Last Q ist, je grösser e oder je grösser der Unterschied der Durchmesser des konischen Rades ist, endlich je kleiner der mittlere Durchmesser des Rades 2 A ist. Hohe Räder sind daher abermal vortheilhafter, als niedrige.

§. 544.

Wenn wir die Kraft $\mathfrak{K}'''' = \frac{M.Q.e}{2A}$ mit jener zur Uiberwältigung der Reibung an der Achse $\mathfrak{K} = \frac{m.Q.a}{A}$ vergleichen, so ist $\mathfrak{K}'''' : \mathfrak{K} = \frac{M.Q.e}{2A} : \frac{m.Q.a}{A} = \frac{M.e}{2} : m.a.$ Es ist daher bei einem konischen Rade eben so viel, als ob das Rad noch um eine Achse einen Kreis beschriebe, welcher die halbe Höhe des über der Mitte vorstehenden Rades, nämlich $\frac{e}{2}$ zum Halbmesser hat. Der Ausdruck $\mathfrak{K}'''' = \frac{M.Q.e}{2A}$ wird desshalb bedeutend gross, weil M.Q den **Reibungswiderstand an der Strasse** vorstellt, wo also die Mittel zur Verminderung der Reibung, nämlich Abglättung, Schmieren etc. nicht anwendbar sind, und desshalb der Reibungscoeffizient den Werth $M = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{3}{4}$, zuweilen auch $= 1$ erhält. Bei den Versuchen des Ingenieurs *Walker* in London wurde gefunden, dass ein Wagen mit kegelförmigen Rädern um den vierten Theil mehr Zugkraft als mit cylindrischen Rädern brauchte. Nehmen wir nun $M = \frac{1}{2}$ und $m = \frac{1}{8}$ an, so ist nach diesen Versuchen $\mathfrak{K}'''' : \mathfrak{K} = \frac{1}{4}\mathfrak{K} : \mathfrak{K} = 1 : 4 = \frac{1}{2} . \frac{e}{2} : \frac{1}{8} . a$; also wäre $e = \frac{1}{8} a$ gewesen und wenn wir annehmen, dass die Achse des Rades den Halbmesser $a = 1$ Zoll hatte, so wäre $e = \frac{1}{8}$ Zoll gewesen, folglich hätte der Uiberschuss des äussern Halbmessers des Rades über den innern nur $2 . \frac{1}{8}$ Zoll oder 3 Linien betragen. Wollte man $M = \frac{3}{4}$ annehmen, so wäre $1 : 4 = \frac{3}{4} . \frac{e}{2} : \frac{1}{8} . a$, also $e = \frac{a}{12} = 1$ Linie, d. h. die Zugkraft würde schon um ein Viertel grösser, wenn der äussere Halbmesser des Rades nur um eine Linie von dem mittlern Halbmesser abweicht, oder wenn der äussere Halbmesser nur um 2 Linien grösser, als der innere Halbmesser ist.

Nach *R. L. Edgeworth* Versuchen ist $\mathfrak{K}'''' : \mathfrak{K} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{M.e}{2} : m.a$, woraus $M.e = m.a$ folgt. Wir ersehen hieraus, dass konische Räder aus den im vorigen Paragraph angeführten Gründen für Stadtwägen zwar zweckmässiger und bequemer sind, allein ihre Anwendung wäre bei Frachtwägen sehr nachtheilig; cylindrische Räder verdienen daher in jedem Falle, wo keine besondern Gründe obwalten, den Vorzug vor den konischen.

§. 545.

Bei den neuern **englischen Eisenbahnen** sind die gegossenen Räder zwar senkrecht, allein sie erhalten einen konischen Radkranz, indem die Peripherie des Rades nicht senkrecht auf der mittlern Fläche des Rades steht; die Räder sind daher auch konisch, jedoch beträgt die Differenz des äussern und innern Raddurchmessers gewöhnlich nur $\frac{1}{4}$ Zoll, d. h. der innere Raddurchmesser ist $30 + \frac{1}{8}$ Zoll und der äussere 30 Zoll gross, während die Breite des Rades für diese Verjüngung 3 Zoll beträgt. Der Zweck dieser konischen Bahnräder besteht sowohl darin um das Formen des Rades für den Guss zu erleichtern, als auch um das Anstossen des hervorstehenden Randes an die Bahnschienen in geraden Linien möglichst zu vermeiden, und dem Wagen eine Tendenz zu geben, wodurch er immer gegen die Mitte der Bahn herabzugehen trachtet. Aus dieser Ursache werden nun aber auch die **Schienen** an ihrer

Oberfläche nicht horizontal, sondern unter einem gleichen Winkel mit der Oberfläche des Radkranzes gelegt, und weiter erhalten auch die Steinblöcke dieselbe geneigte Lage. Das nähere Detail hievon, wie es bei der Eisenbahn zwischen *Liverpool* und *Manchester* angewendet wird, enthält Fig. 13. Hiebei beträgt die Breite des konischen Radkranzes ab = 3,5 Zoll, die Verjüngung bc = $\frac{3}{16}$ Zoll; der kleinere Durchmesser des Rades a a' = 2 Fuss 6 Zoll, der grössere aber c c' = 2' 6'' + 2 . $\frac{3}{16}$'' = 2 Fuss 6$\frac{6}{16}$ Zoll, die Oberfläche des 24'' langen Steinblockes AB wird paralell zu a c gelegt; die Neigung CE ergibt sich daher aus der Proportion 3,5'' : $\frac{3}{16}$'' = 24'' : CE und CE = 1$\frac{2}{7}$ Zoll. Damit die Steinblöcke ABCD ihre Lage erhalten, wird das Erdreich unter CD mit einem Pflasterstössel von bedeutender Schwere fest gestampft, Schotter in die Erde hineingeschlagen, der Steinblock aufgelegt und abermal von allen Seiten mit Schotter und Erde verstampft. Sind auf diese Art die Steinblöcke, welche auf der *Liverpool*-Bahn 2 Fuss Länge, 2 Fuss Breite und 1 Fuss zur Höhe haben, unverrückbar fest, so kann auch die berechnete Reibung an den konischen Rädern nicht mehr statt finden. Fig. 13. Tab. 29.

§. 546.

Die fünfte Art des Widerstandes entsteht aus der Bespannung, womit wir zugleich die Frage über ungleiche Räder verbinden. Bisher haben wir angenommen, dass die Last des Wagens auf alle Räder gleich vertheilt ist, und dass auch alle Räder gleich gross sind. Für das erstere wird zwar bei der Ladung der Frachtwägen gesorgt, aber das zweite findet bei den meisten Stadtwägen aus der Ursache nicht statt, weil zum Umkehren in den Gassen und auf schmalen Strassen nöthig ist, dass die vordern Räder unter dem Wagen durchgehen, sonach kleiner seyn müssen als die hintern Räder. Uiberdiess werden alle Wägen gewöhnlich so bespannt, dass die Richtung der Zugkraft nicht durch den Schwerpunkt des Wagens, sondern unterhalb desselben durchgeht. Dieser excentrische Angriff hat zur Folge, dass der Frachtwagen nebst seiner fortlaufenden Bewegung sich noch um seinen Schwerpunkt wieder drehen müsste, wenn diese Bewegung nicht von der Strasse gehindert würde. Hiedurch entsteht ein ungleicher Druck auf die Räder, dessen Folgen wir gegenwärtig zu untersuchen haben.

Es sey der Schwerpunkt des Wagens Fig. 14 in G und die Richtung der Zuglinie sey CA. Man ziehe durch den Schwerpunkt G die Horizontallinie FH und durch die Achsen der Räder die Senkrechten FE, HJ. Nennen wir das ganze Gewicht des befrachteten Wagens = Q, den Theil von diesem Gewichte, welcher auf die Achse E drückt = F, und jenen, welcher auf die Achse J drückt = H, sonach F + H = Q, so ist nach den bekannten Gesetzen der Statik $F = Q \cdot \frac{GH}{FH}$ und $H = Q \cdot \frac{FG}{FH}$. Die Kraft, mit welcher der Wagen nach der Richtung CA gezogen wird, wollen wir = CA = K setzen. Der Winkel ACB, den die Richtung dieser Kraft mit der Strasse macht, sey = w, so zerfällt die Zugkraft CA in CD = K . Sin w, welche den Wagen hebt, und in CB = K . Cos w, welche auf den Zug des Wagens längst der Strasse verwendet wird. Weil aber CB nicht durch den Schwerpunkt geht, sondern an dem Hebelsarme CG angebracht ist, so würde hieraus eine Umdrehung um den Schwerpunkt G entstehen, folglich die Last F sammt der Achse E gehoben, und die Last H sammt der Achse J herab- Fig. 14.

Fig. 14. Tab. 29. gedrückt werden, wenn nicht die Last des Wagens und der Widerstand der Strasse dieser Bewegung entgegenwirkte. Um aber die Kräfte zu finden, womit die Achse E oder das Gewicht F gehoben und dagegen die Achse J oder das Gewicht H von der Zugkraft niedergedrückt wird, wollen wir die Strasse als ein wenig nachgiebig, folglich den Wagen einer kleinen Drehung um seinen Schwerpunkt fähig gedenken, so dass der Punkt F den Raum Ff, und der Punkt H den Raum Hh beschreiben möge. Zu derselben Absicht wollen wir die Zugkraft $CB = K . \text{Cos}\ w$ in zwei Theile K' und K'' zerlegen, wovon K' auf die Bewegung der Last F und K'' auf die Bewegung der Last H verwendet wird. Da die Kraft K' mittelst der Hebelsarme CG und FG die Last F hebt, so wirkt auf den Punkt F die Kraft $\frac{K' . CG}{FG}$; und wenn wir den Raum der freifallenden Körper in der Zeiteinheit $= g$, und die Zeit, in welcher der Raum Ff beschrieben wird $= t$ setzen, so geben die bekannten Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung den Raum $Ff = \frac{K' . CG . g . t^2}{FG . F}$; und wenn noch statt der Last F der gefundene Werth $\frac{Q . GH}{FH}$ gesetzt wird, so ist der Raum $Ff = \frac{K' . CG . FH . g . t^2}{FG . GH . Q}$. Auf dieselbe Art findet man den Raum $Hh = \frac{K'' . CG . g . t^2}{GH . H} = \frac{K'' . CG . FH . g . t^2}{GH . FG . Q}$. Weil aber die Räume Ff und Hh den Entfernungen FG und GH proportional seyn müssen, so folgt nach Hinweglassung der gleichen Faktoren $FG : GH = Ff : Hh = K' : K''$. Demnach ist $K' = \frac{(K' + K'') FG}{FG + GH} = K . \text{Cos}\ w . \frac{FG}{FH}$; und die Kraft, womit die Achse E gehoben wird $\frac{K' . CG}{FG} = K . \text{Cos}\ w . \frac{CG}{FH}$. Eben so ist $K'' = \frac{(K' + K'') GH}{FG + GH} = K . \text{Cows} . \frac{GH}{FH}$; sonach die Kraft, womit die Achse J niedergedrückt wird $K'' . \frac{CG}{GH} = K . \text{Cos}\ w . \frac{CG}{FH}$. Hieraus ersehen wir, dass die Kräfte, womit von dem excentrischen Angriffe die vordere Achse gehoben, und die hintere niedergedrückt wird, einander gleich sind. Die excentrische Bespannung hat sonach die merkwürdige Folge, dass ein Theil des Gewichtes, den die Formel $K . \text{Cos}\ w . \frac{GC}{FH}$ angibt, von den vordern Rädern abgenommen und auf die hintern Räder aufgelegt wird. Wenn also bei gleichen Achsen die hintern Räder grösser sind als die vordern, so wird der Zug des Wagens durch die angeführte excentrische Richtung der Zugstränge wirklich erleichtert. Zugleich zeigt diese Rechnung, dass durch eine hohe Ladung die hintern Wagenräder sehr leiden und in einen weichen Boden tiefer einsinken als die vordern, weil GC gross wird. Dieser Nachtheil wird vermindert durch lange Wägen, wodurch $\frac{GC}{FH}$ ein unbedeutender Bruch werden kann.

Der Druck auf die vordere Achse ist nämlich $= (Q - K . \text{Sin}\ w) \frac{GH}{FH} - K . \text{Cos}\ w . \frac{GC}{FH}$; und der Druck auf die hintere Achse ist $(Q - K . \text{Sin}\ w) \frac{FG}{FH} + K . \text{Cos}\ w . \frac{GC}{FH}$. Setzen wir den Durchmesser eines vordern

Rades $= A$, den Durchmesser seiner Achse $= a$, den Durchmesser eines hintern Rades $= A'$, den Durchmesser seiner Achse $= a'$ und zur Abkürzung

$$\frac{m.a}{A} + \frac{3B}{8A} + \frac{v^2}{4g} \cdot \frac{DB^2}{MN.A^2} = \text{tang}\,\mu, \text{ und } \frac{m.a'}{A'} + \frac{3B'}{8A'} + \frac{v^2}{4g} \cdot \frac{(DB')^2}{MN'.A'^2} = \text{tang}\,\mu',$$

so haben wir zwischen der Zugkraft und dem Widerstande des Wagens folgende Gleichung

$$K.\text{Cos}\,w = \left\{(Q - K.\text{Sin}\,w)\frac{GH}{FH} - K.\text{Cos}\,w.\frac{GC}{FH}\right\}\text{tang}\,\mu + \left\{(Q - K.\text{Sin}\,w)\frac{FG}{FH} + K.\text{Cos}\,w.\frac{GC}{FH}\right\}\text{tang}\,\mu';$$

woraus die nöthige Grösse der Zugkraft K in jedem gegebenen Falle berechnet werden kann.

Zur leichtern Uibersicht der Folgen, welche aus dieser Rechnung gezogen werden können, ist zu bemerken:

1tens. Wenn die vordern und hintern Räder sammt ihren Achsen einander gleich sind, so ist auch $\text{tang}\,\mu = \text{tang}\,\mu'$, sonach Fig. 14. Tab. 29.

$$K.\text{Cos}\,w = (Q - K.\text{Sin}\,w)\left(\frac{FG + GH}{FH}\right)\text{tang}\,\mu = (Q - K.\text{Sin}\,w)\frac{\text{Sin}\,\mu}{\text{Cos}\,\mu}, \text{ wor-}$$

aus $K = \dfrac{Q.\text{Sin}\,\mu}{\text{Cos}\,(w - \mu)}$ folgt.

2tens. Wenn die hintern Räder grösser sind, und eine grössere Last tragen sollen, als die vordern, so müssen auch die Achsen verhältnissmässig stärker seyn. Setzen wir demnach $\frac{a}{A} = \frac{a'}{A'}$, so ist auch sehr nahe $\text{tang}\,\mu = \text{tang}\,\mu'$, sonach abermals

$$K = \frac{Q.\text{Sin}\,\mu}{\text{Cos}\,(w - \mu)}.$$

3tens. Wollte man die Ladung oder den Schwerpunkt des geladenen Wagens so weit zurücksetzen, dass die vordern Räder gar nichts und die hintern die ganze Last des Wagens allein zu tragen hätten, so würde der Druck auf die vordere Achse $= 0$, demnach $(Q - K.\text{Sin}\,w)\,GH = K.\text{Cos}\,w.\,GC$ seyn. Wird dieser Werth in die obige Gleichung gesetzt, so erhalten wir abermals $K = \dfrac{Q.\text{Sin}\,\mu'}{\text{Cos}\,(w - \mu')}$.

Es erhellet von selbst, dass alle gedenkbaren Fälle zwischen diese drei angeführten nothwendig fallen müssen; wir können demnach die einfachere Gleichung $K = \dfrac{Q.\text{Sin}\,\mu}{\text{Cos}\,(w - \mu)}$ in jedem Falle als sehr annähernd und ohne erheblichen Fehler für die weitern Folgen brauchen.

§. 547.

Die Grösse des Widerstandes, den die Wägen auf unsern Strassen erfahren, ergibt sich aus folgenden Versuchen.

Es ist bekannt, dass die Frachtwägen von unsern Gebirgsstrassen dort anfangen von selbst herabzulaufen, ohne noch merklich in die Haltketten zu fallen, wo der Abhang oder das Gefälle $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zolle auf jede Klafter beträgt. Da in diesem Falle die bewegende Kraft $\frac{h.Q}{l} = \frac{2Q}{72}$ dem ganzen Widerstande des Wagens gleich ist, so folgt die Zugkraft auf ebenen Strassen $K = \frac{Q}{36}$. Wenn im Gegentheile der Wagen über eine

Strasse bergauf, mit 4 Zoll Steigung auf jede Klafter geführt wird, so ist die Zugkraft $K = \frac{2Q}{72} + \frac{4Q}{72} = \frac{Q}{12}$, welches Resultat gleichfalls von der Erfahrung in so weit bestätiget wird, als man auf unsern Strassen gewöhnlich 40 bis 50 Zentner Ladung für 4 Frachtwagenpferde berechnet. Für die Reibung an den Achsen wurde oben §. 531 angenommen $\frac{m.a}{A} = \frac{1}{120}$; also wäre der übrige Widerstand der Geleise und Steine zusammen $= \frac{Q}{36} - \frac{Q}{120} = \frac{7Q}{360}$ beinahe zweimal grösser, als die Reibung an den Achsen.

§. 548.

Graf *Rumford* hat die Zugkraft, welche sein Wagen auf verschiedenen Strassen forderte, mit einer Federwage gewogen, und hierüber in seinen Beobachtungen über die Vortheile der Räder mit breiten Felgen folgende Versuche bekannt gemacht.

	Grösse und Gewicht der Räder und des Wagens, welche bei den Versuchen gebraucht wurden.		
	vorletzte Räder	letzte Räder	neue Räder
Höhe der Vorderräder	3 Fuss 4 Zoll 0 Lin.	3 Fuss 2 Zoll 3 Lin.	3 Fuss 3 Zoll 3 Lin.
Höhe der Hinterräder	4 „ 9 „ 3 „	4 „ 8 „ 9 „	4 „ 8 „ 3 „
Breite der Reifen	0 „ 1 „ 9 „	0 „ 2 „ 3 „	0 „ 4 „ 0 „
Gewicht der Vorderräder	124 Pfund	174 Pfund	240 Pfund
Gewicht der Hinterräder	226 „	258 „	360 „
Gewicht aller vier Räder	350 „	432 „	600 „

Der Wagen mit den neuen Rädern wog 1721 ℔.
Drei Personen: Herr, Kutscher und Bedienter . . . 400 „
Das ganze, von den Pferden gezogene Gewicht war demnach 2121 ℔.

Auf dem P f l a s t e r der *Versailler* Strasse zwischen der Brücke von *Sevres* und *Passy* betrug der Zug in Pfunden:

	beim kleinen Schritte	beim grossen Schritte	im kleinen Trabe	im grossen Trabe
Mit den neuen Rädern .	40 bis 48 ℔	48 bis 56 ℔	74 bis 84 ℔	120 bis 130 ℔
Mit den letzten Rädern .	44 „ 48 „	56 „ 60 „	84 „ 96 „	130 „ 140 „
Mit den vorletzten Rädern	48 „ 60 „	60 „ 72 „	96 „ 120 „	140 „ 150 „

Auf der Erde neben der Strasse, wo der Weg sehr gut und wenig sandig war:

mit den neuen Rädern .	76 „ 84 „	80 „ 84 „	80 „ 88 „	80 „ 88 „
mit den letzten Rädern .	80 „ 92 „	80 „ 96 „	82 „ 100 „	82 „ 100 „

Auf der Erde, wo der Weg etwas sandig war:

	im Schritte	im Trabe
mit den neuen Rädern .	92 bis 100 ℔	100 bis 110 ℔
mit den letzten Rädern .	100 „ 120 „	120 „ 130 „
wo der Weg sandiger war:		
mit den neuen Rädern .	160 „ 180 „	160 „ 180 „
mit den letzten Rädern .	180 „ 200 „	180 „ 200 „

Auf neu geschütteten Kieseln, worüber noch kein Wagen gefahren war:

	im kleinen Schritte
Mit den neuen Rädern	200 bis 240 ℔
mit den alten Rädern	240 „ 280 „
Im tiefsten Sande, im Gehölze von *Boulogne*:	
Mit den neuen Rädern	240 bis 260 ℔
mit den alten Rädern	260 „ 280 „

Betrachten wir zuerst den Zug auf dem Pflaster, und nehmen wir die Geschwindigkeit der Pferde beim kleinen Schritte $v = 3$ Fuss, im grossen Schritte $v = 4\frac{1}{2}$ Fuss, im kleinen Trabe $v = 6$ Fuss, im grossen Trabe $v = 8$ Fuss an. Da wir gesehen haben, dass die Widerstände der Reibung, der Geleise, der konischen Räder u. s. w. von der Geschwindigkeit nicht abhängen und beständig sind; dagegen der Widerstand, welcher durch den Stoss an Steine entsteht, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setze man, um aus diesen Versuchen die Resultate für die wirkliche Grösse des Widerstandes abzuleiten, die Zugkraft allgemein $= A + B \cdot v^2$.

Hiernach folgt der Widerstand der neuen Räder mit 4 Zoll breiten Schienen sehr nahe $= 27 + \frac{3 \cdot v^2}{2}$; der Widerstand der letzten Räder mit $2\frac{1}{4}$ Zoll breiten Schienen $= 28 + \frac{5}{3} \cdot v^2$; der Widerstand der vorletzten Räder mit $1\frac{3}{4}$ Zoll breiten Schienen $= 37 + \frac{7}{4} \cdot v^2$. Das Mittel zwischen dem Widerstande der letzten und vorletzten Räder beträgt für 2 Zoll breite Schienen $= 33 + 1{,}7 \cdot v^2$. Es verhält sich demnach der Widerstand der 4 Zoll breiten Schienen zum Widerstand der 2 Zoll breiten Schienen wie $27 + 1{,}5 \cdot v^2$ zu $33 + 1{,}7\, v^2$, folglich beinahe wie 15 zu 17.

Hieraus erfahren wir

1^tens^ dass durch eine Verdoppelung der Breite der Radschienen die Zugkraft um $\frac{2}{17}$ oder beiläufig um $\frac{1}{8}$ vermindert werde.

2^tens^ Dass der Widerstand der Pflastersteine sehr nahe dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sey; so wie es die oben §. 534 angeführte Theorie gezeigt hat.

3^tens^ Dass die Zugkraft auf dem Pflaster für die gewöhnlichen Wägen mit 2 Zoll breiten Radschienen auf $\left(\frac{33 + 1{,}7 \cdot v^2}{2121}\right) Q = \frac{Q}{64} + \frac{Q}{78}\left(\frac{v}{4}\right)^2$ angeschlagen werden könne. Das erste Glied $\frac{Q}{64}$ ist sehr nahe doppelt so gross, als der oben berechnete Reibungswiderstand an den Achsen. Das zweite Glied beträgt in dem Falle,

wenn die Pferde auf ebenen Strassen 4 Fuss in jeder Sekunde, oder eine Meile von 24000 Fuss in 1⅔ Stunde zurücklegen, nur $\frac{Q}{78}$. Beide zusammen geben den Widerstand auf einer gepflasterten horizontalen Strasse sehr nahe $= \frac{Q}{35}$, welches mit der vorigen Erfahrung §. 547 übereinstimmt.

4tens. Der Widerstand auf Erde, Sand und lockerem Schotter zeigt sich im Schritte und im Trabe von gleicher Grösse, folglich hat die Geschwindigkeit des Wagens hierauf keinen Einfluss, so wie es die über den Widerstand der Geleise §. 537 angegebene Theorie gelehrt hat. Dieser Widerstand steigt aber nach Maassgabe der grössern Lockerheit des Sandes, Schotters und tiefern Erdreichs, worin die Räder tiefere Geleise ziehen. Der Widerstand der Wägen beträgt nämlich:

	mit 4 Zoll breiten Schienen	mit 2¼ Zoll breiten Schienen
auf einem guten ungepflasterten Erdwege .	$\frac{80}{2121} \cdot Q = 0{,}038 . Q$	$\frac{90}{2121} \cdot Q = 0{,}042 . Q$
wo der Boden etwas sandig war . .	$\frac{100}{2121} \cdot Q = 0{,}047 . Q$	$\frac{120}{2121} \cdot Q = 0{,}057 . Q$
auf mehr sandigem Boden . . .	$\frac{120}{2121} \cdot Q = 0{,}057 . Q$	$\frac{130}{2121} \cdot Q = 0{,}061 . Q$
auf sehr sandigem Boden . . .	$\frac{170}{2121} . Q = 0{,}080 . Q$	$\frac{190}{2121} . Q = 0{,}090 . Q$
auf frischem Schotter	$\frac{220}{2121} . Q = 0{,}104 . Q$	$\frac{240}{2121} . Q = 0{,}113 . Q$
im tiefsten Sande	$\frac{250}{2121} . Q = 0{,}118 . Q$	$\frac{270}{2121} . Q = 0{,}127 . Q$

Der Widerstand auf unsern Strassen beträgt also überhaupt nach Maassgabe des bessern oder schlechtern Weges 4 bis 12 Prozent von dem Gewichte der Ladung und des Wagens.

§. 549.

Die **vortheilhafteste Steigung der Bergstrassen** wird auf folgende Art berechnet:

Es sey die Kraft der Zugpferde $= k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)$; das Gewicht des Wagens $= W$, das Gewicht der Ladung, welche auf dem Wagen geführt wird $= Q$, das Gewicht der Zugpferde $= P$, der Widerstand des Weges $= m\,(Q + W)$, das Verhältniss der Höhe zur Länge der Bergstrasse $= \frac{h}{l} = x$, so haben wir für die aufwärtige Fahrt zwischen Kraft und Last folgende Gleichung

$k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) = m\,(Q + W) + \frac{h}{l}\,(Q + W + P)$. Hieraus folgt

$$Q = \frac{k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-m.W-\frac{h}{l}(W+P)}{m+\frac{h}{l}} = \frac{k\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-m.W-x(W+P)}{m+x}$$

Die Zeit, in welcher die Länge des Weges l zurückgelegt wird, ist offenbar $=\frac{l}{v}$. Wenn nun die Kosten eines Zugtages, nämlich der tägliche Lohn des Knechtes (Kutschers) und die Kosten, welche auf die Anschaffung und Unterhaltung der Pferde und des Wagens auf einen Tag ausfallen = p gesetzt werden, so haben wir die Proportion: Die Zeit eines Tages zur Zeit der Fahrt auf dem Bergwege, wie der Lohn p zu den Kosten der Fahrt über die Länge des Bergweges, oder $3600 . z : \frac{l}{v} = p : \frac{p . l}{3600 . z . v}$; da diese Kosten für den Transport der Ladung Q ausgelegt werden, so betragen die Frachtkosten für 100 Pfund $= \frac{100 . p . l}{3600 . z . v . Q}$. Weil aber bei dieser Frage nur die Höhe des Berges h gegeben ist, und die Länge l, welche diese Bergstrasse erhalten soll, gesucht wird, so können wir den Werth $l = \frac{h}{x}$ in die Gleichung für die Frachtkosten setzen. Hiernach ergibt sich der Betrag der Frachtkosten $= \frac{100 . p . h}{3600 . z . v . Q . x}$. Setzen wir nun statt Q den oben gefundenen Werth, so sind die Frachtkosten

$$= \frac{100 . p . h}{3600 . t . c . k . \frac{v}{c} . \frac{z}{t}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{m . W}{k}-x\left(\frac{W+P}{k}\right)\right\}\frac{x}{x+m}}$$

Diese Funktion ist in dreifacher Hinsicht einer Vermehrung oder Verminderung fähig, nämlich

1tens in Hinsicht auf die Geschwindigkeit v, mit welcher gefahren wird,

2tens in Hinsicht auf die Zeit z, wie lange gefahren wird, und

3tens in Hinsicht auf die Steigung x, je nachdem der Weg mehr oder weniger steil angelegt wird.

In dieser Gleichung sind die Grössen p, h, t, c, k gegeben, die Frachtkosten werden demnach ein Minimum seyn, wenn die Funktion

$$\frac{v}{c} . \frac{z}{t}\left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{m . W}{k}-x\left(\frac{W+P}{k}\right)\right\}\frac{x}{x+m}$$

zu einem Maximum gemacht wird. Weil aber in dieser Funktion drei veränderliche, von einander unabhängige Verhältnisse, nämlich $\frac{v}{c}, \frac{z}{t}$ und x vorkommen, so muss die Funktion auch in Hinsicht auf alle diese Verhältnisse zu einem Maximum gemacht werden. *)

*) Wir erhalten demnach

1tens in Beziehung auf $\frac{v}{c} \dots \left(2-\frac{2v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{m.W}{k}-x\left(\frac{W+P}{k}\right)=0$

2tens in Beziehung auf $\frac{z}{t} \dots \left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{2z}{t}\right)-\frac{m.W}{k}-x\left(\frac{W+P}{k}\right)=0$

3tens in Beziehung auf $x \dots \left\{\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)-\frac{m.W}{k}-x\left(\frac{W+P}{k}\right)\right\}\frac{m}{(m+x)^2}-\left(\frac{W+P}{k}\right)\frac{x}{m+x}=0$

Um die für die Steigung der Bergstrassen unten angeführte allgemeine Gleichung aufzulösen, können wir $\frac{x}{m} = y$ setzen und erhalten auf solche Art folgende Gleichung

$$y^4 + 3y^3 + y^2\left(\frac{9}{4} + \frac{m.W - k}{m(W+P)}\right) + \left(\frac{3/2 . m.W - 2k}{m(W+P)}\right)y - \frac{W(k - 1/4 m.W)}{m(W+P)^2} = 0.$$

Beispiel. Es sey für einen mit 4 Pferden bespannten Frachtwagen das Gewicht des leeren Wagens W = 2000 ℔, die Kraft eines Pferdes 125 ℔, folglich für alle 4 Pferde k = 500 ℔, c = 4 Fuss und ihr Gewicht P = 4.5.125 = 2500 ℔.

Mit diesen Werthen ergibt sich die vortheilhafteste Steigung aus der Auflösung folgender Gleichung

$$y^4 + 3y^3 + y^2\left(\frac{97}{36} - \frac{1}{9m}\right) + y\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9m}\right) + \frac{4}{81} - \frac{4}{81m} = 0.$$

Widerstands-Coeffizient des Weges m	Verhältniss der Strassensteigung $\frac{h}{l} = m.y$	Steigung auf 1 Klafter in Zollen.	Verhältniss der Geschwindigkeit und Arbeitszeit $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$	Jedesmalige Ladung in Pfunden Q	Frachtkosten für 1 Zentner auf die Höhe h zu führen.
0,03	0,0434	3,1	0,7890	6512	0,0000049 p.h
0,04	0,0478	3,4	0,7606	5387	0,0000058 p.h
0,05	0,0512	3,7	0,7369	4618	0,0000068 p.h
0,06	0,0539	3,9	0,7166	4047	0,0000077 p.h
0,08	0,0579	4,2	0,6812	3227	0,0000100 p.h
0,10	0,0607	4,4	0,6489	2736	0,0000124 p.h
0,12	0,0626	4,5	0,6210	2350	0,0000153 p.h

Aus der Verbindung der ersten zwei Gleichungen folgt, wie bereits in der Note Seite 51 bemerkt worden $\frac{v}{c} = \frac{z}{t}$. Die Substitution dieses Werthes in den beiden übrigen Gleichungen gibt

$$\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{m.W}{2k} + x\left(\frac{W+P}{2k}\right) \text{ und } \left(2 - \frac{v}{c}\right)^2 = \frac{m.W}{k} + x\left(\frac{W+P}{k}\right) + \left(\frac{W+P}{k}\right)\frac{x(x+m)}{m}.$$

Wird hier die obere Gleichung von der untern abgezogen, so bleibt

$$2 - \frac{v}{c} = \frac{m.W}{2k} + x\left(\frac{W+P}{2k}\right) + x\left(\frac{x+m}{m}\right)\left(\frac{W+P}{k}\right).$$

Diese Gleichung zur 2ten Potenz erhoben und der Werth $\left(2 - \frac{v}{c}\right)^2$ in die nächst vorhergehende substituirt gibt

$$\left\{\frac{m.W}{2k} + x\left(\frac{W+P}{2k}\right) + x\left(\frac{x+m}{m}\right)\left(\frac{W+P}{k}\right)\right\}^2 = \frac{m.W}{k} + x\left(\frac{W+P}{k}\right) + x\left(\frac{x+m}{m}\right)\left(\frac{W+P}{k}\right).$$

Werden in dieser Gleichung die angezeigten Rechnungsoperationen verrichtet, die ganze Gleichung mit $\frac{1}{m^2}\left(\frac{k}{W+P}\right)^2$ multiplicirt und sodann nach den Potenzen von $\frac{x}{m}$ geordnet, so erhält man

$$\frac{x^4}{m^4} + \frac{3x^3}{m^3} + \frac{9x^2}{4m^2} + \left(\frac{W}{W+P}\right)\frac{x^2}{m^2} - \frac{k}{m(W+P)}.\frac{x^2}{m^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{W}{W+P}\right)\frac{x}{m} - \frac{2k}{m(W+P)}.\frac{x}{m} + \frac{1}{4}\left(\frac{W}{W+P}\right)^2 - \frac{k.W}{m(W+P)^2} = 0$$

woraus das Verhältniss der Steigung x oder $\frac{h}{l}$ gefunden werden kann, wenn m, W, P und k gegeben sind.

§. 550.

Aus der vorstehenden Tabelle sehen wir, dass die Steigung von 4 Zoll auf die Klafter nur für schlecht unterhaltene Strassen, wobei der Widerstand 6 bis 10 Prozent beträgt, angemessen sey, bei bessern Strassen aber auf $3\frac{1}{2}$ oder 3 Zoll reduzirt werden müsse. Uibrigens folgt aus der oben angeführten Gleichung die weitere Bemerkung, dass die vortheilhafteste Strassensteigung noch dieselbe bleibt, wenn die Verhältnisse der Grössen k, P und W dieselben sind, z. B. ein zweispänniger Wagen, dessen Gewicht $W = 1000$ ℔, das Gewicht der zwei Pferde $P = 2 \cdot 5 \cdot 125 = 1250$ ℔ und die Kraft $k = 250$ ℔ beträgt. Auch ergibt sich von selbst, dass für den Fall, wenn die Verhältnisse der Grössen k, P und W sich nicht bedeutend ändern, die vortheilhafteste Steigung sehr nahe denselben Werth behalte.

In der vorstehenden Tabelle ist Q das Gewicht der Ladung, welche die Pferde auf der Bergstrasse mit der berechneten vortheilhaftesten Geschwindigkeit in der angemessenen Zeit führen können. Tritt jedoch der Fall ein, dass der Fuhrmann eine grössere Ladung auf den Wagen genommen hat, welche er zwar auf der horizontalen Strasse ohne Anstand fortführt, auf der Bergstrasse aber ohne übermässige Anstrengung seiner Pferde nicht mehr fortschaffen kann, so muss er dann für dieses Uibergewicht Vorspannpferde auf der Bergstrasse nehmen. Die Zahl n der hiezu erforderlichen Pferde ergibt sich aus der Proportion: die Last $Q + W$ erfordert 4 Pferde, die Differenz der Ladung wird daher n Pferde benöthigen.

Beispiel. Es sey wie oben $W = 2000$ Pfund, und der Widerstand $m = 0{,}05$, so folgt aus der Gleichung $(Q + W)\, 0{,}05 = 500$, die Ladung auf der horizontalen Strasse $Q = 8000$ ℔. Die vortheilhafteste Steigung ist in diesem Falle $3{,}7$ Zoll auf die Klafter und die Ladung $Q = 4618$ ℔; es werden demnach $n = 2$ Vorspannpferde erfordert.

Für lange Strassen, wo abwechselnde Berge und Ebenen vorkommen, pflegen die Fuhrleute ihre Ladung nach einem aus der Erfahrung angenommenen Durchschnitte zu bemessen, die ganze Strasse mit denselben Pferden zu befahren, und nur über die höchsten Bergstrecken Vorspann zu nehmen; hiebei wird über Anhöhen etwas langsamer, auf ebenen Strecken und bergab aber schneller gefahren, und die Forderung des Frachtlohnes für die ganze Strecke von den Fuhrleuten nach dem benöthigten Zeitaufwande bemessen. Es entsteht demnach die Frage, wie die Frachtkosten auf einer Strassenstrecke anzuschlagen seyen, wobei nebst den ebenen Strecken noch andere Gefälle vorkommen. Wir werden diese Aufgabe bei dem Gegenstande der Eisenbahnen umständlich behandeln, und dort in einem Beispiele die zur Befahrung einer Strecke mit verschiedenen Steigungen erforderliche Zeit und den Kostenaufwand berechnen.

§. 551.

Die bisherige Theorie enthält die wesentlichsten Grundsätze über die Konstrukzion der Frachtwägen und Strassen. Obwohl wir bereits S. 572 bemerkten, dass das praktische Detail dieser Gegenstände hier nicht behandelt werde, so wird es doch unsern Lesern nicht unangenehm seyn, hier noch folgende Bemerkungen über den Bau der Räder als des wesentlichsten Theiles der Frachtwägen zu finden.

Bei den sogenannten schweren Frachtwägen kommen gegenwärtig die breiten Felgen immer mehr in Anwendung, nachdem die Vortheile derselben mehr erkannt und gewürdigt werden. Alle Felgen werden hierlandes von Holz verfertigt, gewöhnlich sechs in einen Radkranz gebunden und mit eisernen Schienen oder Radreifen beschlagen. Die älteste Art dieses Beschläges bestand darin, dass man über jede Fuge der Felgen eine Schiene und demnach über die sechs Felgen auch eben so viel Schienen nagelte. Auf gleiche Weise hat man auch bei den sechs und mehr Zoll breiten Felgen die eisernen Radreifen aus mehreren Stücken zusammengesetzt, die durch Nägel oder Schrauben an die Radfelgen befestigt wurden. Die Konstruction eines solchen Rades zeigt Fig. 15 bis 18. In England werden breitfelgige Räder gewöhnlich mit 3 oder 4 nebeneinander liegenden Radreifen von $1\frac{3}{4}$ bis 2 Zoll Breite beschlagen. Es gibt jedoch grössere Hammerwerke, z. B. in Steyermark, wo zugleich ein stärkeres Schmiedeisen erzeugt wird, und wo man Radschienen für die ganze Breite 6zölliger Felgen und die ganze Länge der Peripherie des Rades aus einem Stücke verfertigt, zusammen schweisst, auf das Rad aufzieht und sie sodann mit Nägeln befestigt, deren Köpfe in konischen Oeffnungen im Radreifen versenkt, und die entgegengesetzten Ende mit Schrauben an die Radfelgen angezogen werden.

Fig. 15 bis 18. Tab. 29.

Die Speichen der Räder werden gewöhnlich nur in eine konische Fläche gestellt; da dieselben jedoch leicht aus dem Haufen fallen, so hat man für schwere Wägen die Nabe der Räder 12 bis 15 Zoll lang gemacht und die Speichen doppelt gegegeneinander gestellt. Diese Speichen so wie den Radkranz hat man in England von Schmiedeisen, die Nabe aber von Gusseisen zu machen versucht, jedoch bei schwerem Fuhrwerke wieder aufgegeben, weil bei solchen Rädern auf gewöhnlichen Strassen die Stösse an Steine zu heftig, demnach auch der Festigkeit des Rades sehr nachtheilig wurden, wogegen hölzerne Räder mehr Biegsamkeit und Nachgiebigkeit besitzen, und daher der nachtheiligen Einwirkung solcher Stösse leichter widerstehen.

Bei dem gewöhnlichen Fuhrwerke werden die Naben der Räder etwas mehr ausgebohrt, als es die Achse erfordert und eben so befindet sich zwischen dem Vorstecknagel und der Nabe noch ein Spielraum, damit die Räder den Unebenheiten der Strasse, den Steinen etc. nachgeben können. Da solche Räder bei der Bewegung des Wagens auf den Achsen immer hin und her schwanken, so kann man wegen des nothwendigen Spielraumes keine flüssige Schmiere anwenden, und auch die gewöhnliche Schmiere geht sehr schnell verloren. Wenn jedoch die Strasse sehr eben, abgefahren und hinlänglich fest ist, wie es z. B. bei den englischen *M^c. Adam*'isirten Strassen der Fall ist, so kann man Räder zu den Wägen verwenden, deren Naben keinen Spielraum auf den Achsen besitzen, und man kann die Achsen in einer sogenannten Schmierbüchse laufen lassen. In England nennt man solche Räder *close ended wheels* (an ihrem Ende geschlossene Räder) und man braucht sie sowohl bei leichten Stadtwägen, (*Gigs* oder *Caricles*) als auch bei grossen Lastwägen. Die genaue Darstellung der Achse und Nabe eines solchen Rades für leichte Wägen enthält Fig. 19 in der Längenansicht, Fig. 20 im Längendurchschnitte und Fig. 21 in der Ansicht von vorne. Der Durchschnitt der Achse AB zeigt die Form, nach welcher sie abgedreht wurde; auf diese Achse wird eine gusseiserne Hülse a b c d, welche in dem hölzernen Haufen des Rades eingesetzt ist, und auf gleiche

Fig. 19 bis 21.

Art von der andern Seite die Scheibe e f angesteckt. Diese Scheibe wird durch die Schrauben m, m', m'', welche durch den Radhaufen gehen, mit demselben verbunden, und dreht sich daher gemeinschaftlich mit dem Haufen herum. Damit jedoch das Rad von der Achse nicht ablaufen könne, ist die letztere mit dem ringförmigen Absatze o o' Fig. 20 versehen. Die Hülse ist vorn mit der messingenen, in dieselbe eingeschraubten Platte g h geschlossen, in welche leztere durch eine mit der Schraube k geschlossene Oeffnung Oehl eingelassen wird; dieses füllt den Raum p und die kleinen Zwischenräume q, q', r, t, r', und s, s'. Zur bessern Erhaltung des Oehls wird zwischen der Scheibe e f und der Hülse a d ein Filz eingelegt, zu dessen Befestigung abermal an der Hülse dort, wo sie die Scheibe bei a, a' berührt, ein im Kreise herum laufender hervorstehender kleiner Rand bei dem Abdrehen gelassen wird. Aus dieser Beschreibung erhellet, dass das Oehl in der Büchse vollkommen gehalten werde, und sich bei der Bewegung des Rades auf der ganzen Länge der reibenden Achse vertheile. Dass übrigens diese Achse unbeweglich bleibe und das Rad sammt der Hülse a b c d und der Scheibe e f sich gemeinschaftlich herumdrehe, versteht sich von selbst. Die Verbindung des ganzen Rades mit der Hülse und Achse zeigt Fig. 22. Die Fig. 23, 24 und 25 stellen die Achse und Nabe für einen grossen Güterwagen vor. Die erstere ist wieder von Schmiedeisen und bleibt bei der Bewegung des Rades fest. Die Nabe ist von Gusseisen und mit 12 Oeffnungen zum Einsetzen der hölzernen Speichen versehen. Eine ganze Achse sammt zwei solchen Naben wiegt 280 ℔ und gehört zu einem vierrädrigen Wagen, der mit 150 bis 200 Zentnern beladen wird. Der abgedrehte Theil der Achse misst bloss 2¼ Zoll im Durchmesser und ist auf seiner ganzen Länge, wie Fig. 23 zeigt, bei r segmentartig abgeschnitten, um die Vertheilung des Oehles gleichförmig auf der ganzen Achse zu bewirken.

Fig. 19 bis 21. Tab. 29.

Fig. 22.

Fig. 23, 24 u. 25.

§. 552.

Die Versuche, welche §. 548 über die Widerstände der Wägen auf den Strassen von verschiedener Beschaffenheit angeführt wurden, führen zur Uiberzeugung, dass unsere Landfracht durch mechanische Verbesserungen des Wagens, breitere Radschienen, grössere Räder und dgl. zwar noch einigermassen befördert werden könne, dass aber Hauptverbesserungen nur durch Herstellung guter Strassen zu bewirken sind. Die Engländer haben in dieser Hinsicht sehr zweckmässig die Wagengeleise mit eisernen Schienen belegt und diese Strassen, Eisenbahnen genannt, vorzüglich in den letztern Zeiten so vervollkommnet, dass sie gegenwärtig bereits in sehr ausgedehnter Benützung daselbst stehen, und auch auf dem Continente von Europa, so wie in den nordamerikanischen Freistaaten immer mehr in Anwendung kommen; die Eisenbahnen sind sonach ein Gegenstand, dem man in der neuesten Zeit ausserordentliche Wichtigkeit beilegt.

Die ältesten Bahnen waren von Holz und sollen vor beiläufig 200 Jahren bei den Steinkohlen-Gruben in der Nähe von *Newcastle-upon-Tyne* im Gebrauche gewesen seyn; nach andern Nachrichten sollen diese Bahnen jedoch erst im Jahre 1680 ihren Ursprung finden. Als man nämlich wegen des immer mehr überhand genommenen Holzmangels sich in *London* und andern englischen Städten gezwungen fand, Steinkohlen zur Feuerung zu verwenden, wurden zur Verminderung der grossen Trans-

portkosten hölzerne Bahnen (*wooden-rail-ways*) von den Steinkohlengruben in den Grafschaften *Northumberland* und *Durham*, vorzüglich in der Gegend von *Newcastle-upon-Tyne* bis zu den Flüssen *Wear* und *Tyne* gelegt, auf welchen die Kohlen mit eigends hiezu gebauten Wägen zu den Schiffen verführt, und mit den letztern zum Absatze an den englischen Küsten weiter gebracht wurden.

Auf diesen noch ganz unvollkommenen Bahnen machte man bereits die Erfahrung, dass ein Pferd mit Leichtigkeit einen mit Steinkohlen beladenen Wagen ziehen konnte, wozu vorher auf der gewöhnlichen Strasse drei oder mehr Pferde verwendet werden mussten. Im Jahre 1738 wurden die ersten Bahnen von Gusseisen (*cast iron-rail-ways*) gelegt; im Jahre 1768 wurden bedeutende Verbesserungen an den Transportwägen vorgenommen, und die Eisenbahnen immer mehr und mehr vervollkommnet, bis sie vom Jahre 1797 an die öffentliche Aufmerksamkeit im hohen Grade in Anspruch nahmen. Im August 1799 wurde dem englischen Parlamente ein umständlicher Bericht über die grossen Vortheile der Einführung der Eisenbahnen erstattet, und es wurden in Gegenwart besonderer Commissäre mehrere Versuche auf ausgeführten Eisenbahnen gemacht, die erstaunungswürdige Resultate lieferten. Seit jener Zeit war man unablässig mit der Verbesserung derselben beschäftigt; man belegte zuerst die hölzernen Bahnen mit Schienen von Schmiedeisen, man legte Bahnen ganz von Gusseisen, und auch ganz von Schmiedeisen; endlich belegte man sogar gusseiserne Bahnen mit Schienen von Schmiedeeisen.

Die Schienen von Gusseisen macht man 3 bis 4 Fuss lang, jene von Schmiedeisen 15, 20 bis 30 Fuss lang, und beide an der Oberfläche 2 bis $2\frac{1}{4}$ Zoll breit; man legt sie für die gewöhnlichen Wagengeleise $4\frac{1}{2}$ Fuss weit von einander; die gusseisernen Schienen befestigt man auf steinernen Unterlagen, die schmiedeisernen entweder eben so, oder auf untergelegten hölzernen, auf Grundschwellen ruhenden Trämen, und auf beiden fährt man bloss mit besonders hiezu gebauten Wägen mit gusseisernen Rädern. Durch den Gebrauch werden die Schienen an der Oberfläche so abgeglättet, dass ein Pferd gewöhnlich 100, und wenn die Bahn sehr gut gelegt ist, 150 bis 180 Wiener Zentner auf einer horizontalen Eisenbahn, bei gewöhnlicher Anstrengung im starken Schritte, und eben so leicht zu ziehen vermag, als es auf einer gewöhnlichen Strasse 10 bis 15 Wiener Zentner zieht.

In den Pariser *Annales des Arts et Manufactures par O' Reilly* befindet sich in den Monathsheften *Nivose an IX* (1801), *Fructidor an XI* und *Messidor an XII* einer der ersten umständlichen Berichte über die englischen Eisenbahnen, und es wird daselbst angeführt, dass im Jahre 1801 in *Carnarvonshire* eine Eisenbahn zum Behufe eines Bruchsteintransportes bis zu dem Hafen *Penrhyn* angelegt wurde, wobei zehn Pferde dieselbe Arbeit, wie vier hundert Pferde auf der vormals bestandenen Strasse verrichteten. In denselben Annalen wird bereits gezeigt, dass die Anlage der Eisenbahnen vor jener der kleinern Schiffahrts-Canäle bedeutende Vorzüge besitze, und dass der Transport auf den Eisenbahnen nur halb so viel, als auf den kleinern Canälen koste.

In allen neuern mechanischen Schriften und Reisebeschreibungen von England wird der Eisenbahnen erwähnt, allein in den wenigsten Werken finden sich genaue Beschrei-

bungen derselben und bestimmte Nachweisungen über ihren Erfolg. Die genauesten Zeichnungen, welche bisher über die Konstruktion der englischen Eisenbahnen erschienen sind, verdanken wir einem Ingenieur von Nord-Amerika, welcher auf Kosten einer Gesellschaft in Philadelphia England im Jahre 1825 und 1826 bereiste, und hierauf die Resultate seiner Beobachtungen in folgendem Werke bekannt machte: *Reports on Canals, Railways, Roads and other subjects, made to the Pennsylvania society for the promotion of internal improvement, by W. Strickland, architect and engineer. Philadelphia* 1826 (Mit 71 Kupfertafeln, Preis des Werkes in London 3 Liv. 13 sh. 6 d.) Die umständlichen Beschreibungen der Eisenbahnen, welche in den letztern Jahren in England ausgeführt wurden und die genauesten Angaben über ihre Bau- und Unterhaltungskosten, so wie über die Leistungen der Kräfte der Pferde und des Dampfes auf denselben finden sich in dem Werke: „Uiber Schienenwege in England; Bemerkungen, gesammelt auf einer Reise in den Jahren 1826 und 1827. Von *C. v. Oeynhausen* und *H. v. Dechen.* Berlin 1829. Im Verlage bei G. Reimer."

Die Angaben in der folgenden Beschreibung sind vom Verfasser dieses Werkes an Ort und Stelle in den Jahren 1822, 1827 und 1829 in England und Schottland gesammelt und die Zeichnungen, welche Tab. 30 bis 36 enthalten, sind daselbst mit aller Genauigkeit aufgenommen worden. Die Dimensionen sind im englischen Maasse.

§. 553.

Alle Eisenbahnen lassen sich in drei Gattungen eintheilen: 1^tens^ flache Schienenwege (*Railroads*), bei welchen die Schienen (*edge rails*) flach oder etwas abgerundet, und die Räder der darauf sich fort bewegenden Wägen gegen das Abgleiten mit einem hervorstehenden Rande oder Spurkranze an der innern Seite des Wagens versehen sind. 2^tens^ Schienenwege mit hervorstehendem Rande (*Tramroads*), wobei die Schienen (*plate rails*) gegen das Abgleiten der Räder mit einem hervorstehenden Rande nach aussen versehen, die Wagenräder aber flach sind, und 3^tens^ *Palmer*'sche Schienenwege, welche nur eine Schienenreihe haben, die über dem Boden erhöht ist, und zweirädrige Wägen trägt, deren Kästen zu beiden Seiten der Räder herabhängen. Die *Railroads* sind vorzüglich im Norden von England, in den Grafschaften *Northumberland* und *Durham*, wo die meisten Eisenbahnen vorhanden sind, im Gebrauche, und werden gegenwärtig wegen ihrer allgemein anerkannten grössern Vortheile gegen die *Tramroads* bei allen neuern Eisenbahnunternehmungen in England, so wie auch in Frankreich angewendet. Die *Tramroads* sind vorzüglich im Westen von England, in *Wales* im Gebrauche; die grösste Zahl derselben dürfte sich in *Monmouthshire* befinden. Der *Palmer*'sche Schienenweg ist bisher nur bei *Cheshunt* in *Hertfordshire* in einer Länge von ¾ engl. Meilen zum Transporte des Kalks und der Ziegeln an den *Lee Canal*, dann auf einer sehr kurzen Strecke in dem Proviant-Amte (*Victualling office*) zu *Deptford* bei *London* erbaut worden, und dürfte wegen der vielen Unbequemlichkeiten, die seine Konstruktion mit sich führt, kaum in weitere Anwendung kommen.

Die Tafel No. 31 enthält die Konstruktion der Gusseisenschienen auf den englischen *Railroads*, wie dieselben von den Herrn *Losh*, *Wilson* und *Bell* gegossen

Fig. 1 und 2. Tab. 31. werden; hievon ist Fig. 1 die Längenansicht im 4ten Theile der natürlichen Grösse und Fig. 2 der Querdurchschnitt durch die Mitte der Schiene in halber Grösse. Die Länge der Schiene von einem Ende zum andern beträgt 4 Fuss, und ihre Höhe in der Mitte 5 Zoll, an den Enden aber $3\frac{1}{2}$ Zoll, die obere Breite der Schiene ist $2\frac{1}{2}$ Zoll und so abgerundet, wie der Durchschnitt Fig. 2 zeigt. Die Befestigung dieser Schiene in gusseisernen Lagern (*Chairs* oder *pedestals*), so wie die Befestigung der letztern auf untergelegten Steinblö- Fig. 1 bis 4. Tab. 32. cken ist aus Tafel 32, Fig. 1 bis 4 ersichtlich. Die Schiene M wird nämlich mit dem schmiedeisernen Nagel N an das gusseiserne Lager befestigt; dieses letztere aber durch die hölzernen Nägel O und P auf Steinblöcken fest gemacht. Die Dimensionen der Steinblöcke bei der *Manchester* und *Liverpool* Bahn und die Art sie im Grunde vollkommen fest zu legen, haben wir bereits Seite 591 beschrieben. Bei der *Darlington* Eisenbahn sind die steinernen Unterlagen 14 Zoll lang, 18 Zoll breit und 9 Zoll hoch, sie wurden jedoch zu klein gefunden, da sie leicht aus ihrer Lage verrückt werden und dann wieder gerichtet werden müssen. Die gusseisernen Schienen sind an ihrem Ende entweder gerade abgeschnitten wie Fig. 6. Fig. 4, oder nach der patentirten Verbindung Fig. 6 oder auch mit andern geraden oder krummen Linien begränzt.

Die Gewichte der Gusseisenschienen betragen mehr und minder, je nachdem die Wägen, welche auf denselben fahren, ein grösseres oder kleineres Gewicht haben. Bei der *Darlington* Eisenbahn, wo beiläufig auf dem 5ten Theile der Länge Gusseisenschienen vorhanden sind, beträgt das Gewicht einer 3 Fuss langen Schiene 56 ℔, ein *pedestal* wiegt 6 ℔, demnach benöthigt man bei einer einfachen Bahn für die N. Oe. Meile 8333 N. Oe. Zentner Gusseisen. Die Wägen, womit diese Bahn befahren wird, haben ein Gewicht von $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Tonnen und enthalten 1 *chaldron* oder 53 engl. Zentner Steinkohlen. Der Transport geschieht jedoch auch durch mehrere Dampfwägen, die 7 Tonnen wiegen; in diesem Falle beträgt daher der Druck auf ein Rad $1\frac{3}{4}$ Tonnen (32 N. Oe. Zentner.)

Bei der *Brunton* und *Shield's* Eisenbahn (*Wide open Railroad* genannt) sind die gusseisernen Schienen 4 Fuss lang, an der Oberfläche $1\frac{7}{8}$ Zoll breit, in der Mitte 5 Zoll, an beiden Enden 3 Zoll hoch und wiegen 42 ℔, das *pedestal* jedoch nur 3 ℔. Eine N. Oe. Meile benöthigt daher 4536 N. Oe. Zentner Gusseisen. Die vierrädrigen Wägen, welche auf dieser Bahn gehen, sind *half chaldron waggons,* d. h. sie enthalten nur $26\frac{1}{2}$ engl. Zentner Steinkohlen, die Wägen wiegen $12\frac{3}{4}$ Zentner, demnach ist der Druck von einem Rade $= 9{,}81$ engl. Zentner (8,9 N. Oe. Zentner.) Dieser Druck ist weit geringer, als bei der *Darlington* Bahn, und die Schienen sind für denselben hinreichend stark gefunden worden.

§. 554.

Bei allen neuern Eisenbahnen in England, Schottland und Frankreich werden ohne Ausnahme Schienen von gewalztem Eisen (*malleable Iron rails*) verwendet. Diese Schienen sind 5 bis 6 *yards* oder 15 bis 18 Fuss lang, liegen jedoch von 3 zu 3 Fuss auf *pedestals* auf. Die Längenansicht eines Stückes gewalzter Schienen im 4ten Theile Fig. 11. der natürlichen Grösse enthält Fig. 11, den Querdurchschnitt dieser Schiene in der Mitte

AB zwischen zwei *pedestals* zeigt Fig. 5 und den Durchschnitt in einem *pedestal* die Fig. 1. Nebst diesen Profilen sind diese Schienen auch wie Fig. 13 Tab. 29 zeigt geformt; an den Enden sind sie entweder gerade abgeschnitten oder schief wie Fig. 6 (*half lap joint*). Die vorzüglichsten gewalzten Schienen werden auf den *Bedlington Iron works* bei *Morpeth*, 8 Meilen von *Newcastle upon Tyne* entfernt, verfertigt. Die Verfertigungsart wird bei der Beschreibung der Walzwerke im 3ten Bande umständlich abgehandelt werden.

Auf der *Darlington* Eisenbahn ist beiläufig der 5te Theil der Hauptbahn mit Gusseisenschienen, der übrige Theil aber und alle seit 1827 angelegten Nebenbahnen mit gewalzten Schienen belegt; hievon wiegt ein *yard* 28 ℔, also gerade halb so viel als 1 *yard* Gusseisenschiene. Eine Schiene hat 5 *yards* Länge und wiegt 10 *stones* = ⅝ engl. Zentner, demnach werden auf eine N. Oe. Meile 3763 N. Oe. Zentner gewalzte Schienen benöthigt. Diese Schienen wurden zu 12 *Liv. st.* für die Tonne (6 fl. 37 kr. C. M. für 1 N. Oe. Zentner) bezahlt, wogegen die Gusseisenschienen mit 6 *Liv. st.* 15 *sh.* für die Tonne (3 fl. 43 kr. C. M. für den N. Oe. Zentner) vergütet wurden. Da jedoch 2mal so viel Gusseisen für eine Meile benöthigt wurde, so kommen die Gusseisenschienen wirklich theurer zu stehen, und nachdem in den letztern Jahren der Unterschied des Preises der gewalzten und Gusseisenschienen noch geringer wurde, so behaupten die gewalzten Schienen schon hinsichtlich der ersten Anschaffungskosten den Vorzug. Nebstbei unterliegen gewalzte Schienen der Gefahr des Zerbrechens bei weitem weniger als gusseiserne, es finden auf denselben 4 bis 5mal weniger Zusammenfügungen als bei den Gusseisenschienen statt, man kann daher leichter und schneller hierauf fahren, zumal als diese Schienen sich in den Krümmungen regelmässiger biegen lassen, und dieselben auf 5 bis 6 *pedestals* aufliegen, folglich nicht so leicht aus ihrer Lage gerückt werden, als es bei Gusseisenschienen von 3 oder 4 Fuss Länge der Fall ist. Endlich behaupten diese Schienen in kalten Klimaten bei ihrer geringern Sprödigkeit im Winter einen entschiedenen Vorzug.

Die Eisenbahn von *Manchester* nach *Liverpool* hat durchaus gewalzte Schienen, die jedoch 35 ℔ auf 3 Fuss Länge, demnach 7 ℔ mehr als die Schienen der *Darlington* Bahn wiegen. Die Ursache hievon liegt in dem Gebrauche der Dampfwägen, welche mit einer Schnelligkeit von 15 bis 25 engl. Meilen in 1 Stunde über diese Bahn fahren, demnach auch die Schienen weit stärker seyn müssen, als es bei dem Gebrauche der Pferdekraft allein der Fall wäre. Die Schienen der obigen Bahn wurden um 10 *Liv.* 10 *sh.* für die Tonne (5 fl. 47 kr. C. M. für den N. Oe. Zentner bezahlt). Die *pedestals* sind ebenfalls massiver als bei der *Darlington* Bahn, und wiegen 10 ℔.

Auf der *Monkland* und *Kirkintilloch* Eisenbahn in Schottland sind die gewalzten Schienen in der Hauptbahn (*main line*) ebenfalls 15 Fuss lang und wiegen 28 ℔ auf 3 Fuss Länge; auf den Nebenbahnen sind die Schienen nicht so massiv und die schwächsten hievon wiegen nur 17 ℔ auf 3 Fuss Länge (2285 N. Oe. Zentner auf eine N. Oe. Meile), allein diese Schienen haben sich zwischen den *pedestals* bedeutend gebogen, obgleich der Transport auf der Bahn bloss durch Pferde und mit Wägen geschieht, die nur 2 Tonnen Ladung haben.

Die gewalzten Schienen auf der *Glasgow* und *Garnkirk* Eisenbahn wiegen ebenfalls nur 28 ℔ auf 3 Fuss Länge. Man kann daher diess Gewicht oder 3763 N. Oe. Zentner

gewalztes Eisen auf eine N. Oe. Meile einfache Bahn für Wägen, bei welchen ein Rad den Druck von 32 N. Oe. Zentner auf die Bahn ausübt, als durch die Erfahrung bewährt annehmen.

§. 555.

Die meisten Bahnen in England sind nur einfach, d. h. mit zwei Reihen paralleler Schienen gelegt, und nur wenige Bahnen, wie z. B. jene von *Manchester* nach *Liverpool* sind doppelt oder mit 4 Reihen Schienen, wo also in einer Bahn hin- und in der andern zurückgefahren wird. Bei einer einfachen Bahn muss immer eine hinreichende Anzahl Ausweichplätze (*siding or passing places*) vorhanden seyn, damit der Verkehr zu gleicher Zeit hin und zurück statt finden könne. Bei der *Darlington* Bahn sind so viel Ausweichplätze in der Hauptlinie angebracht, dass man immer von einem zum andern sehen kann, und ein eigenes Reglement bestimmt, welche Wägen bei dem Begegnen in der Hauptbahn bleiben, und welche in den Ausweichungsplatz fahren müssen. Den Grundriss eines solchen Ausweichplatzes enthält Fig. 3 Tab. 31. Man bemerkt hiebei 3 besondere Schienenstücke, nämlich das Mittelstück A B, welches Fig. 4 und die 2 Seitenstücke C D und E F, welche Fig. 5 und 6 im vergrösserten Masstabe gezeichnet sind. Die Konstruktion dieser 3 Stücke, welche aus Gusseisen geformt werden, ersieht man theils aus diesen Grundrissen, theils aus den Durchschnitten Fig. 7 und 8. Die Furchen, welche in diesen Schienen enthalten sind, haben 2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$ Zoll Tiefe, um die Spurkränze der Räder aufzunehmen. Die Zungen m n und m′ n′ (*moveable iron tongues*) welche von Schmiedeisen und bei m, m′ um einen Nagel beweglich sind, werden an eine oder die andere Schienenreihe angelegt, um den Wagen in eine oder die andere Bahn zu leiten. Kommt der Wagen von I und soll in der Hauptbahn fortgehen, so muss die Zunge m n geöffnet und m′ n′ geschlossen oder die Spitze n′ an die Bahnschienen angelegt werden; dasselbe muss geschehen, wenn der Wagen von II gegen I geht. Wenn jedoch der Wagen von I in die Nebenbahn III gehen soll, so wird die Zunge m n bei n an die Schiene C D angelegt, dagegen aber die Zunge m′ n′ bei n′ geöffnet. Dasselbe geschieht, wenn ein Wagen aus der Nebenbahn von III nach I geht.

Fig. 3 bis 8. Tab. 31.

Es erhellet jedoch, dass der Wagen von II nach I und von III nach I gehen kann, wenn auch die Zungen sich nicht in der angezeigten Lage befinden, denn wenn z. B. ein Wagen von II nach I geht und die Zunge bei n geschlossen, bei n′ aber geöffnet ist, so wird die erste Zunge durch den blossen Druck des Spurkranzes des Rades geöffnet, und die zweite Zunge durch denselben Druck geschlossen, und so auch, wenn ein Wagen von III nach I geht. In diesen Fällen ist es daher nicht nothwendig, dass der Kutscher von dem Wagen absteige, und die Zungen ein- oder auslege; kommt jedoch ein Wagen von I und die Zungen befinden sich nicht in der gehörigen Lage, so muss der Kutscher dieselben erst einlegen oder öffnen. Damit die Zungen in ihrer Lage bleiben, werden keilförmige Eisenbleche G von 4 bis 6 Zoll Länge und $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke, die an kleine Ketten befestigt sind, zwischen einen auf der Schiene angegossenen Vorsprung o p und die Zunge eingeschoben. Dass die Zungen immer so liegen müssen, damit die Hauptbahn geöffnet bleibt, und nur wenn sich Wägen begegnen, geschlossen wird, versteht sich von selbst.

Fig. 5 u. 6.

Um zu verhindern, dass die Spurkränze der Wagenräder nicht an die Spitze o anstossen und genau in der ihnen vorgezeichneten Bahn fortgehen, sind in jedem Auswei-

Fig. 3 u. 4.

chungsplatze auf jeder Seite noch 2 Leit-oder Einweiseschienen (*check rails*) a b, von 5 bis 6 Fuss Länge angebracht; diese Schienen sind auch häufig bloss von Holz mit schmiedeisernen Radreifen beschlagen.

Zur Vermeidung des Aufenthaltes, welcher durch das Absteigen des Kutschers und Einlegen der Schiene entsteht, hat man auf der *Wide open* Eisenbahn die Einrichtung Fig. 9 angebracht. Hiebei ist a die Schiene, n' die Zunge und b c d ein eiserner Winkelhebel, der in einem hohlen Raume unter der Bahn befestigt und bei d mit einem Gewichte belastet ist. Diess letztere verursacht, dass die Zunge n' fortwährend an die Schiene a angedrückt wird; kommt daher ein Wagen (Fig. 3) vom III nach I und öffnet die Zunge n' (ohne Beihülfe des Kutschers), so geht diese Zunge durch den Druck des Winkelhebels sogleich wieder in die vorige Lage zurück; es bleibt daher die Hauptbahn immer bei n' geschlossen. Will man aber von I nach III fahren, so muss das Blech G (Fig. 5 und 6) durch den Begleiter des Wagens gehörig eingelegt und wenn alle Wägen vorüber sind, die Zuge wieder frey gemacht werden. Ein ähnlicher Mechanismus ist auf der *Monkland* Eisenbahn angebracht und Fig. 10 dargestellt. Die Zunge a b c ist bei d mit einem Nagel durchbohrt, an dessen Spitze e eine kleine Kette e f befestigt ist, die über eine gusseiserne Rolle geht, und am Ende mit einem Gewichte beschwert wurde. Dieses letztere zieht die Zunge beständig an, eben so wie es bei dem Winkelhebel Fig. 9 der Fall ist.

Fig. 9. Tab. 31.

Fig. 10.

Die Länge einer Ausweichung richtet sich nach dem vorhandenen Verkehre; auf jenen Bahnen, wo mit Dampfwagen transportirt wird, muss in der Ausweichung wenigstens der Raum für den Dampfwagen und alle (20 bis 24) angehängte Wägen seyn. Der Raum zwischen der Haupt- und der Nebenbahn Fig. 3 beträgt auf englischen Bahnen gewöhnlich nur 4 bis 5 Fuss.

Sehr häufig ist es der Fall, dass eine Eisenbahn von Strassen durchschnitten wird; die Bahn läuft daher entweder auf Brücken über der Strasse, oder in Stollen unter der Strasse, oder die Bahn durchschneidet die Strasse in gleicher Höhe. Eine solche Uibersetzung enthält Fig. 11 im Durchschnitte und Fig. 12 in der obern Ansicht. Es werden nämlich die Schienen auf gewöhnliche Art auf Steinblöcken, die in der Strasse versenkt sind, in den *pedestals* befestigt, auf der inneren Seite der Schiene aber ein Falz oder eine Oeffnung von 2 Zoll Tiefe und 1½ Zoll Breite für die Spurkränze gelassen; damit jedoch diese Oeffnung sich gehörig erhalte, wird auf der andern Seite derselben in paralleler Richtung zur Schiene ein hinlänglich starkes mit Eisen beschlagenes Stück Holz o oder auch eine zweite Schiene eingelegt. Auf diese Art können nunmehr alle Wägen ohne Anstand über die Strasse fahren, so wie auch die Bahnwägen in ihrer Spur fortlaufen, und nur erfordert wird, dass die Oeffnung von Zeit zu Zeit gereinigt werde.

Fig. 11 und 12.

Zur Vermeidung dieser Mühe ist bei der *Manchester* und *Liverpool* Eisenbahn folgende Konstruktion eingeführt worden. Es wird der Länge nach unter jeder Schiene ein gewölbter Kanal in solcher Weite angelegt, dass ein Knabe durchkriechen und ihn reinigen kann. Der Kanal ist immer auf 18 Zoll Länge oben geschlossen, wie Fig. 13, dann aber wieder auf 18 Zoll Länge oben offen, wie Fig. 14. Die Schienen a, b von hinlänglicher Stärke sind an Quadersteine befestigt und halten durch die kleinen Quereisen o, o die Bahnschiene c in der gehörigen Entfernung, so zwar, dass die lichte Oeffnung zwischen der Bahnschiene c und den Schienen a, b immer ¾ Zoll beträgt. Auf diese Art kann also

Fig. 13 und 14.

Fig. 13 und 14. Tab. 31. aller Strassenkoth in jenen Strecken, wo das Gewölbe Fig. 14 oben offen ist, sogleich in den unterirdischen Kanal fallen. In jenen Strecken aber, wo dieser Kanal geschlossen ist, befindet sich auf der Mitte des Gewölbes ein *pedestal*, welches die Bahnschiene und die Schienen a, b aufnimmt; der Falz für den Spurkranz ist hier auch vorhanden, und da der letztere die Unreinigkeiten auf 18 Zoll Weite leicht fortschieben und bis zur nächsten Oeffnung des Gewölbes bringen kann, so erhellet, dass durch diese Einrichtung das Reinigen der Falze beinahe ganz beseitigt wird.

§. 556.

Wo eine Eisenbahn entlängst einem Flusse oder einem Abladeplatze läuft, werden häufig mehrere kurze Nebenbahnen unter rechten Winkel mit der Hauptbahn angelegt. Fig. 7 u. 8. Tab. 32. In diesem Falle sind in dem Durchschnittspunkte der Hauptbahn mit der Nebenbahn Drehscheiben angebracht, deren Konstrucktion aus Fig. 7 und 8 ersichtlich ist. Dieselben bestehen nämlich aus einer hölzernen hinlänglich festen Scheibe, die auf dem gusseisernen Zapfen o im Mittelpunkte hängt und auf vier Rollen läuft. Diese Rollen sind in gusseisernen Lagern M, N, O, P an der hölzernen Scheibe befestigt uud laufen auf einer kreisrunden mit einem eisernen Ringe beschlagenen Bahn m, n, wodurch nun die ganze Scheibe sammt dem auf derselben befindlichen Eisenbahnwagen ohne bedeutenden Kraftaufwand um einen Winkel von 90 Grad gedreht und daher der Wagen aus der Bahn A A′ B B′ in jene C C′ D D′ geführt werden kann. Damit die Drehscheibe genau einen Winkel von 90 Grad beschreibe, sind bei a und b eiserne Hacken angebracht, welche die weitere Bewegung der Drehscheibe über 90 Grad hinaus verhindern; zur grössern Sicherheit kann man noch einen an der Drehscheibe befestigten Hacken in den Ring bei c oder d einhängen, welches dann geschieht, wenn durch längere Zeit über die Drehscheibe gefahren wird, ohne ihre Richtung zu ändern. Die übrige Konstruktion der Drehscheibe ist aus Fig. 7 und 8 zu ersehen.

An dem Ende der kurzen Bahnen, welche von den Drehscheiben auslaufen, sind gewöhnlich eigene Maschinerien angebracht, wodurch das leichte Ausstürzen oder Ausladen der Wägen in Schiffe oder in Stazionsplätzen bewirkt wird. Die Beschreibung dieser Maschinerien wird im 3ten Bande dieses Werkes folgen.

§. 557.

Alle Wägen, welche auf den englischen Eisenbahnen gebraucht werden, haben gusseiserne Räder, die überall auf schmiedeisernen Achsen festgekeilt sind. Es bewegt sich daher immer eine Achse gemeinschaftlich mit zwei Rädern in den Lagern oder Achsenpfannen. Die Durchmesser der Räder haben bei den verschiedenen Bahnen auch verschiedene Grössen; gewöhnlich beträgt der Durchmesser 28, 30 bis 32 Zoll. Die Zeichnung eines solchen Wagenrades enthält Fig. 9 und 10, den Durchschnitt des Radkranzes im 4 mal grössern Maasstabe Fig. 12, und die Darstellung der gewöhnlichen Art Fig. 9 und 10. Lager Fig. 13 und 14. Man ersieht hieraus, dass der Durchmesser des Rades c c′ = 30 Zoll, e e′ = 29½ Zoll, demnach die Verjüngung zu jeder Seite d e = ¼ Zoll auf die Breite c d = 3 Zoll sey. Die Höhe des hervorstehenden Randes ist b c = 1¼ Zoll und die ganze Breite des Randes von d i bis zur entgegengesetzten Ausbauchung unter a gerade 4 Zoll.

Die Nabe dieses Rades misst mit Einrechnung der hieran befestigten Ringe 6 Zoll im Durchmesser und eben so viel in der Länge. Diese Nabe bildet jedoch im Gusse keinen massiven Körper, sondern sie wird bei ihrer Formung in Sand durch die Schnitte m, n, p in drei Theile getheilt, damit das Eisen bei dem Abkühlen sich gehörig zusammenziehen könne, und keine Spannung in den Speichen und dem Radkranze übrig bleibe. Diese Methode ist für die Dauer der Räder sehr wichtig, indem jene Räder, wobei der Rand, die Speichen und die Nabe ein Ganzes bilden, immer noch eine Spannung, die von der ungleichen Zusammenziehung des Eisens herrührt, behalten und nach dem Gusse oder bei dem nachherigen Gebrauche sehr leicht zerspringen. Fig. 9 und 10. Tab. 32.

Da man gefunden hat, dass die auf gewöhnliche Art in Sandformen gegossenen Räder an der Oberfläche a c e und vorzüglich in dem Ecke bei c sich sehr bald ausschleifen, so werden seit mehreren Jahren die Oberflächen aller Räder mittelst eines sogenannten Schalengusses erzeugt, und diese Räder *case hardened wheels* (*roues, dont la gorge est trempée*) genannt. Man legt nämlich in die Sandform einen nach der Krümmung a c e genau ausgedrehten, mehrere Zoll dicken gusseisernen Ring ein, und bestreicht denselben mit Oehl; das flüssige Gusseisen erstarrt an diesem kalten mit Oehl bestrichenen Ringe sehr schnell, erhärtet an seiner Oberfläche und bildet unter derselben ein krystallinisches oder strahliges Gefüge, wodurch die Oberfläche so sehr gehärtet wird, dass itzt die Räder mehrere Jahre dauern, während sie bei gewöhnlichem Sandgusse, vorzüglich in gekrümmten Bahnen nur einige Monathe zu brauchen waren. Je dicker die Schale ist, desto tiefer geht in der Regel das strahlige Gefüge von der Oberfläche in das Eisen; die gewöhnlichen Schalen in England haben nur 2 Zoll Dicke; für die zur Budweiser Eisenbahn in Böhmen gegossenen Räder wurden jedoch die Schalen 5 bis 6 Zoll dick angewendet, und bewirkt, dass das strahlige Gefüge von der Oberfläche c e bis an die entgegengesetzte Oberfläche bei i ging. Fig. 12. Dass eine solche Schale wegen ihres bedeutenden Gewichtes in den Giessereien mit Kranichen regiert werden muss, versteht sich von selbst.

Das gegossene Rad wird aus der Form gehoben, vom Sande gereinigt, in die Schnitte m, n, p schmiedeiserne Keile eingelegt, und nun zu jeder Seite der Nabe die schmiedeisernen Ringe g g′ und f f′ glühheiss angetrieben; diese ziehen bei ihrem Abkühlen die Nabe zusammen und geben ihr wieder vollkommene Festigkeit. Hierauf wird das Rad in ein vertikales Bohrwerk zwischen 3 gusseiserne Säulen gestellt, mit Stellschrauben unter die Mitte des Bohreisens gerichtet, und nun die 2 bis $2\frac{1}{2}$ zöllige Oeffnung für die Achse in der Nabe ausgebohrt. Diese Oeffnung befindet sich daher genau im Centrum der 3 Punkte der Oberfläche, nach welchen das Rad bei dem Bohren gestellt wurde. Die schmiedeiserne Achse, welche zu jeder Seite 12 Zoll = h i weit auf den gehörigen Durchmesser abgedreht wurde, wird nun in die gebohrte Oeffnung der Nabe eingesetzt, und hierauf die Oeffnung o von 6 bis 8 Linien im Durchmesser zur Hälfte in die Achse und zur Hälfte in die Nabe gebohrt, mit einem schmiedeisernen Stifte vernagelt, und so die Achse mit der Nabe fest verbunden. Dass bei dieser Einrichtung die Achse senkrecht auf der Fläche des Rades stehe, erhellet daraus, weil die Oeffnung in der Nabe vollkommen winkelrecht auf die Fläche des Rades gebohrt wird. Diese Verfertigungsart wird gegenwärtig als die

beste angesehen; minder zweckmässig hält man die Konstruktion Fig. 1, Tab. 33, wobei die Nabe in 2 Theile getheilt, und die Oeffnung für die Achse viereckig ist.

Fig. 1 u 4 Tab. 33. Die 12 Speichen, aus welchen alle englischen Bahnräder bestehen, sind theils gerade wie Fig. 4, theils auch in krummer Richtung gegossen, wie Fig. 1. Man hat in der letztern Zeit beobachtet, dass die Räder, welche im gebremsten Zustande mit grosser Schnelligkeit über schiefe Flächen herab gehen, und sich hiebei sehr erhitzen, bei geraden Speichen weit leichter springen, als bei gekrümmten, ohne Zweifel, weil im letztern Falle die durch die Hitze bewirkte Ausdehnung des Radreifens und der anstossenden Speichenstücke weit leichter im Rade vor sich gehen kann, als wenn die Speichen senkrecht auf die Peripherie stehen.

§. 558.

Der obigen Beschreibung zu Folge sitzen alle Räder bei den englischen Eisenbahnen auf den Achsen fest, und man ist hierin so weit gegangen, dass alle Wägen, deren Räder früher um die Achse beweglich waren z. B. bei der *Mansfield* und *Pinxton* Eisenbahn vernagelt wurden; es laufen daher alle Achsen in den an dem Wagengestelle befestigten Achsenpfannen oder Lagern (*bearers*) herum. Die Konstruktion der letztern ist wieder sehr verschieden. Die gewöhnliche Gattung dieser Lager ist Fig. 13 und 14. Tab. 32. Fig. 13 und 14 dargestellt. Dieselben bestehen aus einer halben Pfanne von Gusseisen, welche über den Achsen liegt und aus zwei Laschen von Schmiedeisen, die durch das Wagengestelle gehen, oben mit Schrauben befestigt sind, am untern Ende aber mit einen Bolzen verbunden werden, damit die Achse bei zufälligen Stössen oder wenn der Kasten des Wagens gehoben wird, nicht aus der Pfanne herausfallen könne. Versuche haben gezeigt, dass die Reibung der Achsen in einer gusseisernen Pfanne geringer sey, als in einer messingenen oder schmiedeisernen, dass jedoch diese Pfannen, wie Fig. 13 wenigstens 4 Zoll lang seyn müssen, damit sich die Achsen nicht in selbe einschneiden. In der letztern Zeit hat man auch die Fläche der Pfanne, wo die Reibung mit der Achse statt findet, in die Schale gegossen, und man verminderte die Reibung noch weiter, indem man die schmiedeiserne bereits abgehärtete Achse an ihrer Oberfläche ebenfalls härtet. Die Manipulation hiebei ist folgende: Der 6 Zoll lange abgedrehte Theil der Achse, wo die Reibung in der Pfanne statt finden soll, wird in eine gusseiserne beiderseits offene hohle Röhre von 9 Zoll Länge, deren innerer Durchmesser um 1½ Zoll grösser als jener der Achse ist, gesteckt, das eine Ende dieser hohlen Röhre mit Lehm verschlossen und dann der Zwischenraum zwischen der Achse und der Röhre mit Stücken von altem Leder, Kuhhaaren und einer Quantität Salz gefüllt, hierauf das andere Ende der hohlen Röhre wieder mit Lehm geschlossen und nun die Achse mit der hohlen Röhre in ein heftiges durch fortwährende Luftzuströmung erhaltenes Kohlenfeuer gebracht, und darin beiläufig ½ Stunde gelassen. Man nimmt nun die Achse aus dem Feuer heraus, schlägt die hohle Röhre herab, und steckt die noch glühende Achse in kaltes Wasser. Man findet die Achse, wenn sie abgekühlt ist, stahlartig angelaufen, und wenn der Arbeiter die nothwendige Uibung erlangt hat, um aus dem Grade des Feuers die Härte der Achse zu beurtheilen, so

wird dieselbe mit einem Feuer vollkommen gehärtet seyn. Ist diess nicht der Fall, so muss die Achse einer gleichen Manipulation neuerdings unterzogen werden.

Durch diese Härtung der Achsen und den Gebrauch gusseiserner, in Schalen gegossener Lager hat man in der letztern Zeit den Widerstand der Reibung bei den Bahnwägen ausserordentlich vermindert, und die Dauer der Lager und der Achsen bedeutend vermehrt. Man war nun auch bemüht, solche Lager zu konstruiren, bei welchen die Schmiere so wenig als möglich verloren geht. Die Achsen, welche in den Lagern Fig. 13 und 14 laufen, werden gewöhnlich von unten geschmiert, allein man sieht leicht, dass hiedurch Schmiere verloren geht, und bei bedeutenden Transporten auch viel Zeit zum Schmieren der Wägen erfordert wird. Um das erstere zu vermeiden, hat man in den letztern Jahren die Lager von unten mit Holz geschlossen, in welchem die Achse lief, und man hat von oben eine Oeffnung angebracht, wodurch die flüssige Schmiere auf die Achse zugeführt wurde, allein diese Lager, welche auch auf der Budweiser Bahn eingeführt wurden, haben noch nicht alle Forderungen erfüllt. Ein sehr vervollkommnetes Lager, (*seaphons bearer* genannt) welches im Jahre 1829 in England bei der *Manchester* und *Liverpool* Eisenbahn eingeführt wurde, ist Fig. 1 bis 4 und Fig. 5 in der Verbindung mit einem Wagenrade dargestellt. Der Grundriss Fig. 4 zeigt ein viereckiges Behältniss a b c d, welches im Längendurchschnitte Fig. 2 mit m n o p bezeichnet ist. Dieses fasst beiläufig 15 Kubikzoll Oehl, die zur Schmiere einer Achse für mehrere Tage hinreichen. In die Oeffnungen e, f von 4 Linien Durchmesser werden Baumwolldochte, die oben befestigt sind, eingelegt, und so viel zusammgedreht, dass sie gerade einen Tropfen in der bestimmten Zeit fallen lassen, um die Achse in dem gehörigen feuchten Zustande zu erhalten. Damit von vorn kein Staub in das Oehl dringe, wird ein Stück Leder i k (Fig. 5) über die Oeffnung gelegt, und bei i befestigt, so wie auch die angegossenen gekrümmten Deckel m m′ m″ und p p′ p″ (Fig. 2), welche zu beiden Seiten von dem Lager über die an der Achse vorhandenen Ringe A und B herabgehen, das Zutreten des Staubes von oben verhindern und dabei doch noch der Achse einen Spielraum in der Pfanne gewähren. Dass dieses Lager mit Schrauben, welche durch die Oeffnungen C und D gehen, an das Gerüste des Wagens E wie Fig. 13 und 14, Tab. 32 angeschraubt werden, leuchtet von selbst ein.

Fig. 1 bis 5. Tab. 30.

§. 559.

Die verschiedenen Gattungen Wägen, welche auf den englischen Eisenbahnen vorzüglich gebraucht werden, sind Tabelle 33 in einem Maasstabe, welcher den 24sten Theil ihrer natürlichen Grösse enthält, dargestellt. Da der Transport auf den Bahnen gewöhnlich mit Steinkohlen (*coals*) geschieht, so sind die Steinkohlenwägen daselbst am meisten im Gebrauche. Die Darstellung dieser Wägen, wie sie auf der *Darlington* Bahn gebraucht werden, enthält Fig. 1, 2 und 3, wobei zu bemerken, dass daselbst auch Räder mit geraden Speichen und dreimal getheilten Haufen vorkommen. Aus der Längenansicht Fig. 1 ersehen wir die Konstruktion der Bremse. Dieselbe besteht nämlich aus einem krumm gebogenen eisernen Hebel a b, der bei b in ein viereckigtes Holzstück b e eingesetzt ist, an dem die hölzernen Bremsstücke d und e angeschraubt sind. Dieser Hebel dreht sich um die eiserne Achse c und liegt gewöhnlich in dem Haken bei a; wird

Fig. 1 bis 3. Tab. 33.

Tab. 33. er daselbst herausgenommen und herabgedrückt, so werden beide Räder, und weil an einer Achse immer zwei Räder fest sind, hiedurch alle vier Räder in ihrer Bewegung gehemmt oder gesperrt. Bei f, f sieht man die Haken, welche entweder zum Einhängen der Pferdestränge, oder auch zum Einlegen der Verbindungsketten bei einem Wagenzuge dienen. Diese Haken sind Fig. 4 und Fig. 9 verschieden geformt. Aus Fig. 2 ersehen wir, dass der mittlere Theil n n′ der Achse achteckig und n m = n′ m′ = 8 Zoll rund abgedreht sey. Die Lager sind wie Fig. 13 und 14, Tab. 32 construirt und 4 Zoll lang, es bleibt demnach ein Spielraum von 4 Zoll übrig, innerhalb dessen die Lager und somit der ganze Kasten des Wagens auf den Achsen sich hin und her bewegen kann. Aus Erfahrung hat man diesen Spielraum sehr vortheilhaft gefunden, indem bei einer noch so sorgfältig gelegten Bahn immer Unebenheiten übrig bleiben, wodurch ein oder das andere Rad in seinem Laufe verrückt wird, oder einen Stoss erleidet. Sind nun die Lager auf den Achsen unbeweglich, so wird jeder Stoss, den das Rad und hiedurch die Achse erleidet, auch dem Kasten des Wagens mitgetheilt; es entsteht eine Seitenreibung und mit der Zeit wird die Zertrümmerung des Wagens vorzüglich bei schnellen Transporten herbeigeführt. Beobachtet man dagegen den Gang eines wie Fig 5 construirten Wagens von hinten, so sieht man, dass alle Stösse nur das Rad und die Achse treffen, und dass der Kasten des Wagens beständig in dem Spielraume von n m = n′ m′ (Fig. 2) sich etwas hin und her bewege. Um übrigens zu grossen Schwankungen und einer Seitenreibung der Lager an die Naben der Räder vorzubeugen, werden zwei bewegliche schmiedeiserne Ringe x, x′ (Fig 5 und 8) an dem Ende des abgedrehten Theiles der Achse angebracht und daher noch vor dem Befestigen der Achse an das Rad aufgesteckt. Das Lager kann nun bei seiner Bewegung auf der Achse nur bis zu diesen Ringen gelangen, und nicht an die Nabe des Rades anstossen. Fig. 3 enthält den Grundriss des Wagengestelles. Gewöhnlich ist bei diesen Steinkohlenwägen der Boden nach unten zum Oeffnen, um die Steinkohlen auszustürzen, wozu nun wieder verschiedene Mechanismen dienen. Fig. 2 Tab. 34 enthält eine solche Vorrichtung; diese besteht in dem Winkelhebel c b a′, der bei c befestigt, in b in einem Gewinde beweglich ist und an den Haken a dann eingehängt wird, wenn man die untere Thür schliessen will.

Zur Verführung der Erde und des Schotters während dem Baue der Bahn kann man mit besonderm Vortheile den Fig. 4 und 5 dargestellten Wagen mit doppeltem Kasten gebrauchen. Auf dem Gerüste A B werden zwei Schotterkästen f h n und f′ h′ n′ so befestigt, dass sie um die Achsen e′, e′ sich drehen und die Lage m n o p und m′ n′ o′ p′ annehmen können. Um diese Kästen in der horizontalen Lage zu erhalten, wird zu jeder Seite ein konischer eiserner Keil n n′ in die eiserne Stange g n eingeschoben, sodann die Kästen mit Erde oder Schotter gefüllt und an den Abladeort geführt. Dort werden zuerst die Seitenthüren f h, f′ h′, (oder a b e d, Fig. 4) welche bei h und h′ in Angeln gehen, durch Herausziehen der Stifte bei f und f′ (Fig. 4 bei a und d) geöffnet, wodurch sie in die senkrechte Lage überstürzen und ein Theil des Schotters zu jeder Seite der Bahn herausfällt. Nun wird der Vorsteckkeil n n′ zu beiden Seiten herausgeschlagen, die Kästen, welche etwas ausser dem Mittelpunkte in e′, e′ aufliegen, gehen durch ihr Uibergewicht in die Lage m n o p, m′ n′ o′ p′ und der Rest des Schotters fällt ohne weitere Beihülfe eines Arbeiters zu beiden Seiten über die Eisenbahn heraus. Um

zu verhindern, dass die schweren Kästen bei ihrem Umschlagen nicht auf die gusseiser- Tab.
nen Radkränze der Räder fallen, sind unter jedem Kasten zwei Ketten befestiget, welche 33.
Fig. 4 in der Linie i j k und i j k herabhängen, in Fig. 5 für einen Kasten mit r und für den andern mit r' bezeichnet sind. Bei dem Umstürzen des Wagens fängt sich der unterste Punkt j einer jeden Kette an dem Querholze A des Wagengerüstes, man kann daher durch eine angemessene Länge dieser Ketten das Auffallen der Schotterkästen auf die Gusseisenräder verhindern.

Ein zweiter Mechanismus zum Ausstürzen der Erde- oder Schotterwägen nach vorn Fig. 16
oder in die Mitte der Bahn ist Fig. 16 und 17 abgebildet. Der Kasten a d hängt an und 17.
der Kette a b und stürzt, so wie diese Kette ausgelöst und der Kasten bei a etwas ge- Tab.
hoben wird, um die Achse bei c um; hat man daher die Thüre des Wagens früher 34.
geöffnet, so fällt aller Schotter in die Bahn. Dieselbe Einrichtung mit einiger Abänderung erscheint Fig. 18. Hier sind m, n die Achsen der zwei Bahnräder, auf welchen Fig.
das Holzstück a c n m und hierauf der Schotterkasten ruht, der abermal mit einer Kette 18.
in der horizontalen Lage gehalten wird. Die Kästen dieser Wägen, welche von vorn ausstürzen (von den Franzosen *chariots à bascule* genannt), haben gewöhnlich nur 15 bis 20 Kub. Fuss Inhalt und die Durchmesser der Wagenräder messen nur 18 bis 20 Zoll, da die Wägen bloss während des Baues gebraucht, und gewöhnlich von Menschen bewegt werden.

Zum Ausschottern der Bahn bedient man sich eines W a g e n s m i t H e b e w i n d e, welcher auch auf den Landstrassen in England gebraucht wird und Fig. 8 und 9, Tab. 33 Fig. 8 u. 9.
dargestellt ist. Derselbe besteht aus einem um die Achse h beweglichen Schotterkasten, Tab.
dessen hintere Thüre m n geöffnet werden kann und der vorn mit einer Hebewinde in dem 33.
Maasse gehoben wird, als man mehr oder weniger Schotter an einem Orte ausstürzen will. Diese Winde besteht aus der gezähnten schmiedeisernen Stange c d, welche mittelst des Getriebes b durch Umdrehung der Kurbel a b bewegt wird.

Zum T r a n s p o r t e l a n g e r B a u h o l z s t ä m m e in krummen Bahnen werden auf der *Darlington*bahn die Wägen Fig. 6 und 7 angewendet. Diese bestehen aus einem Fig. 6 u. 7.
hinreichend starken Gerüste m n o p, dessen unterer Theil von Gusseisen, die Querschiene o p von Schmiedeisen und der obere Rahmen m n von Holz ist. Auf dem letztern bewegt sich ein starker Baum A B um die eiserne Spindel oder den Reihnagel a b, auf welchen die Bauholzstämme dergestalt gelegt werden, dass das eine Ende derselben auf dem Baume A B e i n e s W a g e n s, das andere Ende aber auf gleiche Weise auf einem z w e i t e n Wagen aufliegt. Am Ende der Balken A B sind starke eiserne Ringe angebracht, an welche die Bauholzstämme mit Ketten oder Seilen befestigt werden. Es erhellet von selbst, dass durch eine Verbindung zweier solcher vierrädriger Wägen die Bauholzstämme ohne weitere Leitung in allen Krümmungen geführt werden können, indem die beweglichen Balken A B immer winkelrecht auf den darauf liegenden Bauholzstämmen stehen, die Wägen aber sich nach den Krümmungen der Bahn drehen. In Fig. 7 sehen wir noch eine auf der *Darlington*bahn versuchte Einrichtung. Die schmiedeiserne Achse steckt nämlich in einer zu beiden Seiten geschlossenen gusseisernen Hülse, deren innerer Durchmesser beiläufig 1½ Linien grösser, als der Durchmesser der Achse ist. Durch die Oeffnungen d, c, f wird nun Oehl eingegossen und der ganze Raum zwischen der Achse und Hülse gefüllt. Da nun das Gerüste

des Wagens auf der Hülse befestigt ist, so erwartete man, dass die Stösse, welche bei den Zusammenfügungen der Schienen oder durch Steine an die Räder und Achsen verursacht werden, durch das flüssige jedoch zähe Oehl, welches die Achse umgibt, vermindert, und nur in einem geringern Grade der Hülse und dadurch dem Gestelle des Wagens mitgetheilt werden. Der Zweck dieser Einrichtung war die Erreichung derselben Vortheile, welche die Federn gewähren, deren Gebrauch aber in England mit einer Taxe belegt ist.

§. 560.

Da unserer bisherigen Beschreibung zufolge bei den englischen Bahnen immer zwei Räder an einer Achse fest sind, und sich gemeinschaftlich mit derselben bewegen, so muss nothwendig der Widerstand der Reibung an den Bahnschienen in Krümmungen bedeutend werden, indem die Räder in der äussern Bahn einen grössern Raum, jene in der innern Bahn aber einen kleinern Raum in derselben Zeit zurückzulegen haben, demnach nebst der rollenden Bewegung ein ähnliches Schleifen auf der Bahn entstehen muss, wie wir es bereits §. 543 bei den konischen Rädern gezeigt haben. Um diese Reibung, so weit es möglich ist, zu verhindern, sind folgende Einrichtungen bei den englischen Eisenbahnen vorhanden: 1tens der Kranz des Rades ist wie Fig. 12, Tab. 32 konisch geformt und die Schienen wie Fig. 1 und 11 an ihrer Oberfläche abgerundet, demnach läuft der harte Radkranz eigentlich nur mit einer sehr schmalen Fläche auf den Schienen und kann daher sehr leicht von denselben herabgleiten oder hinaufgehen. Da die Verjüngung der Räder auf 30 Zoll Höhe gewöhnlich $\frac{1}{2}$ Zoll beträgt, so wollen wir Beispiels halber nur annehmen, dass das Rad in der innern Bahn auf dem Durchmesser $29\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 29\frac{5}{8}$ Zoll und jenes in der äussern Bahn auf einem um $\frac{1}{4}$ Zoll grössern Durchmesser oder mit $29\frac{7}{8}$ Zoll sich forbewege. Demnach werden sich die Durchmesser wie 237 : 239 verhalten und in diesem Verhältnisse können auch die Halbmesser der krummen Bahnen stehen. Nennen wir den Halbmesser der innern Bahn x und setzen die Geleiseweite $= 4{,}5$ Fuss, so haben wir $x : x + 4{,}5 = 237 : 239$, woraus $x = 533{,}25$ Fuss folgt. Für diesen Krümmungshalbmesser wird daher wegen der angenommenen konischen Gestalt der Räder keine besondere Reibung auf der Bahn entstehen. 2tens Um das Abgleiten der Wägen von der äussern Bahn in die innere bei Bewegung in Krümmungen möglichst zu erleichtern, werden die Schienen an der Aussenseite der Krümmungen immer höher als an der innern Seite gelegt. Diese Erhöhung beträgt bei den schärfsten Krümmungen, deren Halbmesser beiläufig 40 Klafter ist, für die Geleiseweite von 4,5 Fuss vier bis fünf Zoll. Der Wagen befindet sich daher in jeder Krümmung in einer geneigten Lage und begegnet dadurch der Wirkung der Schwungkraft, welche ihn vorzüglich bei grossen Geschwindigkeiten auswärts treiben oder vom Mittelpunkte der Krümmung entfernen würde. 3tens Um das Wenden der Wägen in den Krümmungen zu erleichtern, beträgt die Entfernung der Radachsen bei den englischen Bahnwägen gewöhnlich nur 3 Fuss 3 Zoll, während die Geleiseweite im Lichten der Schienen 4 Fuss 6 Zoll misst; es kann also eine Verrückung des Wagens innerhalb der Bahn mit vieler Leichtigkeit geschehen, wogegen diess bei jedem andern Wagen, dessen Geleiseweite kleiner als die Entfernung der Radachsen ist, nicht ohne bedeutenden Kraftaufwand verrichtet werden kann. Alle englischen Bahnwägen sind in dieser Hinsicht sehr kurz, und wenden sich daher leicht bei dem daselbst vorhandenen Verhältnisse der Geleiseweite.

Fig. 1, 11 und 12. Tab. 32.

Ungeachtet dieser Einrichtungen ist doch der Druck der Räder auf die Eisenbahnschienen besonders in scharfen Krümmungen so bedeutend, dass dieselben zuweilen aus ihrer Lage gerückt werden, die Geleiseweite verloren geht, und die Räder zwischen die Schienen in die Bahn fallen. Aus dieser Ursache werden vorzüglich auf den neu hergestellten Dämmen, die noch Senkungen unterliegen, die *pedestals* der Schienen nicht auf Steinblöcke, sondern auf Querhölzer (*thorough sleepers*), die beide Schienenreihen verbinden, gelegt. So liegen die Schienen auf allen Dämmen der *Liverpool*bahn; so ist auch ein Theil der Schienen der *Darlington*bahn auf Querhölzern von alten Seeschiffen aufgelegt, und man sieht, dass eine auf hölzernen Querriegeln ruhende Bahn, wie es bei der Budweiser Holz- und Eisenbahn der Fall ist, hinsichtlich der Geleiseweite den Vorzug vor einer jeden auf Steinblöcken ruhenden Bahn besitze. Man hat inzwischen auf mehreren *Tramroads* eiserne Bahnschliessen Fig. 8, Tab. 34 zu gleichem Zwecke angebracht.

§. 561.

Man hat nicht mit Unrecht den englischen Bahnen vorgeworfen, dass die Bahnwägen gewöhnlich die Hälfte des Gewichtes der Ladung und auch mehr betragen, und dass überhaupt der Druck, welchen das Gewicht der Wägen sammt Ladung verursacht, bei der eingeführten schnellen Fracht eine bedeutende Zerrüttung der Bahn und häufige Reparaturen herbeiführe. Dieser Vorwurf konnte allerdings den Wägen auf den ältern Bahnen gemacht werden; allein in den letztern Jahren war man auch in dieser Hinsicht bemüht, bedeutende Verbesserungen einzuführen. Die vorzüglichsten Wägen haben sich im Jahre 1829 auf den Eisenbahnen in der Nähe von *Glasgow* vorgefunden; das Gewicht eines Wagens betrug nämlich

1tens	Vier Räder von 30 Zoll Durchmesser zu 2 Zentner . . .	8 Zentner.
2tens	Zwei Achsen zu 1 Zentner und 4 Lager zu ¼ Zentner . . .	3 „
3tens	Eisenbeschläge 4 Zentner und Holztheile 5 Zentner . . .	9 „
	Gesammtgewicht eines *Chaldron*wagens	20 Zentner.

Andere Wägen mit blechernen Kästen wogen nur 19 Zentner, kosteten jedoch 20 *Liv. st.* wogegen die obigen Wägen mit hölzernen Kästen bloss 15 *Liv. st.* kosteten. Ein jeder dieser Wägen wird mit 2¾ Tonnen oder mit 55 Zentner beladen, das Gewicht des Wagens ist daher beiläufig nur der dritte Theil von dem Gewichte der Ladung.

Auf der *Brunton* und *Schields* Eisenbahn, wo nur *half chaldron Waggons*, d. h. Wägen mit 26½ Ztr. Kohlenladung vorhanden sind, ist das Gewicht eines Wagens

1tens	Vier Räder von 30 Zoll Durchmesser zu 1¼ Ztr. .	5 Ztr.	0 Vtl. Ztr.	0 ℔.
2tens	Zwei schmiedeiserne Achsen von 2⅞ Zoll Durchmesser	1 —	0 —	2 —
3tens	Vier Gusseisenlager	0 —	1 —	15 —
4tens	Holztheile an dem Wagen	5 —	0 —	18 —
5tens	Beschläge von Eisen	1 —	1 —	8 —
	Gesammtgewicht eines halben *Chaldron*wagens	12 —	3 —	15 —

Nebst der Verminderung des Gewichtes und der sorgfältigern Bauart der Wägen hat man in den letztern Jahren in England noch die Einrichtung getroffen, dass ein grosser Theil der Wägen von Privaten, welche die Bahnen befahren, beigeschafft, und der Unternehmungsgesellschaft für die Benützung der Eisenbahn nur ein bestimmter Zoll gezahlt

wird. So hatte die *Darlington* Eisenbahngesellschaft, welche anfangs die Fracht nur in eigener Regie betrieb, im Oktober 1829 nur mehr 350 eigene Wägen, während 526 Wägen andern Privaten gehörten. Mehrere Eigenthümer von Eisenwerken verstanden sich darauf, die Wägen herzuleihen, und nebstbei alle Reparaturen (muthwillige Beschädigungen abgerechnet) an denselben vorzunehmen, beides gegen eine Entrichtung von $\frac{1}{8}$ *pence* für jede Tonne, die eine engl. Meile weit mit diesen Wägen geführt wird. Diess gibt 0,081 kr. C. M. für den N. Oe. Ztr. eine N. Oe. Meile weit als Betrag für die Anschaffung und die Reparatur des Wagens, und da auch bei andern englischen Eisenbahnen ähnliche Preise bestanden, so kann man diesen Betrag von $\frac{1}{8}$ *pence* als durch die Erfahrung bewährt annehmen.

§. 562.

Die Schmiere der Wägen wird auf verschiedene Art in England bereitet, und gegenwärtig liefern die meisten Kontrahenten, welche für den Transport auf der Bahn nach der Tonne und Meile gezahlt werden, die Schmiere selbst. Auf der *Darlington* Bahn hat man folgende Bereitungsart der Schmiere für Bahnwägen als vorzüglich gut angegeben: In einem Gefässe wird 1 ℔ russischer Talg bis zur Südhitze erwärmt, das Gefäss vom Feuer weggenommen, $2\frac{1}{2}$ ℔ Fischthran hineingegossen, gut umgerührt, sodann $\frac{1}{4}$ ℔ Theer hineingegeben und abermal gut umgerührt. Mit dieser Masse werden die beladenen Wägen alle 4 engl. Meilen einmal geschmiert, und die leeren Wägen auf gleicher Entfernung, jedoch nur mit $\frac{1}{4}$ des Schmierquantums, welches die beladenen fordern.

Auf der *Wide open* Eisenbahn braucht man 2erlei Schmiere im Sommer und Winter. Zur Schmiere im Sommer nimmt man 3 *gallons* oder $22\frac{1}{2}$ ℔ grönländischen Fischthran und mischt ihn mit 33 ℔ russischem Talg; die Masse wird auf einem schwachen Feuer bloss geschmolzen, ohne in Südhitze zu kommen, und dann in ein Gefäss gegossen. Zur Schmiere im Winter werden 4 *gallons* oder 30 ℔ Fischthran mit 26 ℔ russischem Talg geschmolzen; diese Schmiere ist daher flüssiger als die erste, und hat die Consistenz wie beiläufig unser Schmalz. Für jede Achse wird bei dem Einschmieren ein Stückchen von der Grösse zweier Erbsen auf ein langes Holz genommen, und damit die Achse von unten bestrichen. Im Jahre 1828 wurden 29079 Tonnen von den Kohlengruben in *Fawdon* und 22414 Tonnen von den Gruben in *Wide open*, zusammen also 51493 Tonnen über die $9\frac{3}{4}$ engl. Meilen lange Bahn geführt und die Beischaffung der Schmiere für alle zu diesem Transporte verwendete Wägen kostete 51 *Liv. st.* 8 *sh.* Die Redukzion gibt als Kosten der Schmiere für einen N. Oe. Ztr. eine N. Oe. Meile weit zu führen 0,016 kr. C. M.

§. 563.

Ein grosser Theil der Transporte auf den englischen *Railroads* geschieht mit Pferden, wir haben daher die wichtige Frage über die Leistung der Pferde auf diesen Bahnen und die Frachtkosten bei dem Gebrauche der Pferdekraft zu beantworten. Es leuchtet von selbst ein, dass die Leistung gleich starker Pferde nebst der Steigung oder dem Gefälle der Bahn vorzüglich auch von dem Zustande der Bahnschienen, ob sie hinreichend stark sind, oder sich unter der Last biegen und wie genau sie gelegt sind, dann aber auch von der Konstruktion und dem Gewichte der Wägen abhängt. Sind die Wägen schwer, nicht mit der hinreichenden Sorgfalt gebaut, oder haben sie allzustarke Achsen, so wird in jedem solchen Falle die Ladung verringert.

In dieser Hinsicht findet man bei den neuesten englischen Bahnen einen ausserordentlichen Unterschied gegen die alten Bahnen, indem ein Pferd dermal wohl die doppelte Ladung fortzieht, welche noch vor 10 Jahren von einem Pferde fortgeschafft wurde. Folgende Erfahrung kann hier als ein vorzüglicher Anhaltspunkt dienen. Auf der *Darlington*eisenbahn beträgt die Länge der Hauptlinie von dem Fusse der schiefen Fläche bei *Brusselton* bis *Stockton* 33653 *yards* oder 97345 N. Oe. Fuss und das Gefäll für dieselbe Länge 395,2 engl., oder 381,1 N. Oe. Fuss. Der mittlere Fall ist daher $\frac{2}{511}$. Auf dieser Strecke sind mehrere hundert tausend Tonnen Steinkohlen, Kalk und andere Frachtstücke bereits mit Pferden transportirt worden, man kann daher die hierüber gemachte Erfahrung als hinlänglich bewährt ansehen. Die Fuhrleute spannen hier ein Pferd mehreren Wägen vor, und zwar werden gewöhnlich 11 Tonnen Kohlen in vier Wägen, deren jeder $\frac{5}{4}$ Tonnen wiegt, geladen und der obige Weg von 19,12 engl. Meilen mit dieser Ladung in einer Woche fünfmal bergab zurückgelegt und eben so oft die leeren Wägen bergauf zurückgeführt. Da diese Fuhrleute $\frac{1}{2}$ *pence* für die Tonne und die Meile erhalten, und die obige Entfernung mit 20 engl. Meilen berechnet wird, so ist der wochentliche Verdienst für ein Pferd und den zugehörigen Begleiter $= 11 . 20 . \frac{1}{2} . 5 = 550$ *pence*, demnach der tägliche Verdienst $= 550\,d . \frac{1}{7} = 6$ sh. $6\frac{4}{7}$ d. Manchmal legen jedoch die Fuhrleute diese Strecke 6mal der Woche zurück, nehmen aber jedesmal nur 9 Tonnen Ladung, demnach ist der wochentliche Verdienst $= 9 . 20 . \frac{1}{2} . 6 = 540\,d$ und der tägliche Verdienst $= 540\,d . \frac{1}{7} = 6$ sh. $5\frac{1}{7}$ d. oder beinahe dasselbe.

In Hinsicht auf die Grösse des Widerstandes, welcher auf dieser Bahn statt findet, ist zu bemerken, dass die Wägen in allen jenen Strecken von selbst herablaufen, wo das Gefäll zur Länge sich wie 1 zu 160 verhält. Der Herausgeber dieses Werkes hat zur Verification dieser Angabe die ganze Bahnstrecke von *Darlington* bis *Stockton* im Februar 1827 selbst nivellirt, und gefunden, dass die Länge dieser Strecke 982,43 *chains* (zu 66 Fuss) und das ganze Gefäll 167,425 Fuss, demnach das mittlere Gefäll $\frac{1}{387}$ betrage. Da dieses Resultat mit den Angaben, welche von den Ingenieurs der Bahn gemacht wurden, sehr nahe übereinstimmte, so fand man es für überflüssig, die weitere Nivellirung von *Darlington* bis zum Fusse der schiefen Fläche bei *Brusselton* vorzunehmen. In den letzten Jahren hat man bei der *Darlington* Eisenbahn die Einrichtung getroffen, dass hinter jedem Zuge von 4 Wägen ein niedriger zweirädriger Bahnkarren (*Frame*) angehängt wird. Das Pferd wird dort ausgespannt, wo das Gefäll 1 : 160 oder mehr beträgt, und in den angehängten hinten offenen Karren hineingeführt, in welchem es mit den beladenen Kohlenwägen nunmehr herabfährt; wie diese Wägen stehen bleiben und wegen des geringern Falles der Bahn nicht mehr weiter können, wird das Pferd aus dem hintern Karren herausgeführt und vorn wieder eingespannt. Die Pferde sind durch die lange Gewohnheit bereits so abgerichtet, dass sie bei den betreffenden Strecken, wo die Wägen selbst zu laufen anfangen, still stehen und wie sie ausgespannt sind, selbst zurück gehen, in den hintern Wagen hinein springen und mit sichtbarer Zufriedenheit eine Strecke im Wagen zurücklegen; wie aber die Wägen stehen bleiben, steigen die Pferde wieder selbst heraus und kehren an ihren ursprünglichen Bestimmungsort zurück. Die Unternehmer der *Darlington* Eisenbahn, welche

meistens Quäcker sind, rühmen sich, die ersten gewesen zu seyn, welche dem Pferde neben seiner Arbeit des Ziehens der Wägen auch die Erholung des Fahrens im Wagen verschafft haben.

Wir können daher den Widerstandscoeffizienten $m = \frac{1}{160}$ setzen. Die Ladung beträgt im Bergabfahren, wenn fünf Fahrten in einer Woche gemacht werden $Q = 11$ Tonnen, wozu 4 Wägen mit $W = 5$ Tonnen kommen. Die tägliche Arbeitszeit, welche die Pferde zum wirklichen Zuge verwenden, beträgt $z = 9$ Stunden, und die mittlere Kraft der Pferde, welche auf dieser Bahn gehen, kann mit $k = 125$ N. Oe. ℔ angeschlagen werden; wir erhalten daher für die Fahrt von *Brusselton* bis *Stockton* $125\left(2-\frac{v}{4}\right)\left(2-\frac{9}{8}\right) = 16.1814\left(\frac{1}{160}-\frac{2}{511}\right)$, woraus $v = 5{,}52$ folgt. Für die leere Rückfahrt ist $125\left(2-\frac{v'}{4}\right)\left(2-\frac{9}{8}\right) = 5.1814\left(\frac{1}{160}+\frac{2}{511}\right)$, woraus $v' = 4{,}63$ folgt; die Pferde brauchen daher mehr Zeit zur Rückfahrt, oder sie müssen sich mehr anstrengen, wenn sie in derselben Zeit die leeren Wägen zurück bringen sollen, in welcher sie mit den beladenen Wägen herabgingen. Diess hat die Erfahrung auf der *Darlington*bahn auch gezeigt. Berechnet man für die gefundenen Werthe von v und v' die Zeit, welche auf der 97345 Fuss langen Bahn für 5 Hin- und Rückfahrten benöthigt wird, so gibt diess $53{,}69$ Stunden, welches mit den angenommenen 54 Stunden sehr nahe übereinstimmt. Werden dagegen 6 Fahrten in einer Woche mit 9 Tonnen Ladung und 5 Tonnen Gewicht der Wägen angenommen, so folgt durch eine gleiche Rechnung $v = 5{,}83$ und $v' = 4{,}63$ Fuss; auf gleiche Weise findet man die Zeit, welche zu den 6 Hin- und Rückfahrten verwendet wird $= 62{,}37$ Stunden, die Pferde müssen daher täglich entweder $10\frac{1}{2}$ Stunden in der Arbeit bleiben, oder sich mehr anstrengen. Auch diess hat die Erfahrung auf der *Darlington*bahn vollkommen bestättigt.

Nehmen wir nun eine horizontale Eisenbahn, Pferde von mittlerer Stärke, m abermal $= \frac{1}{160}$ und das Gewicht der Wägen $W = \frac{Q}{3}$ an, so erhalten wir $100\left(2-\frac{v}{4}\right)\left(2-\frac{z}{8}\right) = \left(Q+\frac{Q}{3}\right)\frac{1}{160}$, da aber zur vortheilhaftesten Verwendung der Pferdekraft erfordert wird, dass $v = c$ und $z = t$ sey, so haben wir $100 = \left(Q+\frac{Q}{3}\right)\frac{1}{160}$, woraus $Q = 12000$ ℔ folgt. Ein Pferd von mittelmässiger Stärke kann daher auf gleichen Schienen wie bei der *Darlington*bahn und mit Wägen von gleicher Konstruktion eine Ladung von 120 N. Oe. Ztr. nebst 40 Ztr. Gewicht an Wägen fortbringen und damit täglich einen Weg von 19200 Klaftern oder $4{,}8$ N. Oe. Meilen zurücklegen.

Wo die Schienen stärker sind, demnach sich weniger biegen, und auch besser zusammmengefügt sind, als es auf der *Darlington*eisenbahn bei dem Gebrauche der mit grosser Schnelligkeit fahrenden Dampfwägen der Fall ist, kann auch ein Pferd weit mehr fortbringen. *Wood* nimmt in seinem Werke: *A practical treatise on Railroads and interior communication in general; London* 1825 an, dass der Widerstand der Schienen nur $\frac{1}{200}$ betrage, und dass ein Pferd auf einer horizontalen Bahn 200 engl.

Zentner (Ladung und Wägen) täglich 20 engl. Meilen weit führen könne. Rechnet man hier 66⅔ engl. Ztr. für die Wägen ab, und schlägt die Unterhaltungskosten eines Pferdes sammt Begleiter zu 5 *sh.* oder 2 fl. 30 kr. C. M. an, wie es in England im Durchschnitte statt findet, so ergeben sich die Frachtkosten eines N. Oe. Zentners die N. Oe. Meile weit mit 0,293 kr. C. M. Werden hiezu die S. 616 nachgewiesenen Kosten für die Abnützung der Wägen mit 0,081 kr. und für die Schmiere mit 0,016 kr. gerechnet, so ergeben sich die Frachtkosten eines N. Oe. Zentners, die N. Oe. Meile weit zu führen mit 0,390 kr. C. M.

Tredgold nimmt in dem Werke: *A practical treatise on Rail-Roads and carriages, shewing the principles of estimating their strength, proportions, expense and the conditions, which render them effective, economical and durable, with the theory, effect and expense of steam carriages, stationary engines and gas machines, London* 1825, die täglichen Kosten des Pferdes sammt Begleiter zu 2½ *sh.* an und berechnet die Kosten für die Pferdekraft auf einer horizontalen Eisenbahn für die Tonne und die engl. Meile zu 2,0 *farthings*, die Anschaffungs- und Reparaturskosten des Wagens mit 0,4 *f.* zusammen also mit 2,4 *farthings* oder 0,6 *pence*. Diess beträgt reducirt für den N. Oe. Zentner und die N. Oe. Meile abermal 0,390 kr. C. M.

Wenn wir jedoch für Deutschland die Kosten eines Pferdes sammt Begleiter täglich mit 1 fl. 30 kr. C. M. anschlagen und eine Bahn und Wägen von gleicher Konstrukzion wie jene in *Darlington* annehmen, so entfallen bei der berechneten Ladung von 133⅓ engl. oder 121 N. Oe. Ztr., welche von einem Pferde täglich 20 engl. oder 4,2 N. Oe. Meilen weit geführt werden, die Frachtkosten für den Zentner und die Meile mit 0,177 kr. Wird hiezu zur grössern Sicherheit der für die engl. Eisenbahnen berechnete Betrag für die Abnützung des Wagens mit 0,081 kr. und für die Schmiere mit 0,016 kr. angeschlagen, so ergibt sich der Gesammtbetrag der Frachtkosten auf einer horizontalen Bahn für einen N. Oe. Zentner die N. Oe. Meile weit mit 0,274 oder mit ein Viertel kr. C. M. Dieser Betrag ist der zehnte Theil von 2½ kr. C. M., welche auf unsern Landstrassen (Chauseen) gewöhnlich für den Zentner und die Meile gezahlt werden.

Um nun die Frachtkosten auf einer zu erbauenden Eisenbahn anzuschlagen, müssen noch die Zinsen und allenfalls der Tilgungsfond des Baukapitals und die jährlichen Unterhaltungs- und Regiekosten der Bahn hinzugerechnet werden. Hierüber lassen sich keineswegs bestimmte Summen anschlagen. In England rechnet man die Baukosten einer engl. Meile einfacher Eisenbahn, wenn keine besondere Schwierigkeiten des Terrains vorhanden sind, auf 1000 *Liv. st.* demnach die deutsche Meile auf beiläufig 5000 *Liv. st.* und eine Meile doppelter Bahn auf 10000 *Liv. st.* Inzwischen kostet die von *Manchester* nach *Liverpool* erbaute doppelte Bahn von 30¼ engl. Meilen Länge sammt Grundeinlösung, Gebäuden und allem Zugehör eine Million *Liv. st.*; es kommt daher die deutsche Meile auf beiläufig 160000 *Liv. st.* Die *Darlington*-Bahn, welche grösstentheils einfach angelegt ist, wird, wenn sie ganz ausgeführt ist, eine Länge von 41 engl. Meilen haben und gegen 250000 *Liv. st.* kosten. Uiber die Baukosten der Eisenbahnen können daher nur die Schwierigkeit der Lokalität in jeder Gegend, die Preise der einzulösenden Grundstücke, des Eisens, des Arbeitslohnes etc. entscheiden. Dasselbe betrifft auch die Angabe der Unterhaltungskosten, die auf gleiche Weise in jeder Lokalität bestimmt werden müssen. Auf der *Darlington*eisenbahn wurden alle Reparaturen, die auf der Bahn, an den

Dämmen etc. vorfallen, jährlich mit 40 *Liv. st.* für die engl. Meile verpachtet; auf der Budweiser Eisenbahn wurde die Unterhaltung mit beiläufig 1000 fl. C. M. für die N. Oe. Meile jährlich verpachtet, jedoch die Reparaturen der Holzbahn von Seite der Unternehmungsgesellschaft noch besonders bestritten. Es lassen sich also in dieser Hinsicht keine allgemeinen Bestimmungen angeben, sondern die Rechnung muss für jeden Fall entscheiden.

§. 564.

Die zweite Gattung Eisenbahnen, wobei die Räder ohne Spurkranz, die Schienen aber mit einem hervorstehenden Rande auf der innern Seite der Bahn versehen sind, werden *Tramroads* genannt, und sind sammt den hierauf gebrauchten Wägen auf der 34. Tafel dargestellt. Diese Bahnen sind vorzüglich in den englischen Bergwerken, dann aber auch zu Tage in *Wales* und *Monmouthshire* im Gebrauche. Fig. 1, 2, 6, 7 und 8 stellen die Schienen dar, welche auf der in *Monmouthshire* vom J. 1825 bis 1827 erbauten 21¼ engl. Meilen langen Eisenbahn (*Rumney Railway* genannt) zur Verbindung der grossen Eisenwerke in *Rumney* mit der *Sirhowy* Eisenbahn angewendet wurden. Diese Schienen sind wie auf allen andern *Tramroads* nicht gewalzt, sondern von Gusseisen; sie haben 4 Fuss Länge, beinahe 4 Zoll Breite und die Höhe des hervorstehenden Randes beträgt 2½ Zoll. An dem Ende sind die Schienen zur bessern Verbindung untereinander ovalförmig und zur grössern Festigkeit sind sie an ihrer untern Fläche mit einer angegossenen Rippe versehen. Zur vollkommenen Erhaltung der Geleiseweite wurden gusseiserne Bahnschliessen, wie Fig. 2, 6 und 8 zeigt, bei einer jeden Zusammenfügung der Schienen angebracht; diese Schliessen sind an den Enden 3 Zoll breit, haben in der Mitte einen Querschnitt von ¾ Quad. Zoll und werden bei g (Fig. 3) verkeilt. Die Schienen selbst wurden mit viereckigen in ihre Oberfläche genau versenkten schmiedeisernen Nägeln, welche wieder in grössere hölzerne in den Steinblöcken eingeschlagene Nägel eingriffen, befestigt. Die Geleiseweite der Bahn von a (Fig. 3) bis zu a auf der entgegengesetzten Seite gemessen beträgt 4 Fuss 2 Zoll. Das Gewicht einer Gusseisenschiene von 4 Fuss Länge beträgt 65 engl. Pfund, demnach entfallen auf eine N. Oe. Meile einfacher Bahn 6552 N. Oe. Zentner Gusseisen, wozu noch die Bahnschliessen zu rechnen sind. Die Wägen, welche auf diesen Schienen fahren, laden 2½ Tonnen Kohlen, und die Schienen sind gegenwärtig für dieselben hinreichend stark, nachdem man die frühern schwächern Schienen, die häufig zerbrachen, durch die beschriebenen stärkern ersetzt hat.

Fig. 1 bis 8. Tab. 34.

Die Gusseisenschienen, welche auf dem im Jahre 1809 erbauten 9¾ engl. Meilen langen einfach angelegten *Tramroad* von *Gloucester* nach *Cheltenham* angewendet wurden, sind Fig. 9 und 10 dargestellt; die Länge derselben beträgt nur 3 Fuss, die ganze Breite 5 Zoll, die Höhe des hervorstehenden Randes 2 Zoll uud das Gewicht einer Schiene 48 engl. ℔, demnach entfallen auf eine N. Oe. Meile einfacher Bahn 6451 N. Oe. Zentner Gusseisen. Ein vierrädriger Wagen wird auf dieser Bahu mit 2 Tonnen Kohlen, Kalk oder andern Gütern beladen. Die Geleiseweite der Bahn misst 3 Fuss 6 Zoll. Eine verbesserte 3te Art Gusseisenschienen ist Fig. 11, 12 und 13 dargestellt; die zwei unter den Schienen angebrachten Rippen geben denselben hinreichende Festigkeit gegen den Bruch.

Fig. 9 und 10.

Die Wägen, welche auf den englischen *Tramroads* gebraucht werden, sind von sehr verschiedener Konstruktion, wie es auch bei den *Railroads* der Fall ist. Fig. 1 bis 5 enthalten die Darstellung eines Kohlenwagens auf der *Rumney* Eisenbahn; hiebei verdient vorzüglich die Einrichtung der Räder (*close ended wheels*) unsere Aufmerksamkeit. Der Durchmesser derselben misst 2,5 Fuss, die obere Breite, womit sie die Schienen berühren, 1 Zoll; der mittlere Theil der Achse bis zur Linie n p ist viereckig und an dem Wagen befestigt, der Theil von n p bis A aber rund; die Räder drehen sich demnach um die Achsen, und haben zur Erhaltung der Schmiere eine ähnliche Einrichtung, welche wir bereits S. 600 bei den Rädern auf guten Landstrassen angegeben haben. Die Schmiere, welche hier in flüssigem Oehl besteht, wird durch die mit einer Schraube gewöhnlich geschlossene Oeffnung B eingegossen und vertheilt sich auf der ganzen Länge der Achse; damit aber das Rad von der Achse nicht ablaufen könne, ist die letztere wie Fig. 3 zeigt, von A bis n abgedreht und es werden zwei 6 Zoll hohe und ½ Zoll dicke gusseiserne Platten, (Fig. 4 und 5) mit den Schnitten abwechselnd auf einander gelegt, zur bessern Haltung Filze zwischen diese Platten und das Rad eingelegt und das Ganze mit 4 Schrauben an das Rad befestigt. Man sieht leicht, dass der nächst m o an der Achse befindliche eiserne Ring das Ablaufen der 2 Scheiben und demnach auch des Rades verhindere. Da der Guss des letztern von A aus geschieht, so steckt man bei A gewöhnlich einen schmiedeisernen Nagel in die flüssige Eisenmasse, mit welchem dieselbe zusammenschmilzt. Fig. 1 bis 5. Tab. 34.

Wir haben bereits bemerkt, dass die *Tramroads* in neuern Zeiten nicht mehr angelegt werden, wo sie nicht etwa zur Verbindung mit einer schon bestehenden Bahn, wie es bei der *Rumney* Bahn der Fall war, dienen. Wo dagegen solche Bahnen in Magazinen oder Schiffswerften erbaut werden, sind sie noch immer mit Vortheil anzuwenden, weil die hiebei gebrauchten Wägen auch ausser der Bahn benützt werden können, was bei den *Railroads* nicht der Fall ist. Fig. 14 und 15 enthält die Karren, welche zum Transporte der Fässer mit Rohzucker und andern Gegenständen in den westindischen *Docks* dienen. Die mit A bezeichneten Theile sind von Holz, das übrige von Guss- und Schmiedeisen; die Bahnen sind in das steinerne Pflaster versenkt. Fig. 14 und 15.

§. 565.

Die 3te Gattung Eisenbahnen, welche in der neuesten Zeit erfunden wurden; sind von dem Ingenieur *Palmer* angegeben, und Fig. 6 bis 8, Tab. 30 dargestellt. Die Bahn ist hiebei einfach und auf einem Gerüste befestigt; man erspart daher den Bau der Strasse für die Bahn und benöthigt nur ein Geleise. Die Wägen sind zweirädrig, und es hängt zu jeder Seite ein Kasten, in welchen die Waaren geladen werden, die daher auf jeder Seite ein gleiches Gewicht haben müssen; das Pferd geht zur Seite und zieht an einem langen Seile. Obgleich diese Konstruktion dem ersten Anscheine nach bedeutend wohlfeiler als die früher beschriebenen zwei Arten Bahnen auszuführen ist, und hier auch noch der Vortheil eintritt, dass der Widerstand bei einer vollkommen gelegten *Palmer*'schen Bahn wirklich geringer als auf den andern Bahnen ist, so biethet doch eben die Schwierigkeit, diese Bahn in der gehörigen Richtung und dem *Niveau* zu erhalten, ein so grosses Hinderniss dar, dass man in England dieser Konstruktion gar kei- Fig. 6 bis 8. Tab. 30.

nen Beifall schenkt, und sie bisher nur zum Versuche auf einigen sehr kurzen Strecken ausgeführt hat. Auch bei Pesth wurde vor 4 Jahren eine solche Bahn zum Behufe des Steintransportes angelegt, jedoch in kurzer Zeit wegen ihrer bedeutenden Gebrechen wieder abgetragen.

§. 566.

Wenn grosse Lasten auf schiefen Flächen über bedeutende Anhöhen gebracht werden sollen, bedient man sich ebenfalls mit Vortheile der Eisenbahnen. In Schottland hat der Schiffbaumeister *T. Morton* in *Leith* nächst *Edinburgh* ein Patent für einen von ihm angegebenen Apparat zum Herausziehen der Seeschiffe behufs der Reparaturen auf das feste Land erhalten, und diese Vorrichtung ist in kurzer Zeit in den meisten englischen Häfen, so wie auf Verlangen der betreffenden Regierungen in Russland, Frankreich, dann in Nordamerika aufgestellt und die Maschinerie hiezu von dem Erfinder dahin gesandt worden. Die Darstellung dieser Vorrichtung *Mortons patent slip* genannt, enthält Fig. 1 bis 8 Tab. 35. Sie gewährt in Seehäfen einen ausserordentlichen Vortheil gegen die trockenen *Bassins* (*dry docks*), in welche letztern die Schiffe zur Zeit der Fluth einlaufen, hierauf das Wasser während der Ebbe herausgelassen und nun das Schiff, so weit es trocken liegt, ausgebessert wird. Die Aufstellung dieses Apparates unterliegt keiner Schwierigkeit, er kann von einem Orte zum andern gebracht und selbst zu Schiffe verführt werden, um an einem andern Orte zur Herausschaffung des Schiffes auf das feste Land zu dienen. In der hierüber bekannt gemachten, englischen Beschreibung wird behauptet, dass 6 Arbeiter für 100 Tonnen Gehalt hinreichen, um das Schiff 2,5 bis 5 Fuss weit in der Minute aufzuwinden; ein Schiff von 300 Tonnen Gehalt würde daher durch 18 Arbeiter in ein oder zwei Stunden auf das Trockene gebracht werden können.

Fig. 1 bis 8. Tab. 35.

Der Apparat besteht aus einer schief gelegten, vierfachen Eisenbahn nach Art der *Tramroads*, worauf das Schiff mittelst eines hinreichend grossen Wagengerüstes, auf das es aufgefahren und befestigt wird, durch eine Zugmaschine herausgewunden wird. Fig 1, 2, 3 und 7 zeigen sowohl die Konstruktion des Wagens als die Art der Befestigung des Schiffes auf demselben. Die mittlern Rollen b, c des Wagens tragen einen sehr starken Balken A B, auf welchem einzelne kurze Hölzer (Klötze) befestigt sind, worauf das Schiff mit seinem Kiele auffährt. Die schwächern Balken C D und E F werden von den Seitenrollen getragen. Auf diesen 3 Balken ruhen die Querhölzer A G und A H (Fig. 1), welche in ihrer schiefen Lage durch untergelegte Holzstücke erhalten werden. Hierauf liegen die beweglichen Klötze K, L..... deren anfängliche Lage Fig. 3 bei M zeigt, und die man, sobald das Schiff mit dem Kiele auf dem mittlern Balken A B aufsitzt, mittelst Seilen, welche durch die Stangen e f über dem Wasser erhalten werden, unter das Schiff fest anzieht. Es wird nämlich an jeden beweglichen Klotz ein Seil bei i befestigt, über die Rolle k und an der Stange e f hinaufgeführt; um aber das Rückgehen dieser Klötze zu vermeiden, fällt zugleich ein Sperrkegel (*rackpall*) in die gezähnte Stange g h (Fig. 8) ein. Die eisernen Bänder w, w dienen zur Befestigung und bessern Leitung des Wagens und die Streben v zur bessern Erhaltung des Schiffes in der vertikalen Lage. Fig. 4 und 5 enthält die Darstellung der Zugmaschine und Fig. 6 den hiebei gebrauchten Bremshebel im

vergrösserten Maasstabe. Die Zugmaschine wird durch zwei lange unter rechten Winkel gegeneinanderstehende Kurbeln bewegt, an welchen die Arbeiter angestellt werden, wie der Grundriss Fig. 7 zeigt. Durch die Kurbeln A wird das Getriebe a und hiedurch das gezähnte Rad B bewegt; an der Welle des letztern (welche im Grundrisse Fig. 5 nicht zu sehen ist) steckt das Getriebe b, welches abermal das gezähnte Rad C treibt, an dessen Welle c die Kette aufgewunden ist, an deren Ende das Wagengerüst befestigt ist. Das ganze Räderwerk ist von Gusseisen, so wie auch dessen Fussgestell, welches jedoch auf einem hinreichend festen Mauerwerke mit Schrauben befestigt wird. Um das Schiff auf der schiefen Fläche in jedem Punkte zu erhalten, dienen die Sperrkegel q, q', q'', welche in eine auf der mittlern Bahn befestigte gezähnte Stange eingreifen. Zu gleichem Zwecke dient auch der Bremshebel p n, mit den halbkreisförmigen Bremsringen o u r und m s r. Beide sind in r an dem Gerüste der Maschine befestigt und bewegen sich daselbst in einem Scharniere. Der Bremshebel dagegen ist an einer eisernen Achse in n ebenfalls an dem Maschinengerüste beweglich. Wird nun dieser Hebel bei p herabgedrückt, so geht der Punkt o hinauf, und der Bremsring r u o wird an der Welle angezogen, während zu gleicher Zeit der Punkt m in entgegengesetzter Richtung von o fortgerückt, und dadurch auch der Ring r s m an die Welle, worauf sich die Kette windet, gedrückt wird. Diese Bremse kann übrigens auch auf andere Art eingerichtet werden. Fig. 4 bis 7. Tab. 35.

Es leuchtet von selbst ein, dass dieser Schiffsaufzug nicht bloss bei Seeschiffen, sondern auch bei Flusschiffen, wo er dann einfacher und weit minder kostspielig angelegt wird, zu brauchen sey, und dass er in jeder Hinsicht dem gewöhnlichen Verfahren, wo Schiffe mit Pferden behufs der Vornahme von Reparaturen oder zur Winterszeit aus dem Wasser gezogen werden, den Vorzug verdiene.

§. 567.

Wenn auf Eisenbahnen beladene Wägen über schiefe Flächen (*inclined planes*) herabgehen, kann man ihr überwiegendes Gewicht zum Aufzuge leerer Wägen zu gleicher Zeit mit vielem Vortheile verwenden. In England nennt man diese Flächen *self acting planes* oder selbstwirkende schiefe Flächen, und sie sind daselbt seit mehr als einem halben Jahrhunderte im Gebrauche. Es mag wohl mehrere hundert solche schiefe Flächen in England geben, deren Konstruktion auch mehr und minder von einander abweicht. Fig. 13 und 14 enthalten die Darstellung einer solchen selbstwirkenden schiefen Fläche, welche nächst *Leeds* in *Yorkshire* auf der Eisenbahn, die von dem *Middleton* Kohlenwerke kommt, angelegt ist. Vier Wägen, deren jeder mit 53 Ztr. Kohlen beladen ist, ziehen bei dem Herablaufen über die schiefe Fläche 4 andere leere Wägen hinauf; zu diesem Behufe hängen dieselben mittelst eines Seiles zusammen, das um das horizontale Rad a b von 16 Fuss Durchmesser geschlungen wird. Die Speichen und Welle dieses Rades sind von Gusseisen, um ihnen eine grössere Festigkeit zu geben; der Kranz ist aber von Holz. Zur Leitung des Seiles dienen die gusseisernen Räder c, d von 4 Fuss Durchmesser. Um das grosse Rad bremsen, und hiedurch die Bewegung des Seiles vermindern zu können, liegt um dasselbe ein hölzerner Kranz, der bei e befestigt und an den Ketten f, f aufgehängt ist. Wird nun der Hebel m n bei m herabgedrückt, so schiebt die bei n befestigte vertikale Stange den Punkt o gegen a, und drückt den schwebenden Kranz an Fig. 13 und 14.

Fig. 13 und 14. Tab. 35. das grosse Rad an. Da auf dieser schiefen Fläche bei Tag und Nacht gefahren wird, so muss der Arbeiter, welcher oben die beladenen Wägen an das Seil anhängt, zugleich auch gewiss seyn, dass 4 andere Wägen am Fusse der schiefen Fläche an das andere Ende des Seils befestigt wurden. Zu diesem Behufe dient eine Art Telegraph A B, welcher am Fusse jeder solchen schiefen Fläche aufgestellt wird, und wieder verschieden eingerichtet seyn kann. Gewöhnlich wird auf einer eisernen Platte in der Höhe bei A ein Steinkohlenfeuer gemacht, welches jedoch gegen die schiefe Fläche durch eine vertikal vorgehängte Blechplatte gedeckt wird. Wie nun unten 4 Wägen eingehängt sind, wird diess Blech aufgezogen, der Arbeiter bei dem obern Maschinengebäude erblickt das Feuer, und hängt sogleich oben 4 andere Wägen ein, die nun durch ihr Uibergewicht herabgehen, und zu gleicher Zeit die leeren Wägen hinauf ziehen. Da jedoch die Bewegung über die schiefe Fläche mit einer Beschleunigung verbunden ist, so wird, wenn die untern Wägen auf der Höhe der schiefen Fläche beinahe angelangt sind, das Bremsrad angezogen, oder man hängt die Wägen schnell aus, worauf sie in der neben dem Gebäude fortgeführten horizontalen Strecke noch ein bedeutendes Stück fortlaufen, ehe sie zur Ruhe kommen.

Da die Seile sich bei der Bewegung über die schiefe Fläche auf der Erde schleifen und bald abnützen würden, so werden von Strecke zu Strecke in der Mitte der Bahn gusseiserne Seilleitungsrollen (*sheeves*) auf hölzernen in die Erde eingegrabenen Pfosten befestigt, über welche nunmehr das Seil fortläuft. Fig. 9 bis 12. Die Darstellung dieser Seilleitungsrollen, wie sie auf der *Bolton* und *Leigh* Eisenbahn nächst *Manchester* gebraucht werden, enthält Fig. 9 bis 12; die letztere Figur zeigt die schmiedeiserne Achse, an welche die gusseiserne Rolle angegossen wird.

§. 568.

Wenn beladene Wägen über eine schiefe Fläche hinab und zu gleicher Zeit andere beladene Wägen hinauf gehen, so kann man sich der im vorigen §. beschriebenen Vorrichtung ebenfalls bedienen, nur muss das Gewicht der herabgehenden Wägen immer grösser als derjenigen seyn, welche zu gleicher Zeit hinauf gezogen werden. Es kann aber auch der entgegengesetzte Fall und selbst jener vorkommen, wo bloss beladene Wägen hinauf und leere hinabgeschafft werden; nun gleichen sich zwar die Gewichte der Wägen beiderseits aus, allein zur Fortschaffung der Ladung und zur Bewegung der ganzen Maschinerie wird noch eine Kraft erfordert. In England werden in solchen Fällen Dampfmaschinen (*fixed steam engines* oder *stationary engines*) auf die Anhöhe gestellt, mittelst welcher nunmehr das Aufziehen der Wägen bewirkt wird; man nennt diese schiefen Flächen *Engine planes*. In Gegenden, wo man Wasserkraft zur Disposition hat, werden zu gleichem Zwecke auch Wasserräder oder auch Pferdegöpel gebraucht. Auf der Grube *Wheal friendship* unweit *Tavistock* geschieht die Förderung der Bahnwägen mittelst eines Wasserrades. An dem Ende des *Tavistock* Kanales befindet sich eine schiefe Fläche, auf welche die leeren Wägen mittelst eines oberschlächtigen Wasserrades von 28 Fuss Höhe und 4 Fuss Breite aufgezogen werden. Auf demselben Kanale wurde statt 2 Schleussen zu bauen, eine Strecke mit einer schiefen Fläche, die 19,5 Fuss hoch ist und die Steigung 1 : 48 hat, angelegt; ein Wagen von 20 Fuss Länge fährt unter

ein beladenes Boot und nun wird derselbe sammt seiner Ladung durch Pferde hinaufgezogen. In dem Schieferbruche bei *Milkill* werden mittelst eines einfachen Pferdegöpels die beladenen Wägen hinaufgeführt und die leeren herabgelassen. Bei Anlegung grosser Abgrabungen werden gewöhnlich die beladenen Wägen auf schiefen Flächen durch Pferde aufgezogen. Die Anlage der Wasserräder bei schiefen Flächen besteht bereits seit mehr als einem halben Jahrhunderte bei einigen Holzaufzügen in der Oester. Monarchie. Bei *Maria Zell* in Steiermark ist ein solcher Holzaufzug, wo durch die Kraft eines mittelschlächtigen Wasserrades mit 5 Fuss Gefälle täglich in 11 Arbeitsstunden 37 bis 40 Klafter Holz, die zusammen 800 Zentner wiegen, über eine schiefe Fläche (Holzbahn), deren senkrechte Höhe 40 N. Oe. Klafter beträgt, hinaufgezogen werden. Ein ähnlicher Aufzug steht in dem äussern Weissenbache im Oberöster. Salzkammergute.

Der Grundsatz, bei der Fahrt über schiefe Flächen die herabgehenden Wägen zur Erleichterung des Aufzugs anderer beladener Wägen zu verwenden, ist von dem Civil Ingenieur *Benjamin Thompson* auf alle Fälle der Anwendung ausgedehnt und demselben unter dem 24. Oktober 1821 ein Patent für dieses von ihm genannte „*reciprocating system*" oder wechselwirkende System ertheilt worden. Eine Anwendung dieser Grundsätze hat *B. Thompson* bei der *Brunton* und *Schields* Eisenbahn nächst *Newcastle* mit dem besten Erfolge in Ausführung gebracht.

Man hat in England noch andere Mechanismen versucht, um beladene Wägen über Berge aufzuziehen. So hat man Wägen mit blechernen Kästen auf der Anhöhe des Berges mit Wasser oder Steinen gefüllt, diese Wägen während ihres Herabgehens über die schiefe Fläche zum Aufziehen anderer beladener Wägen verwendet, sodann die erstern unten ausgeladen, und auf gleiche Art wieder leer hinauf gezogen. Allein dieser und noch andere ähnliche Mechanismen sind sämmtlich wieder aufgegeben worden, da ihre Anwendung zu viel andern Anständen in der Ausübung unterlag.

§. 569.

Man würde überhaupt sehr irren, wenn man von dem Gebrauche der beschriebenen Mechanismen einen a u s s e r o r d e n t l i c h e n G e w i n n a n F r a c h t k o s t e n erwarten wollte. Zwar sollte man dem Anscheine nach glauben, dass die Frachtkosten auf einer selbstwirkenden schiefen Fläche beinahe = 0 seyen, da die einen Wägen die andern ohne weitere Beihülfe aufziehen, allein die Erfahrung im Grossen hat hierüber in England anders entschieden. Als Belege hiefür werden nachstehende Ausweise über die Frachtkosten in verschiedenen Fällen angeführt, welche *H. Nicolas Wood* dem Herausgeber dieses mitgetheilt hat.

I. Selbstwirkende schiefe Fläche bei dem Kohlenwerke zu *Killingworth*.

Länge 715 *yards*, Fall 57 Fuss 3 Zoll oder 1 : 37,5, vollkommen gerade Bahn.

Das Seil wurde gelegt am 1. März 1822, abgenommen am 18. Juli 1823, damit verführt 55977 *Chaldrons*
„ „ „ „ 18. Juli 1823, „ „ 27. Nov. 1824 „ „ 59839 „

Zusammen 115816 *Chaldrons*.

Demnach wurden mit einem Seile im Durchschnitte 57908 *Chaldrons* zu 53 Ztr. = 153456 Tonnen auf 715 *yards* Weite oder 62342 Tonnen eine Meile weit geführt, welches folgende Kosten verursachte:

		Liv. st.	*sh.*	*d.*
1tens	Das Seil von 5Zoll Umfang, 800 *yards* Länge und 25Ztr. 19 ℔ Gewicht, den Ztr. zu 52sh.	65	8	10
2tens	2 Personen zur Aufsicht, ein jeder 2 sh. 6 d täglich, für 300 Tage jährlich und bei der Annahme von 45000 *Chaldrons* jährlich, macht für 15 Monate . .	93	15	0
3tens	Schmiere, Oehl etc. für die Seilleitungsrollen	3	0	0
4tens	Die ursprünglichen Kosten der Maschinerie waren 200 *Liv. st.* wovon 4 procent Zinsen für 15 Monate	10	0	0
	Zusammen	172	3	10

Diess gibt für das oben angeführte Frachtquantum ⅔d. für die Tonne und die Meile.

II. Untere selbstwirkende schiefe Fläche zu *Killingworth.*

Länge 631 *yards*, Fall 77 Fuss 7 Zoll, oder 1 : 24,4, ein wenig gekrümmte Bahn.

Auf derselben wurden 147340 Tonnen auf 631 *yards* Weite oder 52825 Tonnen eine Meile weit für 160 *Liv. st.* 19 *sh.* 8 *d.* verführt, welches für die Tonne und die Meile ¾ *d.* beträgt.

III. Selbstwirkende schiefe Fläche bei dem Kohlenwerke zu *Mount Moor.*

Beinahe gerade Bahn, 704 *yards* lang, mit dem Gefälle von 88 Fuss 10¼ Zoll oder 1 : 23,8. Es wurden 63600 Tonnen auf 704 *yards* Weite oder 25440 Tonnen eine Meile weit für 120 *Liv. st.* 14 *sh.* 0 *d.* verführt, welches den Betrag von 1 d. für die Tonne und die Meile gibt.

IV. Zweite selbstwirkende schiefe Fläche auf dem Kohlenwerke zu *Mount Moor,*

942 *yards* lang, mit einem Gefälle von 101 Fuss 6 Zoll oder 1 : 27,8.. Auf derselben wurden 84800 Tonnen auf 942 *yards* Länge oder 45387 Tonnen 1 Meile weit geführt; der Betrag war ⅔ *d.* für die Tonne und die Meile.

V. Erste selbstwirkende schiefe Fläche bei dem Kohlenwerke zu *Hetton,*

1302 *yards* lang, mit starken Krümmungen und einem Gefälle von 130 Fuss 4 Zoll oder 1 : 30. Auf derselben wurden 258645 Tonnen auf die Weite von 1302 *yards* oder 191339 Tonnen 1 Meile weit geführt, welches den Kostenbetrag von ⅔ d. für die Tonne und die Meile verursachte.

VI. Schiefe Fläche mit einer aufgestellten Dampfmaschine (*Byre Engine Plane*) bei dem *Hetton*-Kohlenwerke,

beinahe gerade, 882 *yards* lang, mit 151 Fuss Steigung oder 1 : 17,5. Auf der Höhe der schiefen Fläche steht eine 60 Pferdekraft starke Condensationsmaschine (*Condensing Engine*), welche mit Einschluss der Seilleitungsrollen 3000 *Liv. st.* kostete.

Das 1te Seil von 7¼Zoll Durchm. wog	62 — 0 — 0	zu 50 *sh.* macht	155 — 0 — 0	wurde abgenom.	12. Apr. 1823.
„ 2te „ „ „ „ „	„ 61 — 3 — 25	„ „ „	154 — 18 — 8	„ „	10. Jän. 1824.
„ 3te „ „ „ „ „	„ 62 — 0 — 23	„ „ „	155 — 10 — 3	„ „	4. Juni 1824.
„ 4te „ „ „ „ „	„ 62 — 0 — 23	„ „ „	155 — 10 — 3	„ „	26. Sept. 1824
		Zusammen *Liv. st.*	620 — 19 — 2		

Mit diesen Seilen wurden 103238 *Chaldrons* oder 273581 Tonnen über die Länge von 882 *yards* geführt, welches eben so viel ist, als 137101 Tonnen eine Meile weit. Die Förderung mit diesen Seilen fing am 18 Nov. 1822 an, und dauerte 97 Wochen; die Kosten der Seile betrugen für diese ganze Zeit 620 *Liv. st.* 19 *sh.* 2 *d.* Nebstbei waren wochentlich noch folgende Auslagen:

		Liv. st.	*sh.*	*d.*
1.)	Zwei Personen zur Dampfmaschine zu 21 *sh.* wochentlich	2	2	0
2.)	Ein Junge zur Dampfmaschine, wochentlich mit	0	7	6
3.)	Schmiere, Talg, Oehl, Hanf etc.	1	8	6
4.)	Ein Mann, welcher mit den Wägen fährt	0	18	0
5.)	Ein Mann am obern Ende der schiefen Fläche	0	14	0
6.)	Ein Mann am Fusse der schiefen Fläche	0	12	0
7.)	Ein Knabe bei der Signalstange (Telegraphen)	0	5	0
8.)	Schmiere für die Seilleitungsrollen	0	5	0
9.)	Reparaturen der Eisenstangen des Feuerrostes der Dampfmaschine . . .	1	5	0
10.)	24 Tonnen Kohlen wochentlich zu 5 *sh.* die Tonne	6	0	0
11.)	Interessen des Kapitals von 3000 *Liv. st.* zu 4 Prozent wochentlich . .	2	6	2
	Zusammen	16	3	2

Diese Auslage macht für 97 Wochen 1567 *Liv. st.* 7 *sh.* 2 *d.* und sammt dem obigen Betrage für die Seile 2188 *Liv. st.* 6 *sh.* 4 *d.* Wird diess auf die, eine Meile weit geführten 137101 Tonnen vertheilt, so entfallen $3\frac{4}{5}$ *d.* für die Tonne und die Meile.

VII. Schiefe Fläche mit einer aufgestellten Dampfmaschine bei dem *Hetton*-Kohlenwerke (*Mill Engine Plane and Flat*). Dieselbe besteht aus einer Strecke von 775 *yards* Länge und 115 Fuss Steigung oder 1 : 20,2, dann aus einer zweiten Strecke von gleicher Länge (775 *yards*) und 30 Fuss Steigung oder 1 : 77,5. Die Dampfmaschine auf der Höhe der schiefen Fläche ist von gleicher Construktion und Kraft von 60 Pferden und kostete ebenfalls 3000 *Liv. st.* Uiber diese schiefe Fläche oder die Länge von 1550 *yards* wurden 260958 Tonnen oder 229821 Tonnen eine Meile weit für den Betrag von 2479 *Liv. st.* 18 *sh.* 0 *d.* geführt, welches $2\frac{3}{5}$ *d.* für die Tonne und die Meile beträgt.

VIII. Schiefe Fläche mit einer Dampfmaschine bei dem Kohlenwerke in *Backworth* (*Prospect Plane*). Die Länge derselben beträgt 1104 *yards*, die Steigung 42 Fuss oder 1 : 78,9. Die hierauf verführten 145750 Tonnen auf die Länge von 1104 *yards* sind eben so viel als 91425 Tonnen eine Meile weit; die Auslage hiefür betrug 572 *Liv. st.* 17 *sh.* 8 *d.* oder $1\frac{1}{2}$ *d.* für die Tonne und die Meile.

IX. Schiefe Fläche mit einer Dampfmaschine (*Murtonrow Engine*) bei dem Kohlenwerke in *Backworth*,

Länge derselben 1905 *yards*, Steigung 89 Fuss 9 Zoll oder 1 : 63,7. Uiber diese Länge von 1905 *yards* wurden 145750 Tonnen geführt, welches eben so viel ist, als 157758 Tonnen eine Meile weit; die Kosten betrugen für die Tonne und die Meile $1\frac{1}{8}$ *d.*

X. Schiefe Fläche mit einer Dampfmaschine bei dem Kohlenwerke zu *Gosforth* (*West Plane*). Dieselbe besteht aus einer Strecke von 964 *yards* mit 57 Fuss 7 Zoll Steigung, dann einer zweiten Strecke von 1012 *yards* mit 33 Fuss Gefäll. Uiber diese Länge von 1976 *yards* wurden 81641 Tonnen geführt, welches eben so viel ist, als 91661 Tonnen eine Meile weit; die Auslagen hiefür waren 368 *Liv. st.* 14 *sh.* 1 *d.*, welches beinahe 1 *d.* für die Tonne und die Meile beträgt.

XI. Frachtkosten mit 4 Dampfwägen,

welche auf dem *Killingworth Railroad* vom 31. Dezember 1823 bis 31. Dezember 1824 gebraucht wurden. Die Eisenbahnstrecke, wo man die Dampfwägen verwendete, hatte folgendes Profil: Von der *Burraton-* bis zur *Killingworth-* Grube A sind 2230 *yards* und 37 Fuss 6 Zoll Fall; von der Grube A bis zur Grube C sind 1432 *yards* Länge und 4 Fuss Steigung, dann aber 18 Fuss 8 Zoll Fall; von der Grube C bis zu dem Endpunkte, wie weit Dampfwägen gehen, sind 3688 *yards* mit einigen Steigungen und Gefällen, jedoch ist diese Strecke beinahe horizontal. Die Auslagen bei dem Gebrauche der 4 Dampfwägen betrugen in der oben angeführten Zeit

	Liv. st.	*sh.*	*d.*
1.) Hanf 2 Ztr. zu 42 *sh.*; Talg 11 Ztr. zu 36 *sh.*	24 —	0 —	0
2.) Der Oehlbedarf in dieser Zeit betrug	15 —	14 —	0
3.) Räder mussten nach einem Durchschnitte von 3 Jahren jährlich 27 Stück angeschafft werden, zu 3 *Liv. st.* jedes	81 —	0 —	0
4.) Vier Personen zu den Dampfmaschinen für 240 Tage zu 3 *sh.* 6 *d.* (indem ein Tag in jeder 2ten Woche für Reparaturen verloren ging) und 4 Jungen 240 Tage zu 1 *sh.* 6 *d.*	240 —	0 —	0
5.) Jede Maschine benöthigte 16 Ztr. Kohlen täglich, welches in 220 Tagen den Bedarf einer Maschine mit 176 Tonnen oder 704 Tonnen für alle 4 Maschinen gibt, zu 5 *sh.* die Tonne.	176 —	0 —	0
6.) Abnützung der Dampfmaschinen mit Einschluss aller zufälligen Auslagen . .	120 —	0 —	0
7.) Interessen des Kapitals für 4 Dampfwägen zu 500 *Liv. st.* oder für 2000 *Liv. st.* zu 5 procent	100 —	0 —	0
Zusammen	756 —	14 —	0

Die Arbeit, welche mit diesen Maschinen verrichtet wurde, bestand in Folgendem: 12636 *Chaldrons* Kohlen wurden 5120 *yards*, ferner 17545 *Chaldrons* wurden 3688, endlich 14579 *Chaldrons* wurden 7350 *yards*, zusammen also 44760 *Chaldrons* transportirt. Diess ist eben so viel, als die Fracht von 356181 Tonnen eine Meile weit; die Gesammtauslage betrug 756 *Liv. st.* 14 *sh.*; es entfällt daher beinahe ½ *d.* für die Tonne und die Meile. Da diese Eisenbahn auf die obige Länge von 7350 *yards* ein Gefälle von 56 Fuss 2 Zoll und eine Steigung von 4 Fuss hat, so gibt diess einen mittlern Fall von 1 : 423.

XII. Hiezu können wir noch die Fracht mit Dampfwägen auf der *Darlington*-Eisenbahn rechnen. Nach S. 617 beträgt die Länge dieser Bahn von dem Fusse der *Brusselton* schiefen Fläche bis *Stokton* 100959 Fuss und der Fall 395,2 Fuss, demnach das mittlere Gefäll 1 : 255,5. Die Fracht wird hier mit 4 Dampfwägen mit grösster Lebhaftigkeit betrieben; die Gesellschaft hat diese Fracht an einige Unternehmer um den Betrag von ¼ *d.* für die Tonne und die Meile verpachtet, allein sie liefert die Dampfwägen und bestreitet alle Reparaturen an denselben. Hiedurch kommen die Frachtkosten für die Tonne und die Meile auf ⅓ *d.* und selbst auf ½ *d.* oder eben so hoch als bei dem Gebrauche der Pferdekraft. (Siehe S. 617.) Der Vortheil der Dampfwägen besteht jedoch noch immer darin, dass die Fracht weit schneller als mit Pferden geht, dass man Tag und Nacht fahren, folglich im Falle eines Bedarfes in kurzer Zeit sehr viel transportiren kann und dass der Verkehr auf einer einfachen Bahn bei dem Gebrauche von Dampfwägen, die 20 bis 24 Kohlenwägen mit sich führen, weit weniger unterbrochen wird, als es der Fall ist, wenn ein Pferd bloss 4 Kohlenwägen fortbringt. Uiberdiess ist hier zu bemerken, dass die Dampfwägen, die in den letztern Jahren gebaut wurden, eine weit vollkommnere Einrichtung haben und demnach auch mehr leisten, als jene auf der *Darlington*-Bahn.

XIII. Hinsichtlich der Dauer der Seile und der Kosten, welche dieselben auf selbstwirkenden schiefen Flächen verursachen, verdient noch folgende von *H. Wood* mitgetheilte Erfahrung angeführt zu werden. Die schiefe Fläche, worauf die Seile gebraucht wurden, befindet sich auf dem *Killingworth Railroad*; die Länge derselben beträgt 715 *yards*, der Fall 57 Fuss 3 Zoll oder 1 : 37,5; die Bahn läuft ohne Krümmungen ganz gerade. Jedesmal gehen 6 beladene Wägen hinab und ziehen zu gleicher Zeit 6 leere hinauf; ein Wagen wiegt 25 Ztr. und enthält gesetzlich 53 Ztr. Steinkohlen, gewöhnlich auch bis 56 Ztr. Die gebrauchten Seile haben 5 Zoll im Umfange.

Seil	Wurde aufgelegt	Wurde abgenommen	Hiemit wurden geführt	Gewicht des Seiles	Preiss per	Anschaffungskosten des Seiles
			Chaldrons	Ztr. ¼Z. ℔	Ztr.	*Liv. st. sh. d.*
1tes	1. März 1822	18. Juli 1823	55977	24—3—0	50 *sh.*	61 — 17 — 11
2tes	18. Juli 1823	27. Nov. 1824	59839	25—3—1	50 *sh.*	64 — 7 — 11
3Seile	27. Nov. 1824	26. Sept. 1829	177036	. . .	.	173 — 13 — 9
		Zusammen	292852			299 — 19 — 7

Nun betragen 292852 *Chaldrons* zu 53 Ztr. gerade 776058 Tonnen, die 715 *yards* weit geführt wurden, welches eben so viel ist, als 315274 Tonnen eine Meile weit. Dieses Frachtquantum mit den ausgewiesenen Kosten der Seile verglichen, gibt 0,2284 *d.* für die Tonne und die Meile.

Noch ist zu bemerken, dass *H. Wood* in seinem bereits genannten Werke über Eisenbahnen eine Reihe von Versuchen über den Widerstand der Reibung auf selbstwirkenden schiefen Flächen anführt. Hieraus ergibt sich, dass die Reibung eines Seiles und der Widerstand, welcher bei einer solchen schiefen Fläche statt findet, beiläufig ein Drittel des Gewichtes beträgt, welches mit der Grösse des Widerstandes, den wir §. 462 bei der Reibung der Seile an einem Flaschenzuge angegeben haben, nahe übereinstimmt.

§. 570.

Die im vorigen §. angeführten Erfahrungen über die Frachtkosten auf den Eisenbahnen geben hinlängliche Anhaltspunkte, um in ähnlichen Fällen bestimmte Anschläge machen zu können. Es versteht sich hiebei von selbst, dass dasjenige, was die Anlage

der Dampfmaschinen und Dampfwägen betrifft, erst in den folgenden 2 Bänden dieses Werkes abgehandelt wird. Wir sehen aus den Erfahrungen über selbstwirkende schiefe Flächen, dass es zwar an und für sich einen Vortheil gewährt, wenn das Uibergewicht herabgehender Wägen zum Aufzuge anderer zu gleicher Zeit hinaufgehender Wägen verwendet wird, dass jedoch die Frachtkosten für die Tonne und die Meile noch immer sehr bedeutend bleiben und selbst bei einem so lebhaften Verkehre, wie er auf den englischen Eisenbahnen statt findet, immer mehr als auf einer horizontalen Bahn betragen. Wenn man daher einen in der Richtung einer Bahn liegenden steilen Hügel oder Berg zu beiden Seiten mit einer schiefen Fläche übersetzen und die einerseits hinabgehenden Wägen zum Aufzuge der anderseits hinaufgehenden Wägen verwenden will, so wird die Fracht in jedem Falle höher zu stehen kommen, als wenn man den Hügel durchgräbt, oder einen Stollen führt, und die Fracht ohne Anwendung einer Maschinerie mit Pferden verrichtet. Die Lokalität und die Grösse des Verkehres muss nun in jeder Gegend entscheiden, ob der geringere Frachtlohn die Durchgrabung des Berges oder auch den Bau eines Stollens lohne; eine allgemeine Rechnung lässt sich hierüber nicht anstellen.

Obgleich man in England mit dem Gebrauche der Maschinen vertrauter, als in jedem andern Lande ist, so bemüht man sich doch bei den gegenwärtig im Baue stehenden Bahnen, schiefe Flächen mit Maschinen so viel als es möglich ist, zu vermeiden und man spart keine Kosten, um Bahnen zu erhalten, deren Neigungen so klein sind, dass sie ohne Anstand in ihrer ganzen Länge mit Pferden oder Dampfwägen befahren werden können. Dass hiedurch die Baukosten in einem ausserordentlichen Verhältnisse gestiegen sind, haben wir bereits S. 619 von der *Manchester-* und *Liverpool*-bahn erwähnt.

§. 571.

Obgleich es nicht in dem Zwecke dieses Werkes liegt, detaillirte Beschreibungen bestehender Eisenbahnen zu geben, da diess mehr dem Fache der Baukunst angehört, so glauben wir doch, dass es unsern Lesern angenehm seyn wird, eine Skizze einiger vorzüglichen Eisenbahnen zu erhalten, um hieraus die Einrichtung und Grösse solcher Anlagen beurtheilen zu können.

Der Bau der *Stockton*- und *Darlington*eisenbahn in der Grafschaft *Durham* wurde im Jahre 1822 begonnen und bis zum Jahre 1830 ununterbrochen fortgesetzt, nachdem jedoch schon am 4ten Oktober 1825 die Hauptlinie der Eisenbahn eröffnet und seit dieser Zeit stets benützt wurde. Der vorzügliche Zweck dieser Bahn besteht in dem Transporte der Steinkohlen von den Gruben bei *Auckland* nach *Darlington*, *Stockton* und einigen andern Städten, wohin Nebenbahnen angelegt wurden, dann aber auch in dem Transporte dieser Kohlen bis nahe an die See, damit sie von dort zu Schiffe weiter verführt werden können. Ursprünglich war diese Bahn nur bis *Stockton* berechnet, welches an dem Flusse *Tees*, 8 engl. Meilen oberhalb seiner Einmündung in die See liegt; da jedoch dort nur Schiffe von 100 bis 120 Tonnen laden konnten, so wurde die Bahn im Jahre 1829 noch 4 Meilen entlängst dem Flusse bis zu einem Punkte fortgesetzt, wo grosse Seeschiffe ohne Anstand laden können. Die Länge der Hauptbahn, welche im Jahre 1825 vollendet war, betrug von *Stockton* bis *Witton Park Colliery* $25^1/_4$ engl Meilen. Hiezu kamen dann nach und nach folgende Seitenbahnen: Nach *Yarm* von $^3/_4$ Mei-

len Länge, nach *Croft* 4¼ Meilen, nach *Darlington* ¾ Meilen, nach *Blackboy* 2 Meilen, nach *Hagger Leases* 4¼ Meilen; die ganze Länge betrug daher 37 englische Meilen, und die Baukosten hiefür gegen 200000 *Liv. st.* Durch die im J. 1829 ausgeführte Verlängerung der Bahn entlängst dem Flusse *Tees* bis *Middlesbro'* erhält dieselbe eine Gesammtlänge von 41 Meilen, und die Baukosten steigen bis auf 250000 *Liv. st.*; doch werden ohne Zweifel noch einige Nebenbahnen seiner Zeit hinzu kommen und die Länge der Bahn und der Baufond erweitert werden.

Die Schienen und Wägen, welche auf dieser Bahn gebraucht werden, haben wir bereits beschrieben, so wie wir auch den mittlern Fall der Hauptbahn von dem Fusse der schiefen Fläche bei *Brusselton* bis *Stockton* angaben. Dieser Fall (2:511) ist jedoch in der Nähe vor *Stockton* am stärksten, nämlich 1:104, in allen andern Strecken kleiner. Die *Brusselton* schiefe Fläche hat auf der einen Seite die Steigung 1:33¼ und erhebt sich 165¾ Fuss hoch, auf der andern Seite ist dass Gefäll 1:30½ und der ganze Fall 81 Fuss. Eine zweite schiefe Fläche, die zwischen *Brusselton* und den Kohlengruben liegt, steigt einerseits mit 1:33 auf die Höhe von 100 Fuss und fällt auf der andern Seite mit 1:30¼ auf die Tiefe von 214,5 Fuss. Auf dem Scheidungspunkte der *Brusselton* schiefen Fläche steht eine Dampfmaschine von 60 Pferdekräften, auf dem Scheidungspunkte der letzten schiefen Fläche bei *Greenfield* steht eine Dampfmaschine von 30 Pferdekräften. Beide schiefe Flächen wären vermieden worden, und man hätte ein Gefälle von 1:190 erhalten, wenn man einen Stollen von beiläufig 5 engl. Meilen Länge angelegt oder beide Berge durch eine lange Umgehung vermieden hätte. Die ganze Bahn ist, wie wir auch schon bemerkten, einfach angelegt, doch sind so viele Ausweichplätze vorhanden, dass man von einem zum andern sehen kann; hiedurch wird bei einiger Aufmerksamkeit und Handhabung der hierüber aufgestellten Reglements das Begegnen der Wägen in einer einfach gelegten Bahnstrecke ganz vermieden. Uibrigens besteht die ganze Bahn theils aus geraden Linien, theils auch aus sehr sanften Krümmungen, deren Halbmesser gewöhnlich 600 bis 700 *yards* beträgt; nur eine kleine Strecke von 4,5 *chains* (297 engl. Fuss) Länge hat einen Krümmungshalbmesser von 139 *yards* oder 67 N. Oe. Klafter.

Dass auf dieser Bahn sowohl mit Pferden als mit Dampfwägen transportirt wird, und zu welchen Preisen dasselbe geschieht, haben wir auch schon angeführt. Zur Bestimmung des Gewichtes der Ladung wurden mehrere Waghäuser an der Bahn aufgestellt, und das Gewicht des leeren Wagens ist an einem jeden Wagen deutlich angeschrieben. Die Gesellschaft erhebt einen Zoll von allen Gütern, den sie von Zeit zu Zeit verändert, jedoch innerhalb der vom Parlamente festgesetzten Gränzen bleiben muss. Zur Begünstigung der Kohlenausfuhr zur See ist der Tariff für diesen Fall immer sehr niedrig gestellt. Vor Errichtung dieser Eisenbahn gingen wochentlich nur zwei Postkutschen von *Stockton* nach *Darlington* und diese waren grösstentheils leer, gegenwärtig aber, wo diese Bahn ununterbrochen mit Kutschen, deren manche 30 und noch mehr Personen fassen, befahren wird, hat sich die Anzahl der Reisenden jährlich bis auf 40000 vermehrt; ein hinreichender Beweis, dass wohlfeile, bequeme und schnelle Kommunikationen die grösste Betriebsamkeit und Belebung in einer Gegend, die früher unbelebt war, bringen. Das Fortschreiten der *Darlington*bahn im Verkehre und den Revenüen ist so interessant und für ähnliche Unternehmungen aufmunternd, dass wir es hier beizusetzen nicht anstehen:

	Steinkohlen.		Kalk und Steine.		Blei, Bauholz, Eisen und Kaufmannsgüter.		Postkutschen.		Verschiedene Gegenstände und Ziegelverkauf.	Gesammteinnahme.
1825	Tonnen	Liv. st. sh. d.	Tonnen	Liv. st. sh. d.	Tonnen	Liv. st. sh. d.	engl. Meilen	Liv. st. sh. d.	Liv. st. sh. d.	Liv. st. sh. d.
Oktober	2465¼	446 15 11	.	.	234	22 11 11	.	26 1 8	.	495 9 6
November	3623¼	708 16 11	138¼	18 6 10½	.	.	.	27 0 6	.	754 4 3
Dezember	4043¼	838 8 6	85½	10 7 2	.	.	.	33 1 10	.	881 17 6
1826										
Jänner	4345½	856 9 11	.	.	500¼	33 16 11	.	27 8 6	.	917 15 4
Februar	3952½	722 18 7½	59¾	7 18 8¾	303½	30 11 6½	.	30 7 9	.	791 16 7¾
März	5227¾	1131 8 5	72¾	9 8 7	834	85 16 0½	.	39 9 2	.	1266 2 1½
April	5637¾	967 17 2	831½	114 18 3	545¼	48 15 6	.	16 13 4	.	1148 4 3¾
Mai	6786½	1231 0 11	1469¾	194 15 6	947¼	89 6 6½	.	16 13 4	.	1531 16 3½
Juni	5901¼	1081 0 7	1503½	113 1 8	1043¼	96 0 3	.	16 13 4	.	1406 15 10
Juli	4814	1014 4 6	662	75 16 7	1008½	92 7 9	3972	49 13 1	129 12 0	1361 13 11
August	3719	587 17 0	343½	41 14 4	1170¼	115 9 5	4588	64 2 0	29 9 10	838 12 7
September	7999¼	1520 4 2	817½	115 2 9	927½	96 10 10	4448	61 18 0	309 0 11	2102 16 8
Oktober	7562¼	1336 2 5	532	54 1 11	1181¾	112 13 4½	5844	73 1 0	189 3 1	1765 1 9½
November	6666¾	1152 11 9	239½	25 5 4	1176¾	118 9 7½	4098	51 4 6	87 13 4	1435 4 6½
Dezember	4945¾	1027 10 5	99½	21 15 6	1079¾	103 17 7	3156	39 13 0	2 8 1	1195 4 7
1827										
Januar	3532½	705 13 2	53¼	4 18 11	870	79 9 9	2506	28 13 4	51 10 1	870 5 3
Februar	5766¼	1044 17 6	181½	10 0 7	1036¾	96 14 7	2722	30 11 2	49 1 9	1231 5 7
März	7279¼	1420 17 3	211¾	38 18 0	898	98 8 8	3064	34 14 0	43 0 6	1626 18 5
April	7707¾	1267 10 11	976¾	128 2 1	1121	109 6 0	3262	37 4 8	120 5 4	1662 9 0
Mai	10412¼	1649 6 8	2054	247 9 5	1259¾	119 6 8	3920	45 4 2	6 18 7	2068 5 6
Juni	10041	1728 9 5	2075	263 11 5	1116½	106 9 10	3880	47 15 10	0 0 0	2147 17 11
Juli	8045½	1251 11 11	1441¼	170 2 7	1282¾	120 14 9	4360	62 19 6	28 17 10	1634 6 7
August	8240	1381 14 4	741	93 1 8	1220	112 6 5	5399	69 1 3	1 11 11	1657 15 7
September	8516	1486 17 2	698¼	102 13 —	1011½	96 — 2	5250	65 12 6	43 15 7	1794 18 5
Oktober	9291¼	1544 6 7	430¼	51 15 7½	1174	98 15 8½	4124	51 1 0	51 14 -	1797 12 11
November	9243	1540 16 5	244¾	15 14 6	922	103 10 1¼	3220	40 5 0	180 11 9	1880 17 9
Dezember	8866½	1633 1 9	504¾	30 19 6	1089¾	123 7 7	3396	39 18 6	9 7 6	1836 14 10
1828										
Jänner	8145¼	1342 14 1	292¾	9 1 1	1025¼	103 11 5	3440	38 8 -	42 15 -	1536 9 7
Februar	7450¾	1231 18 3	414	22 19 —	843	94 17 11	2848	33 6 -	93 15 -	1476 16 2
März	10184¼	1661 4 6	649½	63 3 8	925	115 4 9	3282	38 7 6	73 18 9	1951 19 2
April	12662	1866 19 2	1282½	153 9 7	943¼	107 4 10	3096	39 8 -	136 16 3	2303 17 10
Mai	14802¼	2240 10 3	1643¼	182 1 4	909¾	99 3 11	3760	47 10 3	157 6 6	2726 12 3
Juni	13842¾	2192 4 3	1612¼	213 14 2	1057¾	108 14 5	3763	51 1 0	12 9 6	2578 3 4
Juli	11588½	1735 9 8	1360¼	143 3 2	997	106 — 1	.	47 19 -	29 13 9	2062 5 8
August	9654	1557 5 7	772¾	69 2 6	886¼	100 12 10	.	50 14 -	143 6 3	1921 1 2
September	10294½	1662 9 11	738¼	109 2 10	1058	118 10 10	.	46 5 3	35 17 6	1972 6 4
Oktober	12585¾	1984 18 8	561¼	47 14 4	979¾	100 6 9	.	46 13 6	65 10 2	2245 3 5
November	10927½	1779 4 10	373¼	30 17 1	1061¼	131 — 9	.	30 11 3	163 16 -	2135 9 11
Dezember	7647¾	1366 15 7	632¾	61 3 4	955½	99 4 9	.	33 6 -	.	1560 9 8

	Steinkohlen.		Kalk und Steine.		Blei, Bauholz, Eisen und Kaufmannsgüter.		Postkutschen.		Verschiedene Gegenstände und Ziegelverkauf.	Gesammteinnahme.
	Tonnen.	Liv. st. sh. d.	Tonnen	Liv. st. sh. d.	Tonnen	Liv. st. sh. d.	engl. Meilen.	Liv. st. sh. d.	Liv. st. sh. d.	Liv. st. sh. d.
1829.										
Jänner	6921½	1169 13 4	470¼	24 5 4	704¼	76 19 11	.	31 13 6	3 — —	1305 12 1
Februar	7266¼	1178 17 9	252	14 10 8	861¾	98 1 3	.	27 — --	— 18 9	1319 8 5
März	7594¾	1337 7 9	667¼	60 — 9	923	98 13 —	.	28 16 --	7 17 8	1532 15 2
April	9380½	1413 2 —	707¾	69 13 7	686¾	75 1 10	.	28 19 --	15 2 8	1601 19 1
Mai	8328¼	1241 16 —	1160	118 17 8	927¼	97 9 1	.	33 8 --	135 18 10	1627 9 7
Juni	7848	1187 5 6	1449¾	171 10 7	808½	82 6 5	.	40 2 3	6 19 7	1488 4 4

Werden die einzelnen Rubriken in der vorstehenden nach den gedruckten Berichten copirten Tabelle summirt, so erhalten wir sowohl das Frachtquantum als die Brutto-Einnahme, welche auf dieser Bahn vom Monate Oktober 1825 bis Juni 1829, demnach in 45 Monaten statt hatten. Diess betrug nämlich:

Transportirte Steinkohlen 351755¼ Tonnen,	wofür	59428	*Liv. st.*	*7 sh.*	*4½ d.*	eingingen
„ Steine und Kalk 31507½ „	„	3524	„	11 —	1¾ —	„
„ Blei, Bauholz, Eisen u. Kaufmannsgüter 40506¾ „	„	4115	—	2 —	3¾ —	„
Die Postkutschen trugen ein	.	1819	—	10 —	5 —	
Verschiedene andere Einnahmen	.	2459	—	4 —	3 —	
Gesammteinnahme in 45 Monaten	.	71346	—	15 —	5½ —	

Hinsichtlich der Postkutschen ist hier noch zu bemerken, dass die Eigenthümer derselben an die Akziengesellschaft den Zoll von 3 d. für die zurückgelegte engl. Meile entrichten müssen, und dagegen von den Reisenden 1½ d. für die Meile im Innern des Wagens (*inside*) und 1 d. für einen Platz auf der Aussenseite des Wagens (*outside*) erheben. Das letztere beträgt im ersten Falle 17,689 kr. C. M., im zweiten aber 11,792 kr. C. M. für die N. Oe. Meile. Da man jedoch die Preise in England bei solchen Gegenständen im Durchschnitte 2½mal höher, als in Oesterreich annehmen kann, so würden auf einer Oesterreichischen Eisenbahn die Kosten nur mit 7,08 kr. und 4,72 kr. C. M. für die N. Oe. Meile anzuschlagen seyn. Gäbe es daher z. B. eine Eisenbahn zwischen Prag und Wien, von 42½ N. Oe. Meilen Länge, so wäre der Tariff für die Beförderung eines Reisenden im Innern des Wagens mit 5 fl. 1 kr. und auf der Aussenseite des Wagens mit 3 fl. 20½ kr. C. M. anzuschlagen. Der ganze Weg könnte bei Annahme einer Geschwindigkeit selbst nur von 3 Meilen in der Stunde, in 14 Stunden zurückgelegt werden. (Siehe S. 10, 3tes Beispiel).

Die Akziengesellschaft der *Darlington*bahn hat von den eingegangenen Revenüen bisher nur 5 Prozent auf die Akzien jährlich ausgezahlt und den Uiberrest zum weitern Baue der Bahn verwendet. Da man jedoch auch von dem pecuniären Vortheile dieser Unternehmung allgemein in England überzeugt ist, so stiegen die Akzien bereits im Jahre 1829 von ihrem ursprünglichen Werthe von 100 *Liv. st.* auf 185 und sie waren um diesen Preiss kaum

zu finden. Dieser vortheilhafte Stand der Unternehmung veranlasste bald eine Opposition, wie sie in solchen Fällen sehr bald in England eintritt und es bildete sich bereits im Jahre 1828 eine zweite Gesellschaft zum Baue einer solchen Eisenbahn von den Kohlengruben zunächst der Stadt *Durham* bis zu einem Punkte am Flusse *Tees*, wohin ebenfalls Schiffe gelangen können. Diese Bahn, welche den Namen *Clarence Railway* führt, soll sammt ihren Nebenbahnen eine Länge von 45 engl. Meilen erhalten und die Baukosten derselben betragen nach den Berechnungen, welche der Ingenieur *Story* bei der im Parlamente ernannten Commission im J. 1828 hierüber vorlegte, 358770 *Liv. st.*, nach den Berechnungen des Ingenieur *Leather* aber nur 243003 *Liv. st.* Die Parlamentsakte für diese Bahn wurde ungeachtet der lebhaften Opposition der *Darlington*bahngesellschaft in der Sitzung 1829 erlassen, und der Bau derselben sogleich begonnen.

§. 572.

Bald nach der Eröffnung der *Darlington*bahn wurde das bereits im J. 1822 verfasste Projekt, eine Eisenbahn von *Manchester* nach *Liverpool* zu bauen, wieder aufgenommen, und im J. 1825 von einer Gesellschaft ein Plan und Uiberschlag, den der Ingenieur *H. George Stephenson* bearbeitet hatte, dem Parlamente vorgelegt. Dieses Projekt war um so merkwürdiger, als sich zwischen *Manchester* und *Liverpool* nebst mehreren guten Landstrassen noch d r e i W a s s e r v e r b i n d u n g e n befinden, worunter vorzüglich der Canal des Herzogs von *Bridgewater*, auf welchem ein ungeheuerer Verkehr statt findet, eine allgemein als vortheilhaft bekannte Communikation darboth. Der Erbe des Herzogs, der *Marquis* von *Stafford* und die Eigenthümer der übrigen Kanäle widersetzten sich mit aller Macht dem Projekte der Eisenbahn, sie liessen den Plan und das Profil des *H. Stephenson* untersuchen, erwiesen hierin einen Messungsfehler von 40 Fuss im *Niveau*, und so wurde die Ausführung der Eisenbahn bei dem Ausschusse im Parlamente abgewiesen. Diess entmuthigte jedoch keineswegs die Unternehmer, sie wendeten sich itzt an *H. Rennie*, der unter seiner Leitung durch den Ingenieur *Vignoles* einen zweiten Plan bearbeiten liess, der *Marquis* von *Stafford* wurde auch für die Unternehmung gewonnen, unterzeichnete selbst 1000 Akzien (zu 100 *Liv. st.*), die Sache wurde neuerdings dem Parlamente vorgelegt, die *Bill* ging nun durch, und erhilt am 5ten May 1826 die königl. Sanktion. Diese *Bill* kostete der Unternehmungsgesellschaft über 40000 *Liv. st.*, ein Betrag, um welchen man in Deutschland beinahe eine gleiche Länge Eisenbahn ganz herstellen könnte. Dem Inhalte der 134 Druckseiten langen Parlamentsakte gemäss gründet sich die Unternehmung auf ein Kapital von 510000 *Liv. st.*, welches noch um 127500 *Liv. st.* vermehrt werden kann, und die Gesellschaft wurde unter andern auch verpflichtet, die Bahn in einem Stollen (*Tunnel*) unterhalb der ganzen Stadt *Liverpool* zu führen. Der Bau dieses Stollens begann im J. 1826 unter der Leitung des *H. Rennie*, welcher zuerst sieben Schächte absenken liess, um den Stollen, der eine vollkommen gerade Linie, und ein Gefäll von 1 : 48 erhalten sollte, auf mehrern Punkten anzugreifen. *H. Stephenson*, entdeckte abermal, dass die Mittellinie der Schächte von der gehörigen Richtung bedeutend und bis zu 13 Fuss abwich; die Gesellschaft entliess Herrn *Rennie* und übertrug wieder Herrn *Stephenson* die Leitung des Baues, welcher, obgleich die Bahn schon im Herbste 1830 eröffnet wurde, dennoch bis zu diesem Augenblicke in seiner vollen Ausdehnung noch nicht

ausgeführt ist. Aus dieser Ursache lassen sich auch die Baukosten der ganzen $30\frac{3}{4}$ engl. Meilen langen, durchaus doppelten Bahn noch nicht angeben; sie betrugen im Oktober 1829 bereits über 600000 *Liv. st.* und man rechnete damals, dass die ganze Unternehmung eine Million *Liv. st.* kosten würde. Es ist noch zu bemerken, dass die Regierung der Unternehmung 100000 *Liv. st.* in Schatzkammerscheinen (*Exchequer bills*) unter der Bedingung vorstrekte, dass sie mit $3\frac{1}{2}$ Prozent verzinset und jährlich 5000 *Liv. st.* zurückgezahlt werden.

Aus diesem ungeheuern Aufwande lässt sich leicht beurtheilen, dass dieser Bau zu den grossartigsten, die überhaupt je in England ausgeführt wurden, gehört, und es würde einer eigenen eben so umständlichen Darstellung, als jene über die *Menai*brücke S. 460 erwähnte, lohnen, um die ganze Grösse und Schwierigkeit dieser Unternehmung zu schildern. Die ganze Bahn geht entweder in tiefen Abgrabungen oder auf hohen Dämmen beinahe immer in gerader Linie fort; nach der Angabe des *H. Stephenson* beträgt die Krümmung bei der stärksten Curve 4 Zoll auf 22 *yards*, welches einem Krümmungshalbmesser von 2178 *yards* entspricht. Die Geleiseweite der Bahn beträgt 4 Fuss 8 Zoll engl. Maass.

Ausser dem *Tunnel* unter der ganzen Stadt *Liverpool*, welcher eine Länge von 2200 *yards*, eine Breite von 22 Fuss und eine Höhe von 17 Fuss in der Mitte der Wölbung hat, verdient noch vorzüglich die steinerne Brücke oder der *viaduct* über den *Sankey*kanal bemerkt zu werden. Da nämlich dieser Kanal mit Segelschiffen befahren wird, und die Brücke eine solche Höhe erhalten musste, dass die Schiffe ohne Niederlegung ihrer Segel unten durchgehen können, so wurde dieselbe aus 9 steinernen Bögen, deren jeder 50 Fuss Spannung hat, so angelegt, dass der Schlusstein der Bögen 65 Fuss über dem Wasserspiegel des Kanals und die Oberfläche der Bahnschienen 72 Fuss über dem gleichen Wasserspiegel liegt. Ausser diesem mit aller Solidität hergestellten Bauwerke zeichnet sich noch vorzüglich die Brücke bei *Newton* mit 4 steinernen Bögen, ein jeder von 30 Fuss Spannweite aus, dann aber verdient noch der Bau der Bahn über einen ausgedehnten Sumpf *Chat Moss* genannt, die grösste Aufmerksamkeit. Die Beschreibung aller dieser Objekte ist für unser Werk viel zu weitläufig; wir glauben jedoch, das Profil dieser Bahn hier anführen zu können. Geht man von *Manchester* aus, so hat die Bahn zuerst eine horizontale Strecke von $4\frac{1}{2}$ engl. Meilen, dann $5\frac{1}{2}$ Meilen mit dem Falle 1 : 1200, dann $6\frac{1}{2}$ Meilen mit der Steigung 1 : 880, hierauf $2\frac{1}{2}$ Meilen mit der Steigung 1 : 2640. Von hier geht auf den Berg *Rainhill* eine schiefe Fläche von $1\frac{1}{4}$ Meilen Länge mit der Steigung 1 : 96, oben ist eine horizontale Strecke von $1\frac{1}{8}$ Meilen und dann geht wider eine schiefe Fläche von $1\frac{1}{2}$ Meilen Länge mit dem Gefälle 1 : 96 herab. Hierauf folgt eine Strecke von $5\frac{7}{8}$ Meilen mit der Steigung 1 : 1092, sodann eine horizontale Strecke von $\frac{5}{8}$ Meilen Länge und zuletzt der *Tunnel* von $1\frac{1}{4}$ Meilen Länge und dem Gefälle von 1 : 48. Diess gibt zusammen eine Länge von $30\frac{1}{8}$ engl. Meilen und mit den zu beiden Seiten vorhandenen Verlängerungen der Bahn $30\frac{3}{4}$ Meilen.

Da man von dem ausserordentlichen Vortheile dieser Eisenbahn allgemein überzeugt ist, so bildeten sich bald andere Gesellschaften, welche die zu beiden Seiten der Bahn liegenden Städte durch Nebenbahnen mit der Hauptbahn in Verbindung brachten. Die erste Nebenbahn geht von *Bolton le Moors* nach *Leigh* und dann zur Hauptbahn, mit welcher sie sich bei *Kenyan* vereinigt; sie ist einfach, mit Ausweichplätzen, beinahe durchaus

in gerader Linie angelegt, hat 10 engl. Meilen Länge und kostet 80000 *Liv. st.* Die zweite Nebenbahn geht von *Warrington* bis zur Hauptbahn bei *Newton*, sie wird einfach angelegt, 6 engl. Meilen lang und ist auf 43000 *Liv. st.* angeschlagen.

§. 573.

Zu den ältern Bahnen, deren Schienen noch von Gusseisen sind, gehört die Eisenbahn von den Kohlengruben bei *Hetton* an den Fluss *Wear* bei *Sunderland*. Diese Bahn hat 8 engl. Meilen Länge, und zeichnet sich vor allen in England bisher ausgeführten Bahnen dadurch aus, dass jährlich mehr als 5 Millionen Ztr. über die ganze Länge derselben bloss durch die Kraft des Dampfes, (ohne auch nur ein Pferd zu verwenden) transportirt werden. Die Ansicht dieser Bahn und eines Dampfwagens mit den angehängten Kohlenwägen findet sich nach einer in England aufgenommenen Zeichnung auf der Tafel Nro. 36, wo die Längen der 11 Strecken, in welche die Bahn getheilt ist, zugleich mit dem Gefälle und den Steigungen einer jeden Strecke bemerkt wurde. Auf der genannten Länge von 8 engl. Meilen wird der Transport in den ebenen Strecken mit 2 Dampfwägen, auf den schiefen Flächen aber mit 6 permanenten Dampfmaschinen und 5 selbstwirkenden schiefen Flächen verrichtet. Gehen wir von dem *Hetton*kohlenwerke aus, so finden wir zuerst eine Strecke von 2541 *yards* mit 22 Fuss 9 Zoll Steigung (1 : 335,1). Hier gehen zwei Dampfwägen, an deren jedem 16 Chaldronkohlenwägen angehängt werden; die Dampfwägen gehen mit einem solchen Zuge bis an den Fuss der schiefen Fläche (I) und kehren mit 16 andern leeren Wägen zurück; sie machen in 14 Stunden 24 Fahrten und bringen daher 16 . 24 . 53 = 20352 Ztr. täglich an Ort und Stelle. Die Einrichtung dieser Dampfwägen wird im dritten Bande unsers Werkes näher angegeben. Von I bis II ist die erste schiefe Fläche von 832 *yards* Länge und 154 Fuss 6 Zoll Steigung (1 : 16,2) vorhanden; auf der Höhe befindet sich eine Dampfmaschine von 60 Pferdekräften, welche auf einmal 8 Wägen mit 8 . 53 = 424 Ztr. Kohlenladung aufzieht. Von II bis III ist die zweite schiefe Fläche von 768 *yards* Länge und 25 Fuss 6 Zoll Steigung (1 : 90,4), an deren Ende eine Dampfmaschine von 30 Pferdekräften steht. Von III bis IV ist die dritte schiefe Fläche, welche bis auf den Scheidungspunkt des Bergrückens (IV) reicht. Die Länge derselben beträgt 775 *yards*, die Steigung 115 Fuss (1 : 20,2). Auf dem Scheidungspunkte befinden sich zwei Dampfmaschinen, zusammen von 60 Pferdekräften. Vom Scheidungspunkte herab sind 5 selbstwirkende schiefe Flächen und 3 feststehende Dampfmaschinen vorhanden. Von VIII bis X gingen früher 3 Dampfwägen, deren jeder in 14 Stunden die Länge von 4350 *yards* mit 16 beladenen Chaldronwägen 10mal zurücklegte; da man jedoch fand, dass die Schienen häufig aus ihrer Lage gerückt wurden, so wird itzt die Beförderung der Wägen auf diesem Theile der Bahn durch 2 feststehende Dampfmaschinen verrichtet. Am Ende der ganzen Bahn befindet sich der Auslade-platz (*staith*), wo die Wägen durch eigene Maschinerien in die Schiffe hinabgelassen und durch ein bei ihrem Herabgehen aufgezogenes Gegengewicht, wenn sie entleert sind, wieder auf die Bahn gehoben werden. Aus der Beschreibung der Tab. 36 sehen wir, dass die Länge der Bahn von *Hetton* bis zu dem Scheidungspunkte 4916 *yards* und die Steigung 317 Fuss 9 Zoll; vom Scheidungspunkte aber bis an den *Wear*fluss die Länge der Bahn 8819 *yards* und das ganze Gefälle 522 Fuss beträgt. Für den Beobachter gewährt die Besichtigung

Tab. 36.

dieser Bahn mit ihrem lebhaften Verkehre, das grösste Interesse, und man wird noch mehr überrascht, wenn man hört, dass auf den Eisenbahnen, welche von den bei *Sunderland* liegenden Gruben die Steinkohlen zu dem Flusse *Wear* herabführen, jährlich 5 bis 600000 *Newcastle Chaldrons* oder gegen 30 Millionen Ztr. Steinkohlen transportirt werden.

§. 574.

Die Eisenbahn, welche in England unter dem Namen *Wide open Railroad* bekannt ist, und von dem Ingenieur H. *Benjamin Thompson* nach dessen *reciprocating system* angelegt wurde, gehört in Hinsicht der Vollkommenheit ihrer Ausfertigung und der Leichtigkeit der Schienen und Wägen zu den gelungensten Bauten dieser Art. Sie hat eine Länge von 17375 *yards*, wovon auf 10882 *yards* mit schiefen Flächen, die theils selbstwirkend sind, theils durch 5 feste Dampfmaschinen betrieben werden, auf der übrigen Länge aber mit Pferden gefördert wird. Wir haben bereits früher angeführt, dass die Gusseisenschienen dieser Bahn 4 Fuss Länge und 42 ℔ Gewicht haben; sie liegen hier durchaus auf hölzernen Unterlagen. Die Wägen haben nach S. 615 ein Gewicht von $12\frac{3}{4}$ Ztr. 15 ℔ und laden $26\frac{1}{2}$ Ztr. Steinkohlen. Der Durchmesser der Räder misst 30 Zoll; sie haben 8 gerade Speichen, eine zweimal getheilte Nabe, gehärteten Radkranz, gehärtete Achsen nach der S. 610 angegebenen Methode, und laufen in gleichfalls in die Schale gegossenen Lagern. Die Geleiseweite dieser Bahn beträgt 4 Fuss 6 Zoll, während die Entfernung der Mittelpunkte der zwei Radachsen nur 3 Fuss 3 Zoll misst. Im J. 1829 gingen ununterbrochen 500 Wägen auf dieser Bahn. Obgleich dieselbe erst am 22. November 1826 eröffnet wurde, so betrug doch das Frachtquantum noch in diesem Jahre 1170 *Chaldrons;* im J. 1827 von den Kohlengruben in *Fawdon* 27512, von den Gruben in *Wide open* 5326, zusammen 32838 *Chaldrons;* im J. 1828 aber von den ersten Gruben 29079, von den letzten 22414, oder zusammen 51493 *Chaldrons*. Der Transport war daher binnen zwei Jahren auf $2\frac{3}{4}$ Millionen Ztr. jährlich angewachsen und ist seit dieser Zeit gewiss noch bedeutend vermehrt worden.

§. 575.

Die zweckmässigste Verbindung eines Kanales mit Eisenbahnen findet sich in der Grafschaft *Monmouth*, und ist unter dem Namen *The Montmouthshire Canal and Tramroads* bekannt. Diese Unternehmung besteht seit beiläufig 30 Jahren, sie beruht auf 2409 Akzien zu 100 *Liv. st.* und mehreren Darlehen, und kostete laut den hierüber erschienenen gedruckten Berichten bis zum 31. März 1829 bereits 326718 *Liv. st.* 8 *sh.* Hiefür wurden folgende Objekte hergestellt: Erstens. Die *Crumlin* Kanallinie, welche von dem Hafen *Newport* 13 engl. Meilen aufwärts geht, 358 Fuss Steigung hat und 32 Schleussen zählt. Zweitens. Die *Pont-y-pool* Kanallinie geht ebenfalls von *Newport* bis zur Verbindung des *Breckon and Abergavenny* Kanals 9 Meilen hinauf und von dort noch zwei Meilen weiter; die Steigung beträgt 447 Fuss, und es sind 42 Schleussen vorhanden. Drittens. Vom obern Ende der *Crumlin* Kanallinie (*in Crumlin*) läuft der *Beaufort Tramroad* bis *Ebbw Vale* ($8\frac{1}{4}$ Meilen) und weiters höher hinauf bis zu dem *Beaufort Iron Works* ($1\frac{1}{2}$ Meilen), zusammen also $9\frac{3}{4}$ Meilen. Diese Bahn wurde zugleich mit dem Kanale und zwar einfach angelegt. Viertens. Vom obern Ende der *Pont-y-pool* Kanallinie geht der *Blaenavon Railroad*, einfach, 5 Meilen lang, der auch zugleich mit dem Kanale

angelegt wurde. Fünftens. Der *Trevil Tramroad* beginnt nahe bei den *Sirhowy furnaces* und geht bis zu *Trevil lime*; hierauf werden vorzüglich Kalksteine zu den Eisenwerken geführt, die Bahn ist 2 Meilen lang, einfach und wurde auch mit dem Kanale angelegt.

Diese zwei Kanalstrecken von 24 Meilen und die 3 Bahnen von 16¾ Meilen Länge wurden zusammen um 255871 *Liv. st.* 5 *sh.* 2 *d.* hergestellt. Später wurden noch folgende Eisenbahnen, die in den Kanal einmünden, angelegt: 6^tens^ Der *Sirhowy Tramroad* geht von den Hafen in *Newport* beiläufig 2 Meilen in doppelter Linie bis zum Parke des *Sir Charles Morgan;* im Parke eine Meile fort, welches Stück jedoch der Akziengesellschaft nicht gehört, dann 6 Meilen vom andern Ende des Parkes *Pye Corner* bis zu einem Punkte *Nine miles point* genannt (da hier eigentlich 9 Meilen Bahn endigen, wovon aber nur 8 Meilen der Gesellschaft gehören). Von diesem Punkte hat die *Sirhowy* Compagnie den *Tramroad* auf ihre Kosten 15 M. weit bis zu den *Sirhowy furnaces* fortgesetzt; diese Strecke bildet daher eine Bahn für sich. Die ganze Länge der *Sirhowy* Bahn beträgt auf diese Weise $2 + 1 + 6 + 15 = 24$ Meilen. Die Kosten der obengenannten 8 Meilen doppelter Bahn dieses *Tramroad* betrugen 47895 *Liv. st.* 18 *sh.* 6 *d.*, und sind vorzüglich wegen des über den Fluss *Ebbw* und über einen Sumpf erbauten steinernen *viaduct* von beinahe 1 engl. Meile Länge so sehr gestiegen. Auch diese ganze Bahn wurde vor 25 Jahren erbaut. 7^tens^ der *Aberbeeg Tramroad* wurde im Jahre 1828 beendigt, er ist einfach, 6¾ Meilen lang und kostete 8473 *Liv. st.* 1 *sh.* 1 *d.* 8^tens^ der *Crumlin Tramroad* ist einfach angelegt, 6¾ Meilen lang, kostete 12093 *Liv. st.* 5 *sh.* 6 *d.* und wurde am 28^ten^ September 1828 eröffnet. 9^tens^ der *Pont-y-pool Tramroad* von 2 Meilen Länge, einfach angelegt; geht von dem Vereinigungspunkte des *Brekon* und *Pont-y-pool* Kanales entlängst dem letztern Kanale bis zu seinem höchsten Punkte, und wurde desshalb angelegt, weil in diesen zwei Meilen Kanalstrecke das Wasser häufig im Sommer fehlt und die Schiffahrt unterbrochen wird; die Eisenbahn wurde demnach parallel zu dem Kanale hergestellt.

Aus diesem Ausweise ersieht man, dass die ganze Unternehmung aus 24 engl. Meilen Kanal und aus 39¾ engl. Meilen Eisenbahn besteht, wofür im Ganzen 326718 *Liv. st.* 8 *sh.* bis zum letzten März 1829 ausgelegt waren. Die Zollgebühr (*tonnage*) wird von der Gesellschaft auf dem Kanale und den damit in Verbindung stehenden Eisenbahnen mit dem gleichen Betrage erhoben, und zwar wird für die Tonne und die engl. Meile Folgendes entrichtet: 3 *d.* für Eisen, Blech, Eisenwaaren und Bauholz; 1½ *d.* für Steinkohlen, 2½ *d.* für Ziegeln und Schieferplatten; 1¼ *d.* für Eisenerz. Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass die Akziengesellschaft nach dem Inhalte der Parlamentsakte diese Zollsätze erhöhen darf, wenn ihre reinen Einnahmen nicht 10 prozent von dem Kapitale der ursprünglichen Akzien betragen.

Die Wägen, welche diese Bahn befahren, wiegen bloss 10 Zentner, und laden 2½ Tonnen Kohlen; sie sind daher die leichtesten Bahnwägen, die man in England findet; würde hier mit Dampfwägen oder auf schiefen Flächen sehr schnell gefördert, so müssten auch die Wägen weit stärker und daher schwerer seyn. Jene Wägen, welche 3 bis 3½ Tonnen Eisen laden, wiegen 12½ Zentner. Die 4 gusseisernen Räder der Bahnwägen sind bloss 26 Zoll hoch und wiegen 5 Zentner; der Preiss eines Wagens beträgt hier 9 *Liv. st.* 10 *sh.*

Damit die Räder der Wägen die Schienen nicht zu bald abschleifen und sich einschneiden, müssen sie der Parlamentsakte zufolge im neuen Zustande wenigstens ½ Zoll Breite haben. Auf der *Sirhowy* Bahn werden immer 13 Kohlenwägen zusammengehängt und durch 4 hintereinander gespannte Pferde fortgezogen; wenn jedoch die Schienen nach einem Regen nass sind, ziehen dieselben Pferde mit Leichtigkeit 14 Wägen, in beiden Fällen die beladenen Wägen abwärts der Bahn und die leeren aufwärts.

Diese ganze Unternehmung zeichnet sich durch die zweckmässige Leitung ihrer Direktion ganz vorzüglich aus. Nach der gedruckten, der Generalversammlung der Akzionäre am 6ten Mai 1829 vorgelegten Rechnung betrug die reine Zolleinnahme vom 1ten Oktober 1828 bis letzten März 1829 die Summe von 22543 *Liv. st.* 10 *sh.*, wogegen die Kosten für alle Reparaturen an den Kanälen und der Bahn während derselben Zeit 3146 *Liv. st.* 11 *sh.* 2 *d.*, für alle Beamte 622 *Liv. st.* 11 *sh.*, für die Schleussenmeister 265 *Liv. st.* 10 *d.* und für alle diversen Auslagen 566 *Liv. st.* 12 *sh.* 2 *d.* zusammen also 4600 *Liv. st.* 15 *sh.* 2 *d.* oder 20 Prozent der reinen Zolleinnahme ausmachten. Der ausgedehnte Verkehr, welcher auf diesen Eisenbahnen und Kanälen statt findet, ergibt sich aus nachfolgendem Ausweise über das Frachtquantum, welches in den 3 Jahren, die mit dem 31ten März 1827, 1828 und 1829 endigten, hierauf verführt wurde.

	18²⁶/₂₇		18²⁷/₂₈		18²⁸/₂₉	
	Eisen	Steinkohlen	Eisen	Steinkohlen	Eisen	Steinkohlen
	Englische Tonnen.		Englische Tonnen.		Englische Tonnen.	
Juni Quartal	15668	100218	22534	75471	25708	105279
September „	10908	100416	21350	118967	27039	120392
Dezember „	21563	121078	21950	124427	27818	126747
März „	21642	88626	22618	100132	28161	119257
Zusammen	69781	410338	88452	418997	108726	471675
	480119 Tonnen		507449 Tonnen		580401 Tonnen	

Es wurden also in dem letzten Jahre 11,6 Millionen engl. Zentner Steinkohlen und Eisen auf dieser Bahn verführt, worunter das Eisen 2,2 Millionen Ztr. betrug. Hieraus mag man sich einen Begriff von dem ungeheuern Verkehre in jener Gegend machen.

§. 576.

Wir haben bereits S. 620 erwähnt, dass die *Rumney* Eisenbahn (*Tramroad*) zur Verbindung der grossen Eisenwerke in *Rumney* mit der *Sirhowy* Eisenbahn angelegt wurde. Die Parlamentsakte zum Baue dieser Bahn ging in der Sitzung von 1825 durch, und der Bau wurde sogleich auf Kosten der vier Unternehmer, nämlich der zwei Brüder *Bailey*, des *Sir Charles Morgan* und Herrn *Thompson* begonnen, mit vieler Thätigkeit fortgesetzt, und im März 1828 die Bahn eröffnet. Die Länge derselben beträgt 21¼ engl. Meilen und sie vereinigt sich bei dem Punkte *Pye Corner* mit der *Sirhowy* Eisenbahn. Diese Bahn ist in einer sehr gut gewählten Linie entlängst dem Flüsschen *Rumney* fortgeführt, hat im Ganzen den Fall von 756 Fuss, welcher beinahe gleichförmig auf ihrer Länge vertheilt ist. Unter den *Tramroads* ist diese Bahn unstreitig die vollkommenste,

sie ist einfach angelegt, hat gusseiserne S. 620 beschriebene Schienen, die mit 4 *Liv. st.* 4 *sh.* für die Tonne zur Bahn geliefert (2 Gulden 19 kr. C. M. für ein N. Oe. Zentner) bezahlt wurden. Die ganze Auslage des Baues betrug 51000 *Liv. st.*, worunter jedoch keine Wägen begriffen sind, da sie sämmtlich den Eigenthümern der Kohlen- und Eisenwerke, welche die Bahn befahren, gehören. Die Gesellschaft erhebt bloss einen Zoll (*Tonnage*), welcher für die Tonne und die Meile bei Steinkohlen 1 *d.*, bei Eisen 2 *d.*, bei Kaufmannsgütern 3 *d.* beträgt. (Diess macht im ersten Falle 0,65 kr. im zweiten 1,30 kr. im dritten 1,95 kr. für den N. Oe. Ztr. und die N. Oe. Meile). Auch auf dieser Bahn ziehen 4 hintereinander gespannte Pferde 11 Wägen oder auch 5 Pferde 13 Wägen, deren jeder mit 2½ Tonnen Kohlen beladen ist. Der Verkehr auf dieser Bahn ist sehr bedeutend und betrug in der Woche unserer Besichtigung derselben am 25ten August 1829 an Kohlen 510 Tonnen, an Eisen 153 Tonnen, zusammen also 663 Tonnen. Da die Bahn von den Eigenthümern der Hochöfen zu *Rumney* noch eine Meile verlängert wird, so wird das Frachtquantum sodann noch bedeutend zunehmen.

§. 577.

Unter den *Tramroads* verdient noch jener von *Gloucester* nach *Cheltenham*, dessen Beschreibung wir bereits S. 620 lieferten, bemerkt zu werden. Die Parlamentsakte für diese Bahn erging im April 1809, sie wurde jedoch erst im J. 1812 eröffnet. Die Bahn beginnt bei dem *Bassin* des grossen *Berkeley* und *Gloucestershire Canal* in der Stadt *Gloucester*, und geht entlängst der Landstrasse bis *Cheltenham*. Die ganze Länge der Bahn beträgt 9¾ Meilen, sie ist einfach angelegt, jedoch mit so viel Ausweichplätzen, dass man von einem auf den andern sehen kann. Die ursprünglichen Kosten wurden durch 350 Akzien zu 100 *Liv. st.* gedeckt, jedoch später noch gegen 15000 *Liv. st.* Darlehen verwendet. Die Kohlenwägen wiegen 10 Ztr., kosten hier 10 *Liv. st.* und werden mit 2 Tonnen beladen. Im J. 1827 betrug das Frachtquantum bloss 26446 Tonnen, die Reparaturen der Bahn und die Regie verursachten bedeutende Auslagen und der Preis der Akzien war demnach im J. 1829 von 100 auf 78 herabgegangen. Diese Unternehmung ist daher als kein Muster zu empfehlen.

§. 578.

Die Bahnen, welche in den letztern Jahren in Schottland angelegt wurden, sind sämmtlich *Railroads*. Hierunter zeichnet sich vorzüglich der *Edinburgh* und *Dalkeith Railroad* durch die Grösse seiner Anlage aus; derselbe geht zunächst *Edinburgh* in einem *Tunnel* von 576 *yards* Länge, der sich unter dem Felsen *Arthur seat* endigt, und wird auf seiner weitern Strecke über einen Damm (*fisherow embankement*) von 1200 *yards* Länge und 24 Fuss Höhe geführt. Die ganze Länge desselben beträgt 9¼ engl. Meilen, wovon die ersten 6 Meilen doppelt angelegt sind. Diese Bahn war im J. 1829 im Baue begriffen und man berechnete ihre Kosten ohne Wägen auf 100000 *Liv. st.*

Zunächst *Glasgow* wurden ebenfalls in den letztern Jahren mehrere sehr gute Bahnen erbaut. Hierunter gehört vorzüglich der *Monkland and Kirkintilloch Railway*, welcher im Juni 1824 angefangen und im August 1827 eröffnet wurde. Die Länge desselben beträgt ohne die Nebenbahnen 12 Meilen und sie ist einfach angelegt. Die Baukosten von 42000 *Liv. st.* wurden durch 800 Akzien zu 50 *Liv. st.* und durch ein Darlehen von

2000 *Liv. st.* gedeckt. Diese Eisenbahn wurde mit aller möglichen Sorgfalt ausgeführt und die Unterhaltung derselben nach ihrer Eröffnung auf 5 Jahre an einen Pächter um 30 *Liv. st.* für die engl. Meile jährlich verpachtet. Da diese Eisenbahn in Opposition mit zwei Kanälen gebaut wurde, so setzte die Akziengesellschaft den Zoll (*Tonnage*) bei Steinkohlen auf 7 *d.* für die Tonne und 10½ Meilen (oder auf 0,43 kr. für den N. Oe. Ztr. und die N. Oe. Meile) herab, in Folge dessen die Steinkohlen in *Glasgow* von 12 *sh.* auf 5,5 *sh.* für die Tonne im Preise herabfielen, allein demungeachtet gab die Bahn im ersten Jahre nicht bloss 5 Prozent Zinsen, sondern noch gegen 1500 *Liv. st.* Uiberschuss und dieser Gewinn steigt immer mehr, da das Frachtquantum beständig zunimmt, und im J. 1829 im Durchschnitte wochentlich 3000 Tonnen betrug. Mit dieser Bahn in Verbindung jedoch von einer zweiten Gesellschaft erbaut, steht der *Ballochney Railway* von 3¼ Meilen Länge, der *Clerkston Railway* von 1½ Meilen Länge, der *Whiterig Railway* von ¾ Meilen Länge. Diese drei Bahnen wurden seit dem J. 1826 erbaut, sie sind einfach und kosten 20000 *Liv. st.* Eine dritte Gesellschaft baute noch folgende Nebenbahnen: den *Coltness and Wishaw Railway*, einfache Bahn, 13 engl. Meilen lang mit 60000 *Liv. st.* und den *Glasgow and Garnkirk Railway*, doppelte Bahn, 8½ Meilen lang, ebenfalls mit 60000 *Liv. st.* Beide Bahnen waren jedoch im J. 1829 noch nicht beendigt. Die Geleiseweite bei allen diesen Bahnen beträgt 4 Fuss 6 Zoll im Lichten, die Wägen haben 30 Zoll hohe gusseiserne Räder, wiegen 19 Ztr. und laden 2¾ Tonnen Kohlen.

Nebst diesen Bahnen sind in der Nähe von *Glasgow* noch der *Kilmarnok Railway* von 11 Meilen Länge, dem Herzog von *Portland* gehörig, der *Androssan and Johnston Railway* von 5 Meilen Länge, und in grösserer Entfernung von hier der *Dundee and Newtyle Railway* von 12 Meilen Länge und mehrere andere, in den letztern Jahren erbaute Bahnen zu bemerken.

§. 579.

In England sind unter den Eisenbahnen noch vorzüglich zu bemerken:

Der *Cromford and High Peak Railway* von 33 engl. Meilen Länge. Diese Bahn beginnt bei dem *Cromford*-Kanale unweit dem Badeorte *Matlock* und geht über das Gebirge bei *Buxton* vorbei bis zu dem *Peak Forest Canal* bei *Whaley*; sie dient daher zur Verbindung dieser zwei Kanäle, da der Bau der letztern wegen der bedeutenden Höhe zu kostspielig wäre; diese Höhe des Scheidungspunktes beträgt nämlich 995 Fuss über dem Wasserspiegel des *Cromford*kanals und 741 Fuss über jenen des *Peak Forest*kanals. Der Entwurf für diese Bahn wurde von dem Ingenieur *Josias Jessop* im J. 1824 verfasst und für eine doppelte Bahn auf 149206 *Liv. st.* 16 *sh.* 8 *d.* berechnet. Die ganze Bahn besteht theils aus horizontalen oder beinahe horizontalen Strecken, dann aber aus 10 steilen schiefen Flächen, wovon eine 266 Fuss vertikale Höhe und die bedeutende Steigung 1 : 7,5 hat. Diese Bahn war im J. 1829 noch nicht beendigt und dürfte weit mehr kosten, als ursprünglich berechnet war, nachdem hier sehr häufig Felsensprengungen von 40 und mehr Fuss Tiefe und Dämme von gleicher Höhe vorkommen.

Der *Bristol and Gloucestershire Railway* wurde im Jahre 1829 begonnen; derselbe erhält eine Länge von 9 engl. Meilen, und ist mit 44994 *Liv. st.* 14 *sh.* 2 *d.* berechnet. Die Bahn wird einfach gelegt, die Schienen sind wie bei allen neuern

Bahnen von gewalztem Eisen, 15 Fuss lang, und wurden im J. 1829 um 9 *Liv. st.* für die Tonne nach *Bristol* geliefert, während das Gusseisen zu den *Pedestals* mit 7 *Liv. st.* für die Tonne bezahlt wurde. Man hoffte mit dieser Bahn im J. 1830 fertig zu werden, und hatte den Plan, sie später bis *Gloucester* und *Birmingham* fortzusetzen.

Unter die grössten neuern Projekte gehört jedoch die Eisenbahn von *Newcastle upon Tyne* nach *Carlisle*, welche die ganze Breite von England von Osten nach Westen durchschneidet, und den Zweck hat, einen grossen Theil jener Güter zu befördern, die bisher auf dem grossen *Forth and Clyde Canal* in Seeschiffen transportirt wurden. Diese Bahn erhält eine Länge von 62 engl. Meilen und geht ohne eine schiefe Fläche (*Inclined Plane*) zu übersteigen über das Gebirge von 418 Fuss Höhe; die gewöhnliche Steigung beträgt 1 : 500 bis 1 : 2346, und nur auf einer Länge von 7⅞ engl. Meilen in der Nähe des Scheidungspunktes ist ein Gefäll von 1 : 128,8 vorhanden. Die Parlamentsakte für diese Bahn erhielt am 22. May 1829 die königliche Genehmigung; der Bau sollte im Frühjahre 1830 beginnen; das unterzeichnete Akzien-Kapital betrug vorläufig 300000 *Liv. st.*, es wird jedoch ohne Zweifel weit mehr benöthigt werden.

Es gibt viele Eisenbahnen in England, welche bisher noch nirgends beschrieben sind, ungeachtet sie sehr lange bestehen, und ein vielfältiger Verkehr auf ihnen statt findet. Hierunter dürfen wir vorzüglich die *Mansfield and Pinxton* Eisenbahn rechnen, welche in Folge einer Parlamentsakte vom Jahre 1817 unter Leitung des Ingenieurs *Josias Jessop* im J. 1818 erbaut und am 25ten März 1819 eröffnet wurde. Diese Bahn beginnt bei dem Hafen des Kanals in *Pinxton* und geht in ziemlich gerader Richtung bis zu der Stadt *Mansfield*. Von *Pinxton* bis zum Scheidungspunkte des Gebirges hat die Bahn eine Länge von 7300 *yards* und 229 Fuss Steigung (im Mittel 1 : 95,6). Von diesem Scheidungspunkte bis *Mansfield* ist die Länge der Bahn 6342 *yards* und das Gefäll 137,7 Fuss, folglich der mittlere Fall 1 : 138,2. Die ganze Bahn besteht aus langen geraden Linien und 28 dazwischen liegenden kurzen Krümmungen, wovon die schärfste einen Halbmesser von 27 Klftr. hat. Nach Eröffnung der Bahn wurde der Transport mit 160 Wägen, wobei die Räder sich um die Achsen und die Achsen auch in den Lagern drehen konnten, begonnen; man fand jedoch, dass die Wagenräder, obgleich die Fracht auf der ganzen Bahn bloss mit Pferden statt findet, sehr häufig das Geleise verliessen und aus der Bahn herausstiegen; es wurden daher alle Räder auf den Achsen festgenagelt, wie wir bereits S. 610 bemerkt haben. Die Baukosten dieser Bahn wurden durch 228 Akzien, jede zu 100 *Liv. st.* und durch einige kleine Darlehen gedeckt. Der Verkehr, welcher auf derselben statt fand, betrug in den ersten 7 Jahren, die immer vom 25ten März an gerechnet werden:

Jahr	Steinkohlen.		Kalk u. Gyps.		Steine u. Ziegel.		Sand.		Eisen, Metall u. Blei.		Bauholz und Schiefer.		Knochen und Dünger.		Kaufmannsgüter.		Getreide und Malz.		Thon u. Mennig.		Jährliche Einnahme.		
	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Ton.	Zt.	Liv. st.	sh.	d.
1820	11687	6½	1635	15	869	19½	484	4	127	12¼	147	14	143	15	569	9½	84	19¼	0	0	1360	17	4
1821	14377	8	1739	1	3319	17	2590	18	324	15¾	267	4½	500	6¾	1057	12¾	258	13¼	180	7	1387	14	2¼
1822	28130	10	1256	9	3515	8½	5868	6	268	10½	298	6	760	16½	1171	3¾	404	1½	196	17	1546	14	10¾
1823	46818	0	527	5	3309	15	3317	14	393	9¾	504	18	989	11	1077	13½	452	17½	215	5	1829	10	3
1824	49436	12	723	10	2800	18	2918	13½	358	19	882	9½	581	1	1208	6	730	13½	76	14	2365	3	8½
1825	39145	14	842	5	3708	16	2270	1	377	15	742	12	527	4½	1269	1	632	13¾	28	17	2150	0	6½
1826	38097	5	771	11	3433	8	3588	18	229	19¼	712	15	754	7½	1242	5¼	984	18	15	0	2066	12	5½
Zsm.	227692	15½	7495	16	20958	2	21038	14½	2081	1½	3555	19	4257	2¼	7595	11¾	3548	16¾	713	0	12706	13	4½

Wir sehen hieraus, dass 298936 Tonnen 19¼ Ztr. in den ersten 7 Jahren, demnach in einem Jahre im Durchschnitte 42705 Tonnen 5½ Ztr. oder 774674 N. Oe. Ztr. verführt wurden, welches allerdings diese Unternehmung für England nicht sehr vortheilhaft darstellt. Der mitgetheilte Detail-Ausweis über den Verkehr mag jedoch als Belege dienen, dass auf den englischen Eisenbahnen seit vielen Jahren nicht bloss Steinkohlen, sondern auch Kaufmanns- und andere Güter transportirt wurden.

Es wäre für unsern Zweck viel zu weitläufig, wenn wir noch von mehreren andern in England ausgeführten Bahnen die Details anführen wollten. Es gibt in der That eine so grosse Menge Eisenbahnen, vorzüglich von kürzerer Länge, bei Steinkohlenwerken, Steinbrüchen, Eisenwerken, Magazinen und überhaupt an allen Orten, wo bedeutende Transporte statt finden, dass ihre genaue Aufzählung und Beschreibung beinahe unmöglich ist. Eine grosse Anzahl Bahnen wird alle Jahre neu angelegt und mehrere werden wieder abgetragen und die Schienen an andern Orten verwendet, wenn die Transporte in dieser Gegend aufgehört haben.

§. 580.

Auch in **Frankreich** haben die Eisenbahnen, jedoch erst in den letztern Jahren ihre Anwendung gefunden. Die erste Bahn von einiger Ausdehnung wurde in Folge der königl. Konzession vom 28ten Februar 1823 von *St. Etienne* nach *Andrezieux* an der *Loire* durch Herrn *Baunier* erbaut, und am 1ten Juni 1827 eröffnet. Das Kapital zum Baue dieser Bahn betrug 320 Akzien zu 5000 Franken, oder 1600000 Franken; die Länge der Bahn beträgt 21150 *mètres*, wovon der grösste Theil einfach gelegt ist. Die Schienen sind von Gusseisen und eben so wie die Wägen nach englischer Konstrukzion. Auf der Bahn wurden nach Angabe des Herrn *Baunier* vom 1ten Oktober 1827 bis 1ten Oktober 1828 im Ganzen 66000 Tonnen transportirt.

Die 2te französische Eisenbahn, welche unter die grössten Unternehmungen gehört, die in diesem Lande durch Akziengesellschaften unternommen wurden, geht von *St. Etienne* nach *Lyon*; sie wird zu Folge der k. Ordonnanz vom 7ten Juni 1826 ausgeführt, und das Baukapital ist nach den am 7ten März 1827 genehmigten Statuten der Gesellschaft auf 10 Millionen Franken festgesetzt; es wird jedoch wahrscheinlich weit mehr betragen. Die ganze Bahn hat eine Länge von 53306 *mètres*, sie wird doppelt und mit gewalzten Schienen angelegt, und man hofft, wenn sie vollendet ist, jährlich 170000 franz. Tonnen bahnabwärts und 80000 Tonnen bahnaufwärts über das Gebirge (von 191,2 N. Oe. Klafter Höhe) mit Verwendung von 35 Dampfwägen zu transportiren.

Die 3te Eisenbahn unter dem Namen *Chemin de la Loire* bekannt, geht entlängs der *Loire* von *Andrezieux* bis *Roanne* und bezweckt die durch einen grossen Theil des Jahres unterbrochene Flusschiffahrt zu ergänzen. Der Bau dieser Bahn wurde im Jahre 1828 begonnen; sie wird eine Länge von 67000 *mètres* erhalten, mehrere Dampfmaschinen werden bei schiefen Flächen hiebei angelegt, und man hofft mit 6 bis 7 Millionen Franken die Unternehmung auszuführen. Nebstbei gibt es einige kleinere Eisenbahnen in Frankreich, die jedoch genau so konstruirt sind, wie es in England der Fall ist.

§. 581.

Die vorstehenden mit allem Detail gelieferten Beschreibungen der englischen Eisenbahnen setzen Jedermann in die Lage, diesen Gegenstand genau zu beurtheilen, und be-

stimmte Anschläge über die Frachtkosten für jede Lokalität und für die verschiedenen hiebei zu verwendenden Kräfte zu verfassen. Die Vermessung und Nivellirung der Gegend, wo eine Eisenbahn angelegt werden soll, geben die weitern Anhaltspunkte für die Bau- und Unterhaltungskosten der Bahn. Die letztern müssen immer weit weniger betragen, als es bei der Unterhaltung der Landstrassen (Chauseen) der Fall ist, da der Damm einer einfachen Eisenbahn gewöhnlich nur 10 Fuss, einer doppelten Bahn aber nur 18 bis 20 Fuss Breite an seiner Oberfläche erhält, und weiter bei einer Eisenbahn nie dieselbe Zermalmung des Schotters und der Steine eintritt, als es durch das Fuhrwerk auf den Landstrassen der Fall ist *). Wir wiederholen die bereits früher gemachte Bemerkung, dass sich im Allgemeinen über die Bau- und Unterhaltungs-Kosten keine bestimmten Anschläge machen lassen, dass demnach auch die Vortheile, welche eine Eisenbahn gewährt, lediglich erst nach den für jede Gegend verfassten Uiberschlägen, wozu unsere Beschreibungen hinlängliche Anhaltspunkte darbiethen, beurtheilt werden müssen. Es versteht sich von selbst, dass bei diesen Anschlägen immer das auf den Eisenbahnen zu transportirende Frachtquantum eine vorzügliche Rücksicht erfordert. Wir haben gesehen, dass auf den in England als vortheilhaft bekannten Eisenbahnen immer ein Quantum von einigen Millionen Zentner jährlich verführt wird. Dieses Frachtquantum dürfte an sehr wenigen Punkten in Deutschland vorhanden seyn, allein die Baukosten unserer Bahnen

*) Seit mehreren Jahren werden von den k. k. Provinzial-Strassenbau-Directionen Ausweise verfasst, wie viel die Unterhaltung einer Meile Strasse von 4000 Wiener-Klafter Länge jährlich betrage; unter diesen Kosten sind die Auslagen für die Strassenbau-Direction und sämmtliche bei den Strassen angestellte Beamte und zeitweilig oder tagweise verwendete Personen, die Auslagen für das Beschotterungs-Materiale und die Einräumung desselben, für die Unterhaltung aller Brücken, Kanäle und andere zu den k. k. Strassen gehörigen Werke uud alle andern Auslagen jeder Art begriffen, die in diesem Jahre dem k. k. Strassenfonde zufallen, mit blosser Ausnahme jener Auslagen, welche die neue Herstellung einer Strasse oder die Umbauung einer schon bestehenden Strasse betreffen. Die Ausweise haben für nachstehende 4 Jahre folgende Resultate geliefert:

Jahr	Provinz	Gesammtlänge der k. k. Strassen.		Unterhaltungskosten	
		in N. Oe. Meilen	und Klaftern	im Ganzen in Conv. Gulden	jährlich per Meile in Gulden
1824	Böhmen	324	$3022\frac{4}{6}$	392201	1208
	Ob der Enns	51	3457	81658	1574
	Salzburg	66	1283	118047	1780
1825	Böhmen	329	$2918\frac{1}{2}$	376406	1142
	Ob der Enns	51	3457	79019	1524
	Salzburg	66	1283	104928	1582
1826	Böhmen	342	738	390522	1141
	Ob der Enns u. Salzburg	118	1093	154415	1306
1827	Böhmen	350	565	443111	1266
	Ob der Enns u. Salzburg	119	785	165311	1387

Die Breite dieser Strassen ist zwar sehr ungleich, kann aber im Durchschnitte mit fünf N. Oe. Klafter angenommen werden.

werden nie auf die ungeheuern in England hiefür verausgabten Summen steigen. Die Entgegenhaltung der Baukosten, der Fracht- und Unterhaltungskosten, so wie des zu erwartenden Frachtquantums und der Frachtlöhne muss den Werth einer solchen Unternehmung für jede Gegend bestimmen.

§. 582.

Nach den vorstehenden Beschreibungen lassen sich die Vortheile beurtheilen, welche der Transport auf einer Eisenbahn im Vergleiche mit unserer gewöhnlichen *Chaussée*fracht gewährt; diese bestehen nämlich in Folgendem: Erstens. Der Widerstand, welcher bei den Landstrassen durch den aufgetragenen Schotter und durch Steine entsteht, ist bei Eisenbahnen ganz und gar nicht vorhanden, weil die Oberfläche derselben gewöhnlich 3 bis 4 Zoll über dem Zugpfade liegt, und von Steinen, wenn ja welche darauf kommen, immer gereinigt wird. Zweitens. Der Widerstand des Einsinkens in Geleise ist bei den Eisenbahnen ebenfalls nicht vorhanden, indem die Oberfläche der Schienen eine harte und ebene Fläche darstellt. Drittens. Die Zusammenfügungen der Schienen verursachen zwar einen kleinen Widerstand, wenn hiebei eine Sehiene über die andere etwas hervorsteht, oder in die Bahnlinie etwas gerückt ist, allein dieser Umstand findet nur bei minder gut gelegten Bahnen statt und hängt daher lediglich von dem Grade der Genauigkeit ab, welche man bei dem Legen und bei der nachherigen Unterhaltung (*Conservation*) der Bahn verwendet. In dieser Hinsicht gewähren die Schienen desto mehr Vortheile, je länger sie sind, und daher ist die Einführung gewalzter Schienen von 15 bis 18 Fuss Länge, welche gegenwärtig bei den neuern Bahnen in England angewendet werden, eine wesentliche Verbesserung und Vervollkommnung.

§. 583.

Der einzige Widerstand, welcher auf diese Art bei Eisenbahnen statt findet, ist demnach nur die Reibung an den Achsen, und da dieser Widerstand, wie wir §. 531 gesehen haben, ohnediess unbedeutend ist, so folgt, dass ein Pferd auf jeder Eisenbahn auch eine viel grössere Ladung fortzubringen im Stande sey, als es auf unsern Strassen der Fall ist. Bei den englischen Bahnwägen ist gewöhnlich der Durchmesser der gusseisernen Räder $2\,A = 30$ Zoll und der Durchmesser der schmiedeisernen Achsen $2\,a = 2$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll; das Gewicht des Wagenkastens, welches eigentlich die Reibung auf den Achsen bewirkt, beträgt gewöhnlich 15 Ztr., und da man die Reibung von Eisen auf Eisen $= \frac{1}{8}$ annehmen kann, so ist der Widerstand eines mit $2\frac{1}{2}$ Tonnen oder 50 engl. Ztr. beladenen Wagens $= \frac{m\,.\,a\,.\,Q}{A} = (15 + 50)\,\frac{1}{8} \cdot \frac{2\frac{1}{4}}{30} = 0{,}609$ engl. Ztr.; es kann daher ein mittelmässig starkes Pferd ohne Anstand 2 Wägen, die zusammen 5 Tonnen oder 91 N. Oe. Zentner Ladung haben, in einem Tage 4 bis 5 N. Oe. Meilen weit führen. Da man nun auf unsern gewöhnlichen Strassen nur 10 Ztr., wenn sie eben fortlaufen, für jedes vorgespannte Pferd von mittlerer Stärke rechnet, so folgt, dass auf Eisenbahnen ein Pferd wenigstens neunmal so viel als auf *Chausséen* führen könne. Man hat jedoch in den letztern Jahren noch wesentliche Verbesserungen an den englischen Bahnwägen und zwar vorzüglich in ihren Lagern und in einer besondern Art der Härtung der Achsen und Radkränze eingeführt und es dadurch dahin gebracht, dass ein Pferd auf den gegenwärtig bestehenden

vollkommensten englischen Bahnen 8 bis 10 Tonnen fortzuführen im Stande ist, wenn die Bahn entweder horizontal ist, oder auch nur solche Steigungen hat, über welche das Pferd ohne besondere Anstrengung seiner Zugkraft gelangen kann.

Dass der Widerstand auf den neuesten englischen Bahnen so gering sey, ergibt sich aus dem einfachen Versuche, bei welcher Neigung der schiefen Fläche die Wägen von selbst herabzulaufen anfangen. Diese Neigung findet man bei der *Darlington*-Bahn $= \frac{1}{160}$, woraus nunmehr ganz einfach folgt, dass ein mittelmässig starkes Pferd, welches die Kraft von 100 N. Oe. Pfund hat, auch eine Last von 160 N. Oe. Zentner (an Wägen und Ladung) auf einer horizontalen Bahn zu ziehen, und damit den Weg von täglich 4 bis 5 N. Oe. Meilen zurückzulegen im Stande ist. Die genaue Berechnung hierüber haben wir Seite 618 geliefert.

Zur Untersuchung des Widerstandes $\frac{m.a.Q}{A}$ bei verschiedenen Geschwindigkeiten hat H. *Roberts* in *Manchester* folgenden Versuch gemacht: Ein gusseisernes Rad A B von 3 Fuss Durchmesser wurde an seinem Umfange nach der Gestalt der Bahnschienen abgedreht, hierauf ein kleiner Eisenbahnwagen C gesetzt und mit dem Kraftmesser D verbunden. Nun wurde das Rad durch das Seil E, F mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegt und es zeigte sich, dass der Widerstand immer derselbe bleibe. Fig. 9. Tab. 30.

§. 584.

Da der Widerstand der Eisenbahnen, wenn sie in ebenen Gegenden geführt sind, an der wälzenden Bewegung und an der Reibung an den Achsen liegt, so lassen sich Mittel angeben, diese Widerstände noch weiter zu vermindern. Das erste Mittel hiezu ist die Vergrösserung der Räder, allein diess hat seine bestimmte Gränze. Ein gusseisernes Rad, welches, wie es bei allen neuern Rädern der Fall ist, in die Schaale gegossen (*Case hardened*) wird, kann nicht leicht grösser als 3½ Fuss im Durchmesser gemacht werden, weil es sich sonst im Gusse sehr leicht wirft, und nun wegen seiner Härte an der Oberfläche nicht mehr abgedreht werden kann. In dieser Hinsicht haben schon mehrere engl. Ingenieurs für räthlich erachtet, die Räder von Holz, 4½ bis 5 Fuss hoch und mit eisernen Reifen versehen, auszuführen, allein die bisherigen Bemühungen der Werkleute haben es noch nicht dahin gebracht, Räder von solcher Höhe mit der hinreichenden Festigkeit herzustellen, und man ist daher noch immer bei den gusseisernen Rädern stehen geblieben. Sodann ist noch zu bemerken, dass alle hohen Räder zwar bei der Fahrt auf Ebenen grosse Vortheile gewähren, allein bei der Fahrt über Anhöhen und Berge wegen ihres grössern Gewichtes den Zug erschweren, wobei auch die Wägen einer grossen Unbequemlichkeit beim Aufladen unterliegen, mehr schwanken und leichter umfallen können. In dieser Hinsicht erscheint es weit zweckmässiger, die bekannten Friktionsrollen auch hier anzuwenden. Wenn man nämlich zwei Räder so übereinander stellt, dass der Wagenkasten, welcher die Ladung enthält, an der Achse des obern Rades hängt, folglich die Achse des obern Rades allein die eigentliche Last trägt, und wenn ferner die Peripherie des obern Rades auf der Nabe des untern Rades (welches nunmehr auf der Eisenbahn geht) sich bewegt, so wird durch diese Ver- Fig. 10, 11 und 12.

Fig. 10, 11 u. 12. Tab. 30. dopplung der Räder der Friktionswiderstand bedeutend vermindert. Nennen wir nämlich den Halbmesser des obern Rades A und den Halbmesser seiner Achse a; den Halbmesser des untern Rades B und den Halbmesser der Nabe, worauf das obere Rad läuft b, die Last $= Q$, und den Reibungskoeffizienten $= m$, so ist $\frac{m \cdot a \cdot Q}{A}$ die Grösse der Kraft, welche man an der Peripherie des obern Rades anwenden müsste, um z. B. dieses Rad, worauf die Ladung hängt, mit der Hand zu drehen. Allein das obere Rad läuft auf der Nabe des untern Rades und wird an seiner Peripherie eben so fortgetrieben, als ob es Zähne hätte, welche von den Triebstöcken der Nabe mit der gleichen Kraft und Geschwindigkeit umgedreht werden. Nennen wir diese Kraft, nämlich $\frac{m \cdot a \cdot Q}{A} = \mathfrak{K}'$ und die Kraft an der Peripherie der untern Räder $= \mathfrak{K}$, so erhalten wir aus der Gleichung $\mathfrak{K} \cdot B = \mathfrak{K}' \cdot b$ die zur Fortschaffung der Last Q nöthige Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \cdot \frac{b}{B} = \frac{m \cdot a \cdot Q}{A} \cdot \frac{b}{B}$. Es ist daher der gewöhnliche Reibungswiderstand $m \cdot Q \cdot \frac{b}{B}$ noch mit dem Verhältniss der Hebelsarme des Friktionsrades multiplizirt, und daher ist die Reibung in derselben Proportion verringert.

Beispiel. Es sey der Reibungskoeffizient $m = \frac{1}{8}$, der Durchmesser der Nabe des untern Rades $2b = 5$ Zoll und der Durchmesser des untern Rades $2B = 30$ Zoll, der Durchmesser der obern Achse $2a = 2\frac{1}{2}$ Zoll und der Durchmesser des obern Rades $2A = 30$ Zoll, so ist der Reibungswiderstand auf die Peripherie des untern Rades reduzirt $= \frac{1}{8} \cdot Q \cdot \frac{5}{30} \cdot \frac{2{,}5}{30} = \frac{Q}{576}$ und die nöthige Zugkraft, welche ohne Friktionsräder $= m \cdot \frac{b}{B} \cdot Q = \frac{1}{8} \cdot \frac{2{,}5}{30} Q = \frac{Q}{96}$ seyn würde, beträgt nur $\frac{5}{30} \cdot \frac{Q}{96} = \frac{Q}{576}$. Wir sehen also, dass ein Pferd itzt eine viel grössere Last zu ziehen im Stande ist, als es bei einem Wagen mit einfachen Rädern statt findet; da nun diese Verhältnisse sich noch vortheilhafter annehmen lassen, so folgt, dass ein Pferd auf einer horizontalen Eisenbahn eine Last von 500 bis 800 und noch mehr Zentner fortzubringen im Stande ist. Wägen mit doppelten über einander liegenden Rädern sind daher, wenn sie mit der gehörigen Genauigkeit ausgefertigt werden, auf horizontalen Bahnen sehr vortheilhaft, auf geneigten Bahnen wird aber dieser Vortheil geringer, da man das grössere Gewicht dieser Räder über die schiefe Fläche fortschaffen muss.

§. 585.

Die vorstehende Berechnung gilt eigentlich nur für den Fall, wenn die horizontale Bahn in einer geraden Linie angelegt ist. Man hat es inzwischen zur grössern Solidität der Bahnwägen in England nach den §. 560 angegebenen Einrichtungen für zweckmässig erachtet, immer zwei Räder auf einer gemeinschaftlichen Achse zu befestigen, so dass die Räder gemeinschaftlich mit der Achse herumgehen. Diese Konstrukzion hat für gerade Bahnlinien unstreitige Vortheile; allein in gekrümmten Bahnen entsteht nun ein Widerstand, dessen Grösse sich auf folgende Art berechnen lässt: Fig. 13. Es sey E F das äussere und C D das innere Bahngeleise, so dass die Länge des Weges in der Mitte der Bahn, welcher eigentlich von dem Wagen zurückgelegt werden

muss, $AB = l$ ist. Ist der Krümmungshalbmesser der mittlern Bahn $OB = r$ und die halbe Breite der Geleise $AC = b$, so verhält sich $AB : CD = r : CO$ oder $l : CD = r : r - b$, woraus $CD = l\left(\frac{r-b}{r}\right) = l - \frac{l.b}{r}$, d. h. CD ist um $\frac{l.b}{r}$ kleiner als der mittlere Bogen AB. Die äussere Bahnlinie ist um dieselbe Grösse $\frac{l.b}{r}$ grösser als die mittlere, denn es verhält sich $EF : AB = EO : AO$ oder $EF : l = r + b : r$, woraus $EF = l + \frac{l.b}{r}$. Fig. 13. Tab. 30.

Weil nun die Räder auf ihren Achsen fest sind und der Mittelpunkt des Wagens bloss die Länge der Bahn l beschreibt, so muss das äussere Rad um $\frac{l.b}{r}$ auf der äussern Bahn vorwärts geschoben und das innere Rad um die Grösse $\frac{l.b}{r}$ auf der innern Bahn zurückgehalten werden. Hiedurch entsteht nun eine Reibung zwischen der Oberfläche des Rades und den Bahnschienen, wodurch die Bewegung des Rades an seiner Peripherie aufgehalten wird. Da diese Reibung von jener an den Achsen wesentlich verschieden ist, indem hier weder an eine Abglättung noch an eine Einschmierung der sich reibenden Flächen gedacht werden kann, so wollen wir sie zum Unterschiede mit μ bezeichnen. Nennen wir die Last, welche auf zwei Rädern liegt $= Q$, so wird $\frac{Q}{2}$ der Druck auf ein Rad und die Reibung wird $\frac{\mu.Q}{2}$ seyn. Wird dieser Widerstand mit dem Raume, $\frac{l.b}{r}$, welchen er beschreibt, multiplizirt, so erhalten wir $\frac{\mu.Q}{2} \times \frac{l.b}{r}$ als Bewegungsmoment für das innere, und eben so $\frac{\mu.Q}{2} \times \frac{l.b}{r}$ als Bewegungsmoment für das äussere Rad. Werden diese beiden addirt, so gibt $\mu.Q \times \frac{l.b}{r}$ das Bewegungsmoment des ganzen Widerstandes für zwei an einer Achse befestigte Räder.

Die Zugkraft der Pferde, welche zur Uiberwältigung dieses Widerstandes nothwendig ist, sey $\mathfrak{K}$. Da diese in gleicher Zeit den Raum l beschreibt, so ist ihr Bewegungsmoment zur Gewältigung des Reibungswiderstandes $\mathfrak{K}.l$. Setzen wir diese beiden Bewegungsmomente einander gleich, so ist $\mathfrak{K}.l = \mu.Q\frac{l.b}{r}$, woraus $\mathfrak{K} = \mu.Q.\frac{b}{r}$ folgt. Die Zugkraft, welche zur Uiberwältigung des Widerstandes in den Bahnbiegungen nothwendig ist, wird demnach desto grösser, je grösser der Reibungskoeffizient μ an und für sich ist, dann je grösser die Ladung Q, je grösser die Geleiseweite 2 b und je kleiner der Krümmungshalbmesser r der Bahn ist. Dieser Widerstand ist aber der Bewegung der Räder auf der Bahn parallel und wenn die Richtung der Zugkraft ebenfalls der Bahn parallel ist, so hat diese Kraft nebst dem Widerstande $\frac{m.a.Q}{A}$ noch diesen Widerstand zu gewältigen; wir haben demnach die nöthige Zugkraft für einen zweirädrigen Wagen, der mit der Last Q beschwert ist $= \frac{m.a.Q}{A} + \frac{\mu.Q.b}{r} = Q\left(\frac{m.a}{A} + \frac{\mu.b}{r}\right)$.

§. 586.

Wir wollen nun den Widerstand für einen vierrädrigen Wagen bestimmen. Wenn ein solcher Wagen sich auf der geraden Bahn befindet, so stehen die Räder parallel zur Bahn und die Achsen winkelrecht auf dieselbe. Wird aber dieser Wa-

Fig. 14. Tab. 30. gen auf eine gekrümmte Bahn übersetzt, so stehen die Räder parallel zur Sehne A B, auf dieselbe Sehne stehen auch die Achsen winkelrecht, und es ist ein Spielraum nothwendig, oder die Entfernung der Räder auf ihren Achsen muss um so viel kleiner seyn, als nöthig ist, damit der Wagen zwischen der Geleiseweite noch stehen könne. Weil aber die Zugkraft parallel zur Mittellinie der Bahn wirkt, so macht dieselbe mit der Sehne A B und auch mit der Fläche der Räder den Winkel D A Z = dem Winkel M C A. Zur Bestimmung des Winkels M C A setzen wir die Länge der Sehne A B = e, die Grösse des Krümmungshalbmessers A C = r und das Perpendikel C M = p, so ist Sin A C M $= \frac{e}{2 . r}$ und Cos A C M $= \frac{p}{r}$.

Es sey nun die Kraft, welche den Wagen nach der Richtung der Sehne bewegen muss A D = $\mathfrak{K}$. Zerlegen wir diese in Z A nach der Richtung der Bahn und in F A nach der Richtung des Krümmungshalbmessers, so ist Z A $= \mathfrak{K} . \frac{p}{r}$ und F A $= \mathfrak{K} . \frac{e}{2 r}$. Durch die Kraft F A wird das Vordergestell des Wagens sammt den Rädern an die Bahn mit der Kraft $\frac{\mathfrak{K} . e}{2 r}$ angedrückt, und hieraus entsteht an der Peripherie der Räder abermal der Reibungswiderstand $\frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 . r}$. Die Zugkraft hat demnach nebst dem Widerstande $Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)$ noch den Widerstand der Reibung $\frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 r}$ zu überwinden. Daraus folgt Z A $= \frac{\mathfrak{K} . p}{r} = Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right) + \frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 r}$, folglich $\mathfrak{K} = \frac{Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)}{\frac{p}{r} - \frac{\mu . e}{2 r}}$. Setzen wir nun die Zugkraft, welche die Pferde zur Bewegung des ersten Paares Räder anwenden müssen = P, so ist die Zugkraft nach der Richtung der Bahn P $= \frac{\mathfrak{K} . p}{r} = \frac{Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)}{1 - \frac{\mu . e}{2 p}}$.

Das zweite Paar Räder, welches gleichfalls mit der Ladung Q belastet angenommen wird, würde zu seiner Bewegung nach der Richtung der Bahn gleichfalls die Zugkraft $Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)$ nöthig haben; weil aber das zweite Paar Räder von der im A angebrachten Kraft K nach der Richtung B A gezogen wird, und diese Richtung abermal mit der Bahn den Winkel B C M macht, so müssen wir diese Kraft K = B J in B L nach der Richtung des Halbmessers und B G nach der Richtung der Bahn zerlegen. Hievon ist B L $= \frac{K . e}{2 r}$ und B G $= \frac{K . p}{r}$. Durch die erste Kraft werden die Räder an die Bahn angedrückt und erfahren demnach den Reibungswiderstand $\frac{\mu . K . e}{2 r}$. Wir müssen also zur Kraft B G $= Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)$ noch die Kraft $\frac{\mu . K . e}{2 r}$ hinzusetzen und erhalten demnach die Kraft B G nach der Richtung der Bahn oder $\frac{K . p}{r} = Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right) + \frac{\mu . K . e}{2 r}$;

daraus folgt die Zugkraft B J oder $K = \frac{Q\left(\frac{m.a}{A} + \frac{\mu.b}{r}\right)}{\frac{p}{r} - \frac{\mu.e}{2r}}$. Diese Kraft B J oder N A zieht Fig. 14. Tab. 30.
die vordern Räder in A nach derselben Richtung zurück, und da dieselbe mit der Zugkraft A Z einen Winkel macht, so müssen wir sie abermal in die Kraft A R nach der Richtung des Krümmungshalbmessers $= \frac{K.e}{2r}$ und in die Kraft $AO = \frac{K.p}{r}$ nach der Richtung der Bahn zerlegen. Daraus folgt, dass die Zugkraft der Pferde nebst der Kraft $AO = \frac{K.p}{r}$ noch die Kraft $\frac{\mu.K.e}{2r}$, oder zusammen $K\left(\frac{p}{r} + \frac{\mu.e}{2r}\right)$ zu ziehen habe.

Setzen wir nun statt K den gefundenen Werth, so folgt die Kraft, welche zum Zuge des hintern Paares Räder nothwendig ist $P' = Q\left(\frac{m.a}{A} + \frac{\mu.b}{r}\right)\left\{\frac{\frac{p}{r} + \frac{\mu.e}{2r}}{\frac{p}{r} - \frac{\mu.e}{2r}}\right\}$. Für das erste Paar Räder ist die Zugkraft $P = \frac{Q\left(\frac{m.a}{A} + \frac{\mu.b}{r}\right)}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}$, wird diess addirt, so erhalten wir die nöthige Zugkraft für den mit 2 Q belasteten 4rädrigen Wagen $= 2\,Q\left(\frac{m.a}{A} + \frac{\mu.b}{r}\right)\left\{\frac{1 + \frac{\mu.e}{4p}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\right\}$.

Beispiel. Die englischen Wägen haben gewöhnlich ein eigenes Gewicht von $\frac{5}{4}$ Tonnen oder 25 engl. Ztr. und sie werden mit $2\frac{1}{2}$ Tonnen oder 50 Ztr. beladen, es beträgt daher $2Q = 75$ engl. Ztr. (6802,5 N. Oe. ℔), die Durchmesser der Räder haben 30 Zolle und die Achsen $2\frac{1}{4}$ Zoll. Demnach ist $\frac{a}{A} = \frac{3}{40}$. Die Entfernung der beiden Achsen e ist $= 39$ Zoll $= 3\frac{1}{4}$ Fuss. Der Widerstand des Wagens $\frac{m.a}{A}$ kann bei den neuern Bahnen im Durchschnitte auf $\frac{1}{160}$ angeschlagen werden. Die Weite der Geleise 2b beträgt in England 4 Fuss 6 Zoll, demnach ist $b = 2$ Fuss 3 Zoll.

In Bezug auf den Reibungscoeffizienten μ hat eine grosse Anzahl genauer Versuche, welche am ständ. technischen Institute zu Prag mit Rädern und Bahnschienen von Schmiedeisen im Modelle angestellt wurden, wobei sowohl die Räder als die Bahnschienen möglichst abgeglättet wurden, gezeigt, dass der Coeffizient μ mit $\frac{1}{4}$ in Anschlag zu nehmen sey.

Setzen wir den Krümmungshalbmesser $r = p = 67$ Klafter $= 402$ Fuss, wie es bei den kleinsten Krümmungen der *Darlington* Bahn der Fall ist, so beträgt die nöthige Zugkraft

$$= 75\left(\frac{1}{160} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\frac{1}{4}}{402}\right)\left\{\frac{1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{13}{4.402}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{4.402}}\right\} = \left(\frac{75}{160}1 + \frac{30}{67}\right)\left(1 + \frac{1}{330}\right) \text{ Zentner}$$

$= 52{,}5\ (1 + 0{,}4508)$ engl. ℔ $= 76{,}2$ engl. ℔.

Hieraus ersehen wir, dass die Zugkraft, welche auf der geraden Bahn nur 52,5 englische Pfund beträgt, am meisten durch diejenige Reibung vermehrt werde, welche aus dem Fortschieben der Räder auf den Bahnschienen entsteht und welche in unserm Falle $\frac{30}{67}$ von

52,5 ℔ oder 23,5 ℔ beträgt. Dagegen beträgt der Widerstand der Seitenreibung nur $\frac{1}{330}$ tel von 52,5 ℔ oder 0,2 ℔.

§. 587.

Um diesen bedeutenden Widerstand zu vermeiden, legt man in England an jenen Orten, wo eine starke Wendung der Wägen nöthig wird, **Drehscheiben** an, auf welchen der Wagen gewöhnlich um einen Viertelkreis oder um einen andern bestimmten Winkel herumgedreht und dann in der zweiten Bahn wieder weiter geführt wird. Solche Drehscheiben sind in grosser Anzahl an dem Ende der *Darlington* Bahn in der Stadt *Stockton*, dann vorzüglich an dem *Wear*flusse in *Sunderland* bei den Endpunkten der Eisenbahnen, wo die Wägen in die Seeschiffe ausgeladen werden, etc. vorhanden. Die Zeichnung und Beschreibung der Drehscheiben haben wir bereits geliefert.

Wenn jedoch Eisenbahnen um mehrere Berge herumgeführt werden müssen, weil es zu kostbar seyn würde, diese Berge mit Stollen zu durchgraben, und die Thäler entweder mit Dämmen anzuschütten oder mit Bahnen auf hohen steinernen oder hölzernen Brücken fortzuführen, so gibt es noch ein Mittel, welches darin besteht, dass die Bahnen in krummen Linien geführt und die Wägen so eingerichtet werden, dass ein jedes Rad sich unabhängig von den übrigen in die Richtung der Bahn stellen, folglich die Zugpferde keinen andern Widerstand zu überwältigen haben, als denjenigen, den dieselben Wägen auf der geraden Bahn erfahren würden, wozu nur noch derjenige geringe Widerstand kommt, der aus der Wendung dieser Wägen entsteht, und nur bei einer grossen Anzahl Wägen, die von einer und derselben Zugkraft geführt werden, eine Bedeutung erhalten kann. Dieses Mittel besteht nämlich darin, dass ein jedes Paar Räder um seinen Reihnagel sich möglichst frey wenden kann, und die hintern Räder ihre fortschreitende Bewegung von einer Kraft erhalten, die von dem Reihnagel des ersten Paares Räder ausgeht und mittelst einer Langwiede oder einer andern Vorrichtung bloss dem Reihnagel des hintern Paares Räder mitgetheilt wird.

Damit die beiden Achsen l m und i k eines Wagens um die in ihrer Mitte befindlichen Reihnägel q und r so viel verwendet werden können, als es nothwendig ist, um jedes Rad in einer gekrümmten Bahn genau parallel zu derselben zu stellen, dienen die eisernen Gabelstützen a c b und d f e, welche mit ihren Endpunkten a, b, e und d an den Achsstöcken mittelst Schrauben befestigt werden, und an ihren Spitzen c und f, wo sie in der Mitte des Wagens gegeneinander liegen, mit gabelförmigen Ansätzen c g und f h versehen sind. Diese Gabeln c g und f h liegen, ohne mit einander verbunden zu seyn, blos übereinander auf einer darunter in die Quere oder in die Länge angebrachten Schiene, welche einen Stift trägt, wodurch die Gabeln und mittelst derselben die Achsen der Räder so gewendet werden, dass sie mit der Mittellinie der Bahn einen rechten Winkel bilden, folglich die Räder parallel zur Bahn fortlaufen. So starke Krümmungen, bei welchen schon eine bedeutende Verschiebung des Stiftes n nothwendig wird, kommen jedoch nur bei dem Ausladen und Verführen der Wägen in die Magazine u. dgl. vor; bei der Anlage der Eisenbahnen auf freyem Felde vermeidet man aber alle solchen starken Krümmungen und die Krümmungshalbmesser haben dann immer noch eine Grösse, wobei die Verschiebung der Gabeln und die Verdrehungswinkel der Räder nicht bedeutend gross werden. In diesem Falle wird der Stift n auf die Querschiene o p befestigt,

Fig. 15. Tab. 30.

und anstatt des Spielraumes, den man zwischen den vorstehenden Rändern der Räder und der Bahn gewöhnlich zu geben pflegt, werden die Gabeln zu beiden Seiten des Stiftes so viel erweitert, als nöthig ist, damit die hervorstehenden Ränder der Räder dem Anstreifen an die krumme Linie der Bahnschienen nachgeben, und auf solche Art ohne besondern Druck parallel zur Bahnlinie gestellt und in der Richtung der Bahn fortlaufen können.

Es sey z. B. der Krümmungshalbmesser der vorkommenden Bahnkrümmungen $Oq = Or = R = 50$ Klftr. $= 300$ Fuss; die Entfernung der beiden Reihnägel q und r $= 4$ Fuss $= 48$ Zoll, so verhält sich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke n w q und w q O', der nöthige Spielraum $nw : wq = wq : wO'$, folglich wenn wir $wq = 2$ Fuss, $nO' = 2.300$ Fuss und $nw = x$ setzen, so ist $x : 2 = 2 : 2.300 - x$, woraus x sehr nahe $= \frac{4}{2.300}$ Fuss oder 0,08 Zoll folgt. Fig. 16. Tab. 30.

Man sieht von selbst, dass dieser unbedeutende Spielraum zu beiden Seiten des Nagels n für den richtigen Gang der Räder keinen Nachtheil verursacht, aber den wichtigen Vortheil gewährt, dass die Räder dem Anstreifen an die krumme Bahnlinie nachgeben, und auf solche Art sich von selbst in diejenige Richtung stellen, die der Bahn angemessen ist. Weil der Boden des Wagenkastens die Verdrehung der Achsen um die Reihnägel nicht hindern darf, so ist der Reihnagel mit einem starken Kopfe p versehen, auf welchen die Kipfstöcke des Wagens in der Mitte aufsitzen; damit aber der Wagenkasten sich weder auf der einen, noch auf der andern Seite wenden und aufsitzen könne, so sind von aussen die Stützen s s angebracht. Fig. 17.

§. 588.

Bei Eisenbahnen ist es gewöhnlich der Fall, dass ein Pferd mehrere hintereinander hängende Wägen fortzieht; die Anzahl dieser Wägen beträgt bei einer horizontalen Bahn gewöhnlich 2 oder 3; wenn jedoch die Bahn einen Fall hat, so werden, je nachdem der Fall grösser ist und das Gefälle $\frac{h}{l}$ dem Widerstandscoeffizienten $\frac{m.a}{A}$ näher kommt, 4 bis 8 und auch noch mehr zusammengehängte Wägen von einem einzelnen Pferde fortgezogen. Wenn die Eisenbahnwägen durch die Kraft eines Dampfwagens in Bewegung gesetzt werden, so werden gewöhnlich 24, ja auch 30 solche Wägen an einander gehängt. Die Länge eines englischen Wagens beträgt 10 bis 12 N. Oe. Fuss, die Länge der Verbindungsketten zwischen zwei Wägen beiläufig 1 Fuss; es folgt daher, dass ein Zug von 24 bis 30 Wägen eine Länge von 50 bis 60 Klafter auf der Bahn einnehmen müsse. Wenn nun die Bahn eine ganz gerade Linie bildet, so verursacht die Anzahl der Wägen keinen andern Widerstand, als dass die Zugkraft nach Verhältniss der Anzahl Wägen grösser genommen werden muss; wenn aber die Bahn Krümmungen hat, so macht die Richtung der Zugkraft einen Winkel mit den angehängten Wägen und dieser Winkel wird desto grösser, je grösser die Krümmung oder je kleiner der Krümmungshalbmesser der Bahn ist und je entfernter die Wägen von der Zugkraft (dem Dampfwagen oder Pferde) sich befinden. Nehmen wir an, der Halbmesser einer gekrümmten Bahn betrage 19 N. Oe. Klafter, so wird die halbe Länge des Kreises oder eine halbe Peripherie 60 Klafter lang seyn; wenn daher ein Dampfwagen 30 zusammenhängende Wägen fortschieben soll, so wird der 30ste Wagen in einer gänzlich entgegengesetzten Richtung mit dem Dampfwagen

bewegt werden müssen; der Dampfwagen würde ihn daher nach der verlangten Richtung ganz und gar nicht zu bewegen im Stande seyn, wenn diese Bewegung nicht mittelst der dazwischen liegenden Wägen auf eine ähnliche Art, wie es bei der Bewegung einer Last mittelst eines um einen festen Cylinder geschlungenen Seiles der Fall ist, bewirkt würde. Wir wollen nun sehen, welcher Rechnungsanschlag über diese grössere Zugkraft gemacht werden könne.

Fig. 18. Tab. 30. Es sey A B C D die Mittellinie zwischen den zwei Geleisen a b c d und $\alpha\beta\gamma\delta$, worauf die Räder des ersten Wagens a α, b β, dann des zweiten Wagens c γ, d δ und die Räder aller folgenden Wägen laufen. Es sey O der Mittelpunkt der Kreislinie A B C D und die Wägen seyen so gebaut, dass ein jedes Paar Räder um den Reihnagel in ihrer Mitte vollkommen beweglich und die Räder auf ihren Achsen nicht befestigt seyen, sondern jedes um seine Achse frey herum laufen könne. Auf solche Art werden also die Räder durch die vorstehenden Ränder in jeder Krümmung gewendet werden und mit der Richtung der Bahn parallel fortlaufen können. Die Entfernung der vordern Achse von der hintern $AB = CD \ldots\ldots$ sey $= e$. Die Länge der Verbindungsstange vom hintern Reihnagel B des ersten Wagens zum vordern Reihnagel C des zweiten Wagens und bei den folgenden Wägen sey $= E = BC \ldots\ldots$ Die Ladung auf einen Wagen sammt dem Gewichte des Wagens wollen wir $= 2\,Q$ setzen, wodurch also auf jedem Paar Räder aα, bβ, cγ, dδ...... die Last Q liegt; der mittlere Krümmungshalbmesser der Bahn B O sey $= r$ und endlich sey die Zugkraft in der Richtung der Tangente zu dem Punkte A oder in der Linie A Z angebracht.

Die Kraft, welche zur Bewegung der ersten Achse aα oder zur Bewegung des ersten Paares Räder erfordert wird, beträgt nach §. 583 bei einer Eisenbahn $\frac{m.a.Q}{A}$. Es ist offenbar, dass diese Kraft hinreicht, das erste Paar Räder sowohl in der geraden als in der krummen Bahn fortzuziehen, wenn die Räder sich frey um ihre Achsen drehen können und die Achse selbst um einen Reihnagel beweglich ist, folglich die Räder durch die vorstehenden Ränder jederzeit parallel zur Bahn gestellt werden und in dieser Richtung ungehindert ihre Bewegung fortsetzen können. Die Zugkraft hat demnach bei dem ersten Paar Räder nur den Widerstand $\frac{m.a.Q}{A}$ zu gewältigen, so wie es bei jeder geraden Bahn angenommen wird. Das folgende Paar Räder wird zwar von den vorstehenden Rändern gleichfalls in die Richtung der Bahn gestellt, aber die Zugkraft, welche von dem ersten Reihnagel entweder mittelst einer Langwiede A B oder auf eine andere Art mitgetheilt wird, wirkt in der Richtung der beiden Reihnägel A B, und diese bildet mit der Bahn sowohl in A als in B den Winkel $GBM = BOM = w$, wenn man aus dem Mittelpunkte O die Linie O M $(= p)$ winkelrecht auf A B zieht. Die Zugkraft nach der Richtung B A oder die Linie B N sey $= \mathfrak{K}$, so wird diese Kraft offenbar in $BG = \mathfrak{K}'$ nach der Richtung der Bahn zerlegt und dann in $BH = \mathfrak{K}''$ winkelrecht auf die Bahn, womit die Achse bβ das Rad an die innere Bahnschiene in b drückt und daselbst eine Reibung verursacht. Wir erhalten nun die Proportionen:

$BN : BG = BO : OM$ oder $\mathfrak{K} : \mathfrak{K}' = r : p$, woraus $\mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{K}.p}{r}$, ferner

BN:BH = BO:BM oder $\mathfrak{K} : \mathfrak{K}'' = r : \frac{e}{2}$, woraus $\mathfrak{K}'' = \frac{\mathfrak{K} . e}{2 r}$. Aus der zweiten Kraft $\mathfrak{K}''$, Fig. 18. Tab. 30.
welche das Rad an die innere Bahnschiene andrückt, entsteht eine Seitenreibung $= \frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 r}$ und da nun die Kraft $\mathfrak{K}'$, welche senkrecht auf das zweite Paar Räder wirkt, sowohl den Widerstand $\frac{m . a . Q}{A}$, als auch die Seitenreibung bei b überwältigen muss, so ist $\mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{K} . p}{r} = \frac{m . a . Q}{A} + \frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 r}$, woraus $\mathfrak{K} = \frac{m . a . Q}{A\left(\frac{p}{r} - \frac{\mu . e}{2 r}\right)} = \frac{m . a . Q . r}{A\left(p - \frac{\mu . e}{2}\right)}$. Nun zieht aber die Kraft des Pferdes nicht in der Richtung der Linie B A, sondern in der Richtung der Linie A Z; diese Linie bildet mit A B abermal den Winkel F A B = w; es zerfällt sonach wieder die nach der Richtung A E wirkende mittlere Kraft $\mathfrak{K}$ in eine F A = $\mathfrak{K}'''$, welche nach der Richtung der Zugkraft A Z wirkt, und in eine zweite Kraft A L = $\mathfrak{K}''''$, womit die vordere Achse a α bei α das Rad an die Bahn drückt und daselbst eine Seitenreibung verursacht. Nun haben wir wieder $\mathfrak{K} : \mathfrak{K}''' = r : p$ und $\mathfrak{K}''' = \frac{\mathfrak{K} . p}{r}$; ferner $\mathfrak{K}'''' : \mathfrak{K} = \frac{e}{2} : r$ und $\mathfrak{K}'''' = \frac{\mathfrak{K} . e}{2 r}$. Aus diesem letztern Drucke entsteht die Reibung $\frac{\mu . \mathfrak{K} . e}{2 r}$ bei α, und sonach erhalten wir die Kraft, welche das Pferd zur Bewegung des zweiten Paares Räder anwenden muss $= \mathfrak{K}\left(\frac{p}{r} + \frac{\mu . e}{2 r}\right)$ und für $\mathfrak{K}$ seinen für die Bewegung des hintern Paares Räder gefundenen Werth $\frac{m . a . Q . r}{A\left(p - \frac{\mu . e}{2}\right)}$ substituirt, diese Kraft $= \frac{m . a . Q . r}{A\left(p - \frac{\mu . e}{2}\right)}\left(\frac{p}{r} + \frac{\mu . e}{2 r}\right) = \frac{m . a . Q}{A}\left\{\frac{p + \frac{\mu . e}{2}}{p - \frac{\mu . e}{2}}\right\}$. Die Zugkraft für das erste Paar Räder war $= \frac{m . a . Q}{A}$, folglich erhalten wir die Zugkraft für den ersten Wagen, wenn wir die zwei Grössen addiren $= \frac{m . a . Q}{A} + \frac{m . a . Q}{A}\left\{\frac{p + \frac{\mu . e}{2}}{p - \frac{\mu . e}{2}}\right\} = \frac{m . a . Q}{A}\left\{\frac{p - \frac{\mu . e}{2} + p + \frac{\mu . e}{2}}{p - \frac{\mu . e}{2}}\right\} = \frac{m . a . 2 Q}{A\left(1 - \frac{\mu . e}{2 p}\right)}$. Man erhält sonach die Zugkraft des ersten Wagens, wenn man das Gewicht des Wagens sammt den Rädern (2 Q) mit der Grösse $\frac{m . a}{A}$, welche den Widerstandscoeffizienten der Wägen auf der geraden Bahn vorstellt, multiplizirt, und das Produkt noch mit $1 - \frac{\mu . e}{2 p}$ dividirt.

§. 589.

Im §. 586 haben wir die nöthige Zugkraft für einen vierrädrigen Wagen, dessen vier Räder auf den Achsen fest sitzen und dessen Gesammtgewicht 2 Q beträgt $= \frac{2 Q\left(\frac{m . a}{A} + \frac{\mu . b}{r}\right)}{1 - \frac{\mu . e}{2 p}}\left(1 + \frac{\mu . e}{4 p}\right)$ gefunden. In diesem Ausdrucke ist der letzte Faktor beinahe = 1. Vergleichen wir nun diesen Ausdruck mit dem gegenwärtigen

für die beweglichen Räder, so sehen wir, dass diese beiden Ausdrücke darin verschieden sind, dass zur Grösse $\frac{m.a}{A}$ bei festen Rädern noch die Grösse $\frac{b.\mu}{r}$ zugesetzt ist. Setzen wir wie zuvor $2Q = 75$ Ztr., die Grösse $\frac{m.a}{A} = \frac{1}{160}$ und $\frac{\mu.b}{r} = \frac{1}{357}$, so folgt, dass bei Rädern mit unbeweglichen Achsen die Zugkraft $\frac{2Q.m.a}{A}$ noch um $\frac{2Q.\mu.b}{r}$ vermehrt werde. In dem oben angeführten Beispiele war $\frac{m.a}{A} = \frac{1}{160}$, $\frac{\mu.b}{r} = \frac{1}{357}$, folglich beträgt der Zusatz nahe $\frac{4}{9}$ von derjenigen Kraft, welche ein Wagen mit beweglichen Rädern erfordert. Diese Vermehrung kann sehr bedeutend werden, wenn r sehr klein genommen wird, wäre z. B. $r = 30$ Klafter, so wird die nöthige Zugkraft wegen der Unbeweglichkeit der Räder verdoppelt; wäre $r = 15$ Klafter, so wäre eine dreifache Zugkraft anzuwenden u. s. w. Diess beweisst hinlänglich, welche bedeutenden Vortheile für die Zugkraft durch Anwendung beweglicher Räder entstehen.

§. 590.

Wir übergehen nun zu dem Falle, wo **zwei oder mehrere Wägen hintereinander** von einer gemeinschaftlichen Kraft gezogen werden. Wenn der zweite Wagen in der Richtung C S gezogen würde, so wäre die zu seiner Bewegung erforderliche Zugkraft $\mathfrak{K} = \frac{m.a.2Q}{A\left(1 - \frac{\mu.e}{2p}\right)}$. Die Entfernung der hintern Achse des ersten Wagens zur vordern Achse des zweiten Wagens sey $BC = E$, und die aus dem Mittelpunkte O auf B C winkelrecht gezogene $OM' = p'$, so ist die Kraft in der Richtung der Bahn, wie es im §. 588 für das zweite Paar Räder nachgewiesen wurde

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}\left\{\frac{1 + \frac{\mu.E}{2p'}}{1 - \frac{\mu.E}{2p'}}\right\}.$$

Um nun $\mathfrak{K}'$ auf die Zugkraft bei A zu übersetzen, haben wir wieder die Gleichung $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}'\left\{\frac{1 + \frac{\mu.e}{2p}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\right\}$, welche dieselbe wie die vorige ist, nur dass hier e statt E und p statt p' erscheint. Multipliziren wir diese drei Gleichungen mitsammen, so erhält man **die Kraft, welche das Pferd für den zweiten Wagen anwenden** muss

$$\mathfrak{K}'' = \frac{\frac{m.a.2Q}{A}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\left\{\frac{1 + \frac{\mu.E}{2p'}}{1 - \frac{\mu.E}{2p'}}\right\}.\left\{\frac{1 + \frac{\mu.e}{2p}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\right\}.$$

Auf gleiche Weise findet man die Zugkraft, welche das Pferd für **den dritten Wagen anwenden** muss

$$= \frac{\frac{m.a.2Q}{A}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\left\{\frac{1 + \frac{\mu.E}{2p'}}{1 - \frac{\mu.E}{2p'}}\right\}^2.\left\{\frac{1 + \frac{\mu.e}{2p}}{1 - \frac{\mu.e}{2p}}\right\}^2.$$

Wenn in einem Zuge allgemein n Wägen zusam-

menhängen, so ist die Kraft für den n^{ten} Wagen $= \frac{\frac{m.a.2Q}{A}}{1-\frac{\mu.e}{2p}} \left\{\frac{1+\frac{\mu.E}{2p'}}{1-\frac{\mu.E}{2p'}}\right\}^{n-1} \cdot \left\{\frac{1+\frac{\mu.e}{2p}}{1-\frac{\mu.e}{2p}}\right\}^{n-1}$.

Zur Bestimmung der Zugkraft, welche für alle an einander gehängte Wägen nothwendig ist, wollen wir $\left\{\frac{1+\frac{\mu.E}{2p'}}{1-\frac{\mu.E}{2p'}}\right\} \cdot \left\{\frac{1+\frac{\mu.e}{2p}}{1-\frac{\mu.e}{2p}}\right\} = 1+q$ setzen, wo sonach

$q = \frac{\mu\left(\frac{E}{p'}+\frac{e}{p}\right)}{\left(1-\frac{\mu.E}{2p'}\right)\left(1-\frac{\mu.e}{2p}\right)}$ ist. Mit Einführung dieser Bezeichnung erhalten wir für den n^{ten} Wagen die nöthige Zugkraft allgemein $= \frac{\frac{m.a.2Q}{A}}{1-\frac{\mu.e}{2p}}\left(1+q\right)^{n-1}$. Da die Zugkräfte des 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} Wagens u. s. w. nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe fortschreiten, so erhalten wir die nöthige Zugkraft für n an einander gehängte Wägen $= \frac{\frac{m.a.2Q}{A}}{1-\frac{\mu.e}{2p}}\left\{\frac{\left(1+q\right)^{n-1}}{q}\right\}$. Wird die n^{te} Potenz wirklich entwickelt, so gibt diess die weitere Gleichung $\frac{m.a.2Q}{A\left(1-\frac{\mu.e}{2p}\right)}\left(n+n\frac{(n-1)}{2}q+n\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}q^2+\ldots\right)$.

Werden diese n Wägen in einer geraden Bahn geführt, so ist $p=p'$ oder unendlich gross, demnach $q=0$ und die nöthige Zugkraft für ihre Bewegung $= \frac{m.a.2Q.n}{A}$. Da man aber für jeden Fall den Nenner $1-\frac{\mu.e}{2p}$ sehr nahe $=1$ setzen kann, so sehen wir, dass in dem obigen Ausdrucke das erste Glied die Zugkraft für dieselbe Anzahl Wägen in der geraden Bahn enthält und demnach die folgenden Glieder dem Theile der Zugkraft angehören, welche zur Uiberwindung des durch die krumme Bahn hinzukommenden Widerstandes erfordert wird. Weil $\frac{m.a}{A}$, 2 Q und μ als gegeben zu betrachten sind, so sehen wir, dass die Grösse des Widerstandes in den Krümmungen hauptsächlich von der Anzahl der Wägen n und von der Grösse q abhänge, und zwar wird dieser Widerstand um so grösser, je grösser q ist, also je grösser $\frac{E}{p'}$ und $\frac{e}{p}$ werden, d. h. je grösser die Entfernungen der Reihnägel und je kleiner die Perpendikel p' und p oder die Krümmungshalbmesser der Bahn sind. L a n g e W ä g e n u n d s t a r k g e k r ü m m t e B a h n e n s i n d d a h e r f ü r d i e Z u g k r a f t n a c h t h e i l i g.

In Bezug auf die Grösse n zeigt die Formel, dass der Widerstand nicht bloss nach dem einfachen Verhältnisse mit der Anzahl der zusammengehängten Wägen, sondern viel mehr zunehme. Es wird daher in dieser Beziehung für die Zugkraft und die Transport-

kosten vortheilhafter seyn, abgesondert jedem einzelnen Pferde seine Wägen zum Zuge zuzuweisen, als einer grössern Anzahl Wägen zusammen mehrere Pferde vorzuspannen. In dieser Rücksicht wird es daher auch nothwendig, bei der Anlage einer Eisenbahn in den einzelnen Stationen für die zu übersteigende Höhe eine solche Länge auszumitteln, dass von einem Pferde in jeder Station eine bestimmte Anzahl Wägen fortgeschafft werden kann. Da die Abnützung der Wägen und ihre Zerstörung in eben dem Maasse beschleunigt wird, in welchem sich die Widerstände der Bewegung vermehren, so wird in dieser Hinsicht durch Krümmungen nicht nur die Zugkraft, sondern auch die Abnützung der Wägen in gleichem Maasse vermehrt.

Da übrigens der Widerstand in den Krümmungen auch mit der Grösse $\frac{m \, . \, a}{A}$ wächst, so sehen wir, dass auch in dieser Beziehung höhere Räder gegen die niedrigern Vortheile gewähren.

B e i s p i e l. Nehmen wir hier, wie im vorigen Beispiele das Gesammtgewicht eines engl. Wagens $2Q = 75$ engl. Zentner $= 8400$ engl. ℔ (6802,5 N. Oe. ℔) und eben so auch dieselben Abmessungen der Wägen und Bahn an, so ist $\frac{m \, . \, a}{A} = \frac{1}{160}$, der kleinste Krümmungshalbmesser der *Darlington*-Bahn ist $r = 67$ Klafter $= 402$ Fuss, folglich auch sehr nahe $p = r = p' = 402$ Fuss. Die Entfernung der Achsen $e = 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ Fuss und für die zusammengehängten Wägen die Entfernung zwischen der hintern Achse des vorhergehenden und der vordern Achse des nachfolgenden Wagens $E = 8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ Fuss, der Reibungscoeffizient $\mu = \frac{1}{2}$. Setzen wir nun bei diesen Abmessungen die Räder auf den Achsen beweglich und die Achsen nach der Bahnkrümmung verwendbar voraus, so finden wir nach der vorstehenden allgemeinen Berechnung die nöthige Zugkraft für den ersten Wagen:

$$= \frac{\frac{1}{160} \, . \, 8400}{1 - \frac{13}{4 \, . \, 4 \, . \, 402}} = 52{,}606 \text{ engl. ℔}$$

und wenn an diesen noch ein zweiter Wagen angehängt wird, so erfordert der zweite die Zugkraft

$$= 52{,}606 \left\{ \frac{1 + \frac{17}{4 \, . \, 2 \, . \, 402}}{1 - \frac{17}{4 \, . \, 2 \, . \, 402}} \right\} \left\{ \frac{1 + \frac{13}{4 \, . \, 4 \, . \, 402}}{1 - \frac{13}{4 \, . \, 4 \, . \, 402}} \right\}$$

$$= 52{,}606 \, . \, \frac{3233}{3199} \, . \, \frac{6445}{6419} = 53{,}258 \text{ engl. ℔}$$

u. s. w. Werden aber bei dem Gebrauche eines Dampfwagens von diesem 24 aneinander gehängte Wägen fortgedrückt, so erfordern alle Wägen zusammen die Zugkraft

$$52{,}606 \left\{ \left(\frac{3233}{3199}\right)^{24} \left(\frac{6445}{6419}\right)^{24} - 1 \right\} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{17}{8 \, . \, 402}\right)\left(1 - \frac{13}{16 \, . \, 402}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{17}{2 \, . \, 402} + \frac{13}{4 \, . \, 402}\right)} \right\}$$

$$= 52{,}606 \, . \, 0{,}4201 \, . \, \frac{3199 \, . \, 6419}{6432 \, . \, 47} = 1498 \text{ engl. ℔.}$$

Auf eine ähnliche Art wäre die Zugkraft für mehrere zusammengehängte Wägen mit f e s t e n R ä d e r n zu berechnen, wenn man die im §. 586 gezeigte Berechnung für mehrere Wägen fortsetzen würde. Aus dem dort angeführten Beispiele ergibt sich aber schon, dass dieselbe Anzahl Wägen mit f e s t e n Achsen eine bei weitem grössere Zugkraft erfordern würde, als man nach der letzten Rechnung für Wägen mit b e w e g l i c h e n Rädern gefunden hat, woraus die bereits erwähnten Vortheile b e w e g l i c h e r Räder gegen feste noch auffallender ersichtlich werden.

§. 591.

Wenn die Frachtkosten für eine längere Eisenbahnstrecke zu berechnen sind, so entsteht zuerst die Frage, wie viel Wägen, mit welcher Ladung und auf welche Entfernung dieselben in einem Arbeitstage von einem Pferde fortgebracht werden können. Wir wollen zuerst eine ganz horizontale Strecke betrachten, und das Gewicht eines Wagens mit 15 N. Oe. Ztr., die Ladung für jeden Wagen mit 50 N. Oe. Ztr., sonach das Gewicht eines Wagens sammt Ladung $Q = 65$ N. Oe. Ztr. annehmen. Der Widerstand der Bahn sey durch Versuche $\frac{m.a.Q}{A} = \frac{Q}{150}$ gefunden worden. Nehmen wir nun noch die mittlere Zugkraft eines stärkern Pferdes $k = 125$ ℔ an, so haben wir für den Fall, wenn ein Pferd 3 Wägen vorgespannt wird, $\frac{3.6500}{150} = 125\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$. Die Entfernung, auf welche diese Wägen von dem Pferde in einem Tage geführt werden können, ist $= 3600.z.v = 3600.t.c.\frac{z}{t}.\frac{v}{c}$. Im I[ten] Kapitel wurde gezeigt, dass die Frachtkosten für den Zentner und die Meile am kleinsten ausfallen, wenn die Verhältnisse $\frac{v}{c}$ und $\frac{z}{t}$ einander gleich gesetzt werden. Wir haben also $\frac{3.6500}{150} = 125\left(2-\frac{v}{c}\right)^2$. Hieraus folgt $2-\frac{v}{c} = \sqrt{1{,}04} = 1{,}02$, demnach $\frac{v}{c} = \frac{z}{t} = 0{,}98$. Nehmen wir nun an, dass das Pferd mit Anwendung der Zugkraft von 125 ℔ täglich in 8 Stunden Arbeitszeit 4,8 Meilen zurücklegen kann, so ist die mittlere Geschwindigkeit desselben $c = 4$ Fuss, folglich $v = 4.0{,}98 = 3{,}92$ Fuss und sonach der in einem Tage zurückzulegende Weg $= 3600.8.4(0{,}98)^2$ Fuss $= 18440$ Klftr. oder $4\frac{1}{2}$ Meile und 440 Klftr.

§. 592.

Wenn nebst den horizontalen Strecken noch kleine Steigungen und Gefälle vorkommen, so müssen wir vorläufig die Fälle untersuchen, bei welchen dieselbe Last von 3.65 Ztr. noch von einem Pferde fortgebracht werden kann. Setzen wir die Länge der Strecke $= l$, die Höhe $= h$ und das Gewicht des Zugpferdes $= 600$ ℔, so haben wir die Gleichung für die Zugkraft $\frac{3.6500}{150} + (3.6500 + 600)\frac{h}{l} = 125\left(2-\frac{v}{c}\right)\left(2-\frac{z}{t}\right)$. Zur Erleichterung der Rechnung wollen wir annehmen, dass das Pferd nur 8 Stunden täglich im Zuge gehen soll; wir erhalten demnach die Gleichung $\frac{3.6500}{150} + (3.6500 + 600)\frac{h}{l} = 125\left(2-\frac{v}{c}\right)$.

Bei der grössten Anstrengung des Pferdes ist $v = 0$, folglich $\frac{3.6500}{150} + (3.6500 + 600)\frac{h}{l} = 250$, also $\frac{h}{l} = \frac{1}{167}$ sehr nahe. Hieraus sehen wir, dass die Steigung kleiner als $\frac{1}{167}$ seyn müsse, weil sonst das Pferd die oben angegebene Last von 3.65 Ztr. nicht fortzubringen im Stande wäre. Auf gleiche Art ergibt sich für den

Fall, wenn die Bahn ein Gefälle hat, aus der Gleichung $\frac{3 . 6500}{150} - 3 . 6500 . \frac{h}{l} = 125 \left(2 - \frac{v}{c}\right)$, dass das Pferd gar keine Zugkraft anzuwenden habe, oder leer gehe, wenn $\frac{h}{l} = \frac{1}{150}$ ist, weil in diesem Falle die Wägen von selbst laufen.

Wir wollen für ein **Beispiel** annehmen, eine Eisenbahn habe auf der ersten Strecke von 3000 Klftr. eine Steigung von 60 Fuss oder 10 Klftr.; dann folge eine Strecke von 1500 Klftr. horizontal, dann eine Strecke von 6000 Klftr. mit einem Gefälle von 90 Fuss oder 15 Klftr. und die weitere Bahn sey horizontal. Zur Beantwortung der Frage, wie weit die Last von 3 . 65 Ztr. von einem Pferde in einem Tage geführt werden könne, haben wir für die erste Strecke die Gleichung $\frac{3 . 6500}{150} + (3 . 6500 + 600) \frac{10}{3000} = 125 \left(2 - \frac{v}{c}\right)$; daraus folgt $\frac{v}{c} = 0{,}424$. Setzen wir $c = 4$ Fuss, so ist in der ersten Strecke $v = 1{,}696$ Fuss, also die Zeit, in welcher die 3000 Klftr. der ersten Strecke zurück gelegt werden $= \frac{3000 . 6}{1{,}696}$ Sekunden, oder $2^h\, 56^{Min.}\, 53^{Sec.}$ Für die zweite horizontale Strecke von 1500 Klftr. haben wir die Gleichung $\frac{3 . 6500}{150} = 125 \left(2 - \frac{v}{c}\right)$, daraus folgt $\frac{v}{c} = 0{,}96$, demnach $v = 3{,}84$ Fuss und daher die Zeit der Fahrt über diese horizontale Strecke $= \frac{1500 . 6}{3{,}84}$ Sekunden oder 39 Minuten 4 Sek. Für die Strecke bergab von 6000 Klftr. haben wir die Gleichung $\frac{3 . 6500}{150} - 3 . 6500 . \frac{15}{6000} = 125 \left(2 - \frac{v}{c}\right)$; daraus folgt $\frac{v}{c} = 1{,}35$ und $v = 5{,}4$ Fuss; daher die Zeit, in welcher diese 6000 Klftr. zurück gelegt werden $= \frac{6000 . 6}{5{,}4}$ Sekunden oder $1^h\, 51^{Min.}\, 7^{Sec.}$ Rechnen wir nun die Zeit, welche zur Befahrung der ersten 3 Strecken erforderlich ist, zusammen, so finden wir $5^h\, 27^{Min.}\, 4^{Sec.}$ Ziehen wir diese Zeit von den täglichen 8 Arbeitsstunden ab, so bleibt $2^h\, 32^{Min.}\, 56^{Sec.}$ für die Befahrung der folgenden Strecke noch übrig. Da diese Strecke horizontal ist, für welche wir die Geschwindigkeit $v = 3{,}84$ Fuss gefunden haben, so ist die Länge des noch zurückzulegenden Weges $= (3600 . 2 + 1976)\ 3{,}84$ Fuss oder $1\frac{1}{4}$ Meile und 873 Klftr. Also beträgt der in einem Tage zurückzulegende Weg 16373 Klftr., oder 4 Meilen und 373 Klftr. Aus diesem Beispiele sieht man leicht, wie in andern ähnlichen Fällen zu verfahren sey, und wie demnach die Stationen eingerichtet werden können, auf welchen die Wägen zu bestimmten Stunden einzutreffen haben.

§. 593.

Wenn die vorkommenden Steigungen grösser sind, so ist es von Wichtigkeit, die Bahn **mit jener Steigung anzulegen**, damit die Frachtkosten zu ihrer Befahrung möglichst klein, oder ein **Minimum** werden. Hiezu haben wir bereits oben §. 549 die Anleitung gegeben. Weil aber dort die Steigung nur für Frachtwägen, bei welchen der Widerstandscoeffizient $m = 0{,}03$ bis $0{,}12$ beträgt, berechnet worden, bei Eisenbahnen aber m viel kleiner ist, so wurde hiezu noch folgende Tabelle berechnet, und in derselben das Gewicht des Wagens $W = 15$ Ztr., die mittlere Zugkraft des Pferdes $k = 125$ ℔ und das Gewicht des Pferdes $P = 5 . 125$ ℔ $= 625$ ℔ angenommen.

Widerstands - Coeffizient des Weges m	Verhältniss der Strassensteigung $\frac{h}{l} = m.y$	Steigung auf 1 Klafter in Zollen.
$^1/_{100}$	0,0193	1,39
$^1/_{125}$	0,0178	1,28
$^1/_{150}$	0,0165	1,19
$^1/_{175}$	0,0155	1,12
$^1/_{200}$	0,0147	1,06
$^1/_{225}$	0,0140	1,01

In der Ausführung wird es nicht immer möglich seyn, genau die Zahlen dieser Tabelle zu gebrauchen; es versteht sich daher von selbst, dass man sich diesen Zahlen nur möglichst nähern müsse und dann für jeden Fall die Zahl der vorzuspannenden Pferde, welche zur Fortbringung der gegebenen Last nöthig sind, berechnen könne. Eine genaue Rechnung wird übrigens zeigen, dass es in allen Fällen, wo grössere Steigungen eintreten, als dass ein Pferd noch einen beladenen Wagen fortzubringen im Stande wäre, demnach mehrere Zugpferde vorgespannt werden müssten, vortheilhafter sey, die Befahrung solcher Höhen mittelst Maschinen zu bewirken, die entweder von Pferden, oder andern Kräften, Dampfmaschinen, Wasserrädern, u. d. gl. zu betreiben sind, worüber im folgenden Bande das Nöthige angeführt werden wird.

§. 594.

Zur Theorie der Eisenbahnen bleibt uns nun noch die Bestimmung der krummen Linie der Bahn übrig, damit die Wägen mit Leichtigkeit aus einer geraden in eine krumme Linie übergehen. Derselbe Fall kommt bei einem jeden Ausweichplatze vor. Will man nämlich das Ausspringen der Wägen hiebei verhüten, so muss offenbar die Bahn für den Uibergang aus einem Geleise in das andere nicht nach einer geraden Linie, welche einen zu grossen Winkel zwischen der Haupt- und der Nebenbahn bilden würde, sondern nach einer gleichförmigen Schlangenlinie angelegt werden. Die einfachste Krümmung dieser Art besteht in zwei parabolischen Linien, die auf gleiche Art sowohl aus der Hauptbahn austreten, als auch in die Nebenbahn sich verlaufen.

Ein Beispiel wird dieses am deutlichsten erklären. Setzen wir die Abweichung $= \frac{1}{4}$ Zoll auf jede 3 Fuss Länge, oder = 1 Zoll auf jede Klafter, so gibt folgende Tabelle die Abweichungen für die beigesetzten Längen.

Länge in Klaftern	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Abweichung in Zollen	0	1	4	9	16	25	36	49	64	79	92	103	112	119	124	127	128	128
Unterschiede in Zollen		1	3	5	7	9	11	13	15	15	13	11	9	7	5	3	1	0

Fig. 19. Tab. 30. Nach diesen Dimensionen ist die krumme Linie des Ausweichplatzes Fig. 19 aufgetragen worden, und man sieht leicht, wie in ähnlichen Fällen der Uibergang aus einer geraden in eine krumme Linie oder die Verbindung zweier in entgegengesetzter Richtung fortlaufender krummen Linien zu bewirken sey.

§. 595.

Am Schlusse dieses Werkes glaube ich unsern Lesern eine kurze Nachricht über die in Böhmen in der Ausführung begriffenen zwei Eisenbahnen um so mehr geben zu müssen, als man über den Stand dieser zwei bereits sehr weit fortgeschrittenen Unternehmungen im Publikum noch wenig unterrichtet ist. Die erste Eisenbahn, welche in Böhmen zur Ausführung kam, ist von meinem Vater im J. 1807 statt eines bereits im vierzehnten Jahrhunderte zur Verbindung der Moldau und Donau in Antrag gebrachten Kanales vorgeschlagen und die Gründe hiefür in dem in der Vorrede genannten Werke umständlich auseinander gesetzt worden.

Die ungünstigen Zeitverhältnisse liessen jedoch dieses im Jahre 1807 gemachte Projekt nicht zur Ausführung kommen, bis die im J. 1822 eingetretene Freiheit der Elbeschiffahrt eine zweckmässige Verbindung der Donau und Elbe durch die Moldau und demnach den Bau einer Eisenbahn wieder erwünschlich machte. Die Jahre 1823 und 1824 waren überdiess für Akzienunternehmungen so günstig, dass dieses Projekt nunmehr ohne Anstand realisirt werden konnte. Ich hatte in dieser Hinsicht bereits im J. 1822 meine erste Reise nach England angetreten, um die dortigen Eisenbahnen kennen zu lernen und machte im J. 1824 folgende Abhandlung hierüber bekannt: „Uiber die Vortheile der Anlage einer Eisenbahn zwischen der Moldau und Donau. Von Franz Anton von Gerstner, Ritter der k. k. österr. Erblande, Herr und Landmann in Böhmen, Mähren und Schlesien, öffentlichem und ordentlichem Professor der praktischen Geometrie am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Wien, 1824. Bei Tendler.“ (Pr. 1 fl. C. M.) Diese Druckschrift erschien später in französischer Uibersetzung in dem Jahrgange 1829 des *Journal du genie civil.*

Unter dem 7ten September 1824 geruhte Seine kaiserl. königl. Majestät mir ein ausschliessendes Privilegium zum Baue und zur Benützung dieser Eisenbahn während 50 Jahren zu verleihen, ich trat sonach aus dem kaiserl. königl. Staatsdienste und vereinigte mich unter dem 20sten März 1825 mit einer Privatgesellschaft, an deren Spitze die *Chefs* der ersten Wiener Grosshandlungshäuser standen, zur Ausführung dieser Unternehmung. Die Privilegiumsurkunde, der gesellschaftliche Vertrag, die Statuten, die ersten öffentlich erschienenen Berichte über die Unternehmung und alle andere hieher gehörigen Dokumente, finden sich in der: „Sammlung der Aktenstücke in Betreff der Ausführung der k. k. priv. österr. Eisenbahn. Wien 1826. Bei Tendler“ (Pr. 30 kr.) Die weitere Darstellung der Verhältnisse dieser Unternehmung, nachdem der Bau einer Strecke von 32800 N. Oe. Klftr. oder 8,2 N. Oe. Meilen beendigt, ein bedeutender *fundus instructus* angeschafft, die Bahn eröffnet und ein Kapital von 921673 fl. 18 kr. C. M. verausgabt war, findet man in der Abhandlung: „Uiber die Vortheile der Unternehmung einer Eisenbahn zwischen der Moldau und Donau von Franz Anton Ritter von Gerstner; im Februar 1829. Wien bei Tendler.“ (Preis 40 kr.). Diese Abhandlung dürfte für die Unternehmer ähnlicher Bauten von Interesse seyn, weil hierin eine Vergleichung unse-

rer Eisenbahn mit andern Eisenbahnen und viele hieher gehörige wichtige Daten enthalten sind. Nach Bekanntmachung derselben trennte ich mich von der Gesellschaft, und ging, nachdem ich schon früher den Winter $18^{26}/_{27}$ in England zugebracht hatte, abermal dahin, um die früher besichtigten Bauwerke und die inzwischen ausgeführten neuen grössern Bauunternehmungen zu besichtigen, was mich bis zum Ende des Jahrs 1829 beschäftigte. Die Gesellschaft liess inzwischen weitere 13400 Klftr. vom Scheidungspunkte des Gebirges bis *Lest* durch ihre Ingenieurs, welche sämmtlich früher meine Schüler waren, bauen und benützte zugleich die von mir hergestellten $8^{1}/_{6}$ Meilen Bahn zum Salztransporte. Laut des später erschienenen öffentlichen Berichtes der gesellschaftlichen Direkzion wurden vom 2ten April bis Ende November 1829 auf dieser Strecke 215855 Fässchen Salz und 22287 Ztr. 55 ℔ Kaufmannsgüter, zusammen also beiläufig eine Viertel Million Ztr. verführt, wovon die reine Einnahme nach Abzug der Unterhaltungskosten der Bahn, aller Besoldungen und diversen Unkosten 38273 fl. 54 kr. betrug. Da dieses Erträgniss der ersten 8 Monate auf ein Kapital von beiläufig 900000 fl. zu vertheilen kam, so hätten sich die Verhältnisse der Unternehmung allerdings sehr günstig dargestellt, wenn nicht die Einführung des Salzfreihandels in Böhmen die Auflösung des auf die Dauer von 6 Jahren vom 1ten April 1829 anzufangen mit der hohen Staatsverwaltung bedingungsweise abgeschlossenen Salztransportsvertrages herbeigeführt hätte.

Nach Auflösung dieses Vertrages am 1ten November 1829 erfolgte eine solche Verminderung des Frachtquantums und der Erträgnisse der Bahn, dass im Jahre 1830 keine Dividende an die H. Akzionäre vertheilt werden konnte.

Diess ist eine kurze Darstellung der Verhältnisse einer Eisenbahn, deren Länge noch in diesem Augenblicke von keiner andern Bahn in Europa übertroffen wurde; die Länge der vollkommen ausgeführten und für jede Art Güter in Benützung stehenden Strecke beträgt nämlich 46200 Nied. Oesterr. Klafter oder $11{,}55$ N. Oe. Meilen, und der Gesammtaufwand hiefür beiläufig zwölfmal hundert tausend Conventions-Gulden. Die weitere Fortsetzung der 5 Meilen Bahn von *Lest* bis an die Donau bei *Linz* benöthigt noch ein Kapital von beiläufig 400000 Gulden C. M., dessen Aufbringung der Gesellschaft bei ihren ganz erschöpften Mitteln und vorzüglich bei den für solche Unternehmungen eingetretenen äusserst ungünstigen Zeitverhältnissen bisher noch nicht gelingen wollte.

Nebst den im Verlaufe dieses Werkes hinsichtlich dieser Eisenbahn angeführten Details ihrer Bauart, haben wir zur bessern Darstellung dieser Unternehmung auf den zwei letzten Doppelplatten unserer Kupfer einen möglichst genauen, mit dem *Terrain* versehenen Situationsplan und die hiezu gehörigen Längen- und Querprofile der 32225 N. Oe. Klafter langen Eisenbahnstrecke von der Stadt Budweis in Böhmen bis zum Scheidungspunkte des Gebirges oberhalb Leopoldschlag in Oberösterreich beigefügt. Der Grundriss zeigt, wie mühsam die Bahn in der ausserordentlich coupirten Gebirgsgegend fortzuführen war, und welche Umwege man ergreifen musste, um, wie es aus den Profilen ersichtlich ist, die einmal erstiegene Höhe nirgends wieder zu verlieren, die ganze Höhe des Gebirges von 173 N. Oe. Klafter mit keiner grössern Steigung als 1 : 120 oder $7{,}2$ Linien auf die Klafter zu erreichen, und 3 Theile oder 3 Stationen zu erhalten, in deren jeder für sich

Tab. 37, 38, 39 und 40. beinahe dieselbe Steigung vorhanden ist. Die Querprofile der Dämme und Abgrabungen zeigen, dass die eigentliche Bahn aus schmiedeisernen Schienen von $1\frac{3}{4}$ bis 2 Zoll Breite und $\frac{1}{3}$ Zoll Dicke, die auf Holz befestigt wurden, besteht, dass jedoch diese Bahn durchaus auf einer sogenannten trockenen Steinmauer (ohne Mörtel), welche vom festen Grunde des *Terrains* errichtet wurde, auflag. Diese Mauer war Anfangs wie das Profil Nro. I. zeigt, in der Mitte mit Erde ausgefüllt, oder bestand aus zwei einzelnen Mauern, auf deren jeder ein Bahngeleise lag; da diess jedoch bei der grossen Höhe vieler Dämme nicht ganz entsprechend gefunden wurde, so ist die kostspieligere Konstrukzion mit einer einzelnen massiven Mauer, wie das Profil Nro. II zeigt, bald nach Anfang des Baues angenommen und für die ersten $8\frac{1}{5}$ Meilen beibehalten worden. Diese Konstrukzion, welche bisher noch bei keiner Eisenbahn eingeführt war, hatte den Zweck, den Senkungen der Bahn auf den hohen Dämmen, die bis zu 60 Fuss stiegen, vorzubeugen und der ganzen Bahn sogleich das gehörige *Niveau* zu geben. Die Konstrukzion der hölzernen Brücken von 10 und 12 Klafter Spannung über die vorhandenen Schluchten ist aus der Tafel Nro. 38 ersichtlich. Uibrigens ist noch zu bemerken, dass die hölzernen Unterlagen für die, im Vergleich mit der englischen Konstrukzion weit schwächern Schienen aus der Ursache angenommen wurden, weil die Herbeischaffung und Erneuerung des Holzes in dieser Gegend viel wohlfeiler zu stehen kam, als die Verwendung massiver gewalzter Schienen, zu deren Erzeugung sich bisher noch kein Walzwerk in Oesterreich befindet. Sollte jedoch der Verkehr auf der Bahn mit der Zeit so sehr zunehmen, dass die Mehrauslage für solche Schienen gedeckt wird, so wird wohl auch ihre Einführung auf der Bahn erfolgen, so wie sich überhaupt über das Gelingen und den Werth dieser Unternehmung erst in mehrern Jahren urtheilen lassen wird.

§. 596.

Eine andere vaterländische Unternehmung ist die im Baue begriffene Eisenbahn zwischen Prag und Pilsen, zu deren Gründung sich im Jahre 1825 ein Verein bildete. Zu ihrer Ausführung erfolgte am 30ten Juli 1827 das Allerhöchste Privilegium, der Bau begann im J. 1828 und wurde in den folgenden Jahren so fortgesetzt, dass am Ende des Jahres 1830 bis auf einen unbedeutenden Rückstand 8 N. Oe. Meilen von Prag bis in die Mitte der zum Verkaufe nach Prag bestimmten Pürglitzer Waldungen in fahrbaren Stand hergestellt wurden, sonach im J. 1831 auch zu befahren seyn werden. Die Bahn erhält von Pilsen bis Prag eine Länge von $20\frac{1}{2}$ N. Oe. Meilen, und bekommt von Pilsen bis Rostok an der Beraun auf 38340 Klafter das Gefälle von 340,5 Klafter, von da bis zum Scheidungspunkte oberhalb Lana auf 16495 Klftr. die Steigung von 110,8 Klftr. und von da bis Prag auf 27130 Klftr. wieder ein Gefälle von 117,5 Klfr. Bei Prag hat sie eine 450 Klftr. lange schiefe Fläche mit $\frac{1}{20}$ Gefälle. Die *Chausée* zwischen Prag und Pilsen hat dagegen eine Länge von beiläufig 13 Meilen. Um nämlich mehrere landwirthschaftliche Produkte zur Verführung zu erhalten, hat man die Bahn auf diesem Umwege durch die bedeutendsten Waldgegenden geführt, und da diese Gegenstände einen geringen Werth haben und keine grossen Auslagen nach dem Zentner gerechnet auf einen kostbaren Bau gestatten, so hat man auch in dieser Hinsicht die Bäche möglichst vermieden und die Trace um die Berge und Hügel schlangenförmig

herumgeführt. Zur Vermeidung des Widerstandes, den die auf den Achsen festen Räder der englischen Wägen durch Anreibung an die Bahn erleiden würden, hat man an den Wägen die §. 587 beschriebene Vorrichtung angewendet, welche sich auch durch den Transport der Baumaterialien auf den fertig gewordenen Bahnstrecken bisher bewährt hat. Der Lokalumstand, dass die Anhöhe, auf welcher die Bahn von Lana bis Prag geführt wurde, durchaus ein Sandsteinlager zur Unterlage hat, wovon an mehreren Stellen vorzüglich bei Dogges und Zehrowitz die brauchbarsten Bau- und Quadersteine gebrochen werden, gab die Veranlassung, dass man die Eisenschienen, welche nach dem frühern Antrage von Schmiedeisen auf Holz gelegt werden sollten, in einer angemessenen Stärke von Roheisen giessen, und sie durchaus auf eine ununterbrochene Reihe von Quadersteinen legen liess. Diese Schienen sind, um in jeder krummen Linie brauchbar zu seyn, nur 3 Fuss lang, $1\frac{3}{4}$ Zoll breit und 1 Zoll stark, 17 bis 18 Med. Oester. ℔ schwer und mit 2 seitwärts angegossenen in ihrer Mitte gelochten Lappen zu ihrer Befestigung auf den Steinunterlagen versehen. Die bereits hergestellten 8 Meilen haben nach dem im Drucke erschienenen „dritten Jahresbericht der Direktion der k. k. priv. prager Eisenbahngesellschaft“ sammt allen Vorauslagen eine Ausgabe von 255130 fl. Conventions - Münze verursacht und erfordern zu ihrer gänzlichen Beendigung, Anschaffung der Bahnwägen, Herstellung der nöthigen Gebäude, und Bestreitung anderer noch zu leistenden Beträge eine Summe von beiläufig 38000 fl., wornach die nächst Prag liegenden 8 Meilen ein Anlagskapital von beiläufig 300000 fl. C. M. erheischen würden.

Das Unternehmen gründet sich hauptsächlich auf die Verführung des Brenn- und Bauholzes, der Steinkohlen und einiger landwirthschaftlichen und Kunsterzeugnisse, als: Getraide, Raps, Kleesamen, Wolle, Pottasche u. s. w., dann Mühl- Quader- Bausteine und Ziegel, Gyps, Guss- und Schmiedeisenwaaren u. dgl. m. Der jährliche Transport dieser Gegenstände wurde vor dem Beginne des Baues nach den Angaben der Wirthschaftsämter von den anliegenden Dominien auf beiläufig 1100000 Ztr. angeschlagen. Die Transporte werden durchgängig mit Pferden eingeleitet.

(Ende des ersten Bandes.)

STADTBIBLIOTHEK AUGS

Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	soll stehen
39	2. v. unt.	2,	2,5
48	14. v. unt.	$3600\,t.c.\left(\cdot - \sqrt{\frac{Q}{k}}\right)$	$3600\,t.c\left(2 - \sqrt{\frac{Q}{k}}\right)^2$
60	13. v. oben	$\frac{u^2 . B}{k^3}$	$\frac{u^2 . B^3}{k^3}$
97	2. v. unt.	$\frac{v}{c} = \frac{5}{6}$	$\frac{v}{c} = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{7}{15} . \frac{B}{k}\right)$
.	1. v. unt.	$\frac{z}{t} = 1$	$\frac{z}{t} = 1 - \frac{3}{7} . \frac{B}{k}$
108	3. v. oben	$\frac{2}{\alpha}\left(\frac{c-v}{c}\right)$	$\frac{2\varrho}{\alpha}\left(\frac{c-v}{v}\right)$
127	7. v. oben	ozoy	Ozoy
207	3. von unten ist bei M m eben so wie in dem Folgenden das Zeichen zu ändern.		
227	9. v. oben	J′	J
240	8. v. unt.	720½ ℔ gerade 576½	472½ ℔ gerade 720½ ℔
252	1. v. oben	$5\left(\frac{Q+T}{q}\right)\left(1 + \frac{5}{q}\right)$	$5\left(\frac{Q+T}{q}\right)$
264	3. v. oben	$C\left(\frac{215}{56}\right)^2 \ldots\ldots$	$C\left(\frac{215}{54}\right)^2 \ldots\ldots$
278	8. v. unt.	$dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy}\right)}$	$dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$
282	IV und V ist statt $\frac{872}{100000}$ die Zahl S. 488, b) 0,001235 zu setzen		
318	11. v. oben	$G = \frac{11}{14} x^2 . l . g$	$G = \frac{11}{14} . \frac{x^2 . l . g}{1728}$
.	15. v. oben	$\frac{11}{14} . \frac{72 . 50 .}{1728} x^2$	$\frac{11}{14} . \frac{72 . 50}{2 . 1728} x^2$
325	15. v. oben	$\frac{Q . L .}{B . H . \alpha'} \frac{b x^2}{3 r}$	$\frac{Q . L}{B . H . \alpha'} . \frac{b x^3}{3 r}$
347	12. v. unt.	$\frac{B . H^3}{L^1}$	$\frac{B . H^3}{L^2}$
352	10. v. unt.	94685	94741
358	20. v. unt.	94771	94741
395	3. v. oben	2 Kubikfuss	3 Kubikfuss
429	18. v. unt.	noch O fünf	nach O 2,5
.	22. v. unt.	$\sqrt{(37{,}5 + 15^2)}$	$\sqrt{(37{,}5^2 + 15^2)}$
438	11. v. unt.	= n p	= M m
441	9. v. unt.	Punkt K	Punkt S
.	.	Fig. 4	Fig. 3
456	.	§. 401	§. 402
496	.	§. 408	§. 442
513	2. v. unt.	$1 + n . \delta + n . a$	$1 + n . \delta + m . a$
516	17. v. oben	.	0,443
525	4. v. oben	Fig. 23	Fig. 33
527	1. v. oben	.	Fig. 35 Tab. 27.

Gerstner

4° Phys

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gerstner, Franz Joseph <<von>>,

Handbuch der Mechanik

Bd.: 1.

Prag ; Wien 1831

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- 4 Phys 64 -1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11221217-1